

# メタマテリアル班研究レポート

メタマテリアル班一同

2011年5月24日

## 目次

1	波動方程式	2
1.1	方程式と平面波解	2
1.2	局在波 (エバネッセント波)	3
2	メタマテリアル	4
2.1	メタマテリアルとは何か?	4
2.2	NIM と負の屈折	4
2.3	応用例 ~透明マント	5
2.4	応用例続 ~スーパーレンズ (完全レンズ)	7
3	電気回路と電磁波・電磁メタマテリアル	8
3.1	電気回路にできること	8
3.2	実際の回路一例	8
3.3	今回の実験結果	10
4	音響メタマテリアル	10
4.1	音響メタマテリアル製作	11
4.2	今回の実験結果	11
5	終わりに	13

## 1 波動方程式

### 1.1 方程式と平面波解

一般に音波や電磁波など、波が従う方程式を「波動方程式」と呼び、波動として扱っている物理量  $A$  (例えば、電磁場の各成分  $E_i$  や空気の圧力  $P$  など) に関して

$$\Delta A - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

が成立する (より一般の非線形の波動や物理量  $A$  の湧きだしが存在する場合を考えると、この式は成立しない)。ここで、 $v_p^2$  は位相速度と呼ばれ、波動の節が空間を進む速度を定める。

(1) の最も簡単な解は定数  $A_0$  を振幅とする平面波  $A_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t)$  であり、これを代入することで分散関係と呼ばれる、波を考える上で最も重要な関係式を得る。

$$\omega^2 = v_p^2 k^2 \quad (2)$$

ここで  $k \equiv |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$  であるので (2) は

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v_p^2} \quad (3)$$

となる。

通常の場合には、空間を伝搬する伝搬波のみを考えるので、 $k_x, k_y, k_z \in \mathbb{R}$  であり、これにより  $k_x, k_y, k_z$  は以下のような制約を受ける。

$$-\omega \leq v_p k_i \leq \omega \quad (4)$$

ただし、上式で  $i = x, y, z$  である。断りがない限り、 $\omega$  については  $\omega > 0$  とするのが一般的となっているので、ここでもそうなるようにとることとする。

より、一般的な解が欲しい場合には (1) に現れる物理量  $A$  を Fourier 変換した式\*1

$$\tilde{A}(\vec{k}, t) \equiv \int d^3x A e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (5)$$

を用いて解くのが便利である。 $\tilde{A}(\vec{k}, t)$  と  $A(\vec{x}, t)$  の間には

$$A(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \tilde{A}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (6)$$

という関係式が成立することが数学的にわかっているので、(6) を (1) に代入して

$$-k^2 \tilde{A}(\vec{k}, t) - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t^2}(\vec{k}, t) = 0 \quad (7)$$

これは時間に関する微分のみを含む線形微分方程式であるから、簡単に解が求められて、

$$\tilde{A}(\vec{k}, t) = \tilde{A}_{0+}(\vec{k}) e^{i v_p k t} + \tilde{A}_{0-}(\vec{k}) e^{-i v_p k t} \quad (8)$$

となる。ここで、 $\tilde{A}_{0\pm}(\vec{k})$  は  $t$  に依存しない  $\vec{k}$  の任意関数。

最終的に、これを (5) に代入して

$$A(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[ \tilde{A}_{0+}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + v_p k t)} + \tilde{A}_{0-}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - v_p k t)} \right] \quad (9)$$

が一般解となる。

\*1  $\tilde{A}$  は関数  $A$  の Fourier 変換を表す。

## 1.2 局在波 (エバネッセント波)

前節では、早々に波の波数  $\vec{k}$  が実数の値を持つとして、(4) にみられるような制約を課した。しかしながら、物理的には  $k_i$  が実数である必然性は全くなく、むしろこういった波を考えることで、今までとは違った見方をすることもできるのではないかと期待できる。

例えとして、 $k_y = i\kappa \in i\mathbb{R}$  であるような波について考えてみたい。

前節と同様に、まずは平面波解について解を求めると

$$A(\vec{r}, t) = A_+ e^{-\kappa y + i(k_x x + k_z z + \omega t)} + A_- e^{-\kappa y + i(k_x x + k_z z - \omega t)} \quad (10)$$

となる。(10) を見ればわかるように、これは  $y = 0$  という面 ( $xz$  面) に局在した波を表しており、 $y \neq 0$  の点では振幅が指数関数的に減少する。このため、 $y = 0$  から十分に離れた点ではこれを観測することはできない。これが、伝搬波を考えた場合に  $k_i \in \mathbb{R}$  を課した理由である。

伝搬波の波数に波の周波数に依存した上限が存在することは、光学の分野で「回折限界」と呼ばれる現象と深く結び付いている。回折限界とは、「光が波の性質をもつために、その波長より小さいスケールを扱うことができないという限界」のことである。これを見るために、周波数  $\omega$  の光を放つ原点にある点光源が十分に離れた ( $y \rightarrow \infty$ ) 位置でどのように見えるかを考察してみる。なお、ここでは簡単のため、 $z$  軸の存在しない二次元の系を考えることにする。このとき、解くべき方程式は (1) より簡単な形となって

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)A - \frac{1}{v_p^2} \partial_t^2 A = 0 \quad (11)$$

これについて、原点にある点光源を  $f(x) = \delta(x)$  とおき (これは  $x$  軸方向に局在した点源を表す)、これ (この像) が  $y \rightarrow \infty$  の無限遠点まで伝送されると考える (図 1 参照)。まず、点光源  $\delta(x)$  を波数表記に直すと

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk_x e^{ik_x x} \quad (12)$$

であるので

$$\tilde{f}(k_x) = 1 \quad (13)$$

これは、 $\delta(x)$  という 1 点に局在した光源が波数で見ると全ての波数の情報を含んでいる (全ての波数の波を使わないと伝送できない) ことを示している。しかし、今回の場合、伝送できる波数には限りがあつて  $-k_c \leq k_x \leq k_c$  ( $k_c = \omega/c$ ) の範囲の波は振幅を変えることはなく、無限遠点まで伝わるが、 $|k_x| > k_c$  の波数を持つ波は (10) でみたように  $y \rightarrow \infty$  の極限で指数関数的に減少していくため、伝搬することができない。よって、無限遠点で見ると波数表示では、

$$\tilde{f}_{\text{cut}} = \begin{cases} 1 & (|k_x| \leq k_c) \\ 0 & (|k_x| > k_c) \end{cases} \quad (14)$$

これを、空間表示に戻すと

$$\begin{aligned} f_{\text{cut}}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \tilde{f}_{\text{cut}} e^{ik_x x} \\ &= \frac{\sin(k_c x)}{\pi x} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。この関数  $f_{\text{cut}}(x)$  は原点のまわりに  $\lambda/2 = \pi/k_c$  程度、広がった関数になっている (図 2 参照)。これにより、この場合には解像度<sup>\*2</sup>  $d \sim \lambda/2$  に制限される。こうして、回折限界の主張が示された。<sup>\*3</sup>

<sup>\*2</sup> 「波によって見える物の大きさの限界」を表す適切な言葉が見つからないので、「解像度」ということにする。

<sup>\*3</sup> ここでは無限小の大きさを扱うとそれが大きさ  $\lambda/2$  程度になることを示しただけだが、元の大きさが有限であった場合にも  $\delta(x) \rightarrow \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-ax^2}$  ( $a > 0$ ) として、同様の議論をすればよい。

また、通常物質ではありえないが、このエバネッセント波も伝搬できるような媒質が存在する場合にはこの「回折限界」(解像度)は存在しないことが期待される(実際、後節で述べるような負の屈折率物質、NIMを利用するとエバネッセント波も伝送可能になる)。

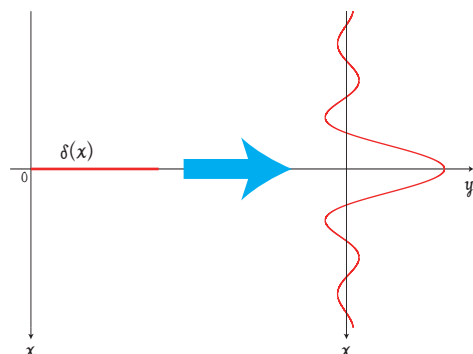


図1  $\delta(x)$  の波による伝送

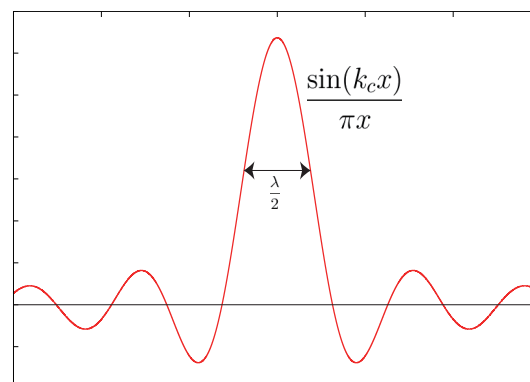


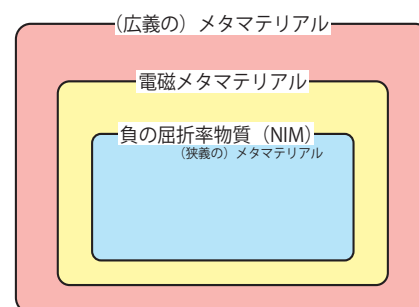
図2 伝送された後の関数  $f_{\text{cut}}(x)$

## 2 メタマテリアル

### 2.1 メタマテリアルとは何か?

まずは、メタマテリアルは何か? という話から始めることにしよう。

定義から言えば、メタマテリアルとは「光を含む電磁波や音、水面波などの波に対して自然界の物質では考えられないような特異な応答を示す人工物質のこと」である。この中でも特に、電磁波に対して特殊な応答を示すものを電磁メタマテリアルと呼ぶ。さらにその中でも、負の屈折率を持つ物質をそのまま、負の屈折率物質、もしくは英語表記 Negative Index Material の頭文字をとって NIM と呼んだりする。世間一般には、電磁メタマテリアルや NIM のことを指してメタマテリアルということが多いようであるが、ここではメタマテリアルの定義はあくまで、「波動一般」に対するものであるとして、以下の議論を進める。



### 2.2 NIM と負の屈折

ここからは、電磁メタマテリアルの中でも最も有名と思われる負の屈折率物質、NIM について紹介することにする。前節でも述べたが、NIM はその名の通り負の屈折率を持つ物質のことで、真空中から入射した電磁波に対して界面で電磁波のエネルギーの流れを示すベクトル量、ポインティングベクトル(電磁波の進行方向と考えても良い)がくの字型に折れ曲がるような動作をする人工物質である。右図では、真空中から NIM 中に入射した光のポインティングベクトルの向きを実際に示した。

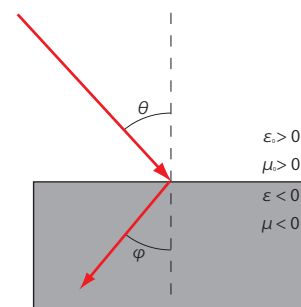


図3 NIM に入射した光の屈折

この物質は電磁気学において物質が持つ物理量である誘電率  $\epsilon$  と透磁率  $\mu$  を同時に負の値にすることで達成される。通常物質のみを考



えている一般の電磁気学においては屈折率  $n$  は上の誘電率  $\varepsilon$  と透磁率  $\mu$  を用いて（真空中での誘電率、透磁率はそれぞれ  $\varepsilon_0, \mu_0$  とした）

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} \quad (16)$$

と与えられるが、これは  $\varepsilon, \mu$  がともに負の値をとるような場合も考えると、

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}} \quad (17)$$

と表すのが適切であることが、以下のような  $z$  方向の単色平面波を考えることでわかる（時間依存性を  $e^{i\omega t}$  とした）。

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (E_x, 0, 0)e^{i\omega t} \\ \vec{H} &= (0, H_y, 0)e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (18)$$

これに対して Maxwell 方程式を適用すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} E_x &= i\omega\mu H_y \\ \frac{d}{dz} H_y &= i\omega\varepsilon E_x \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 $\xi_{\pm} = E_x \pm \sqrt{\mu/\varepsilon} H_y$  として (19) を解くと

$$\frac{d}{dz} \xi_{\pm} = \pm i\omega(\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\mu})\xi_{\pm} \quad (20)$$

となり、この方程式の解は  $\xi_{\pm}(z) = \xi_{\pm}(0)e^{\pm ikz}$  と求まり、波数と周波数との間の分散関係は

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\mu} = \omega n/c = \omega/c' \quad (21)$$

と決まる（ $c$  は真空中の光速、 $c'$  は考えている媒質中の光の位相速度である）。これにより、 $\varepsilon < 0, \mu < 0$  の媒質中では  $k, n, c'$  が負の値をとることがわかる。また、屈折角  $\varphi$  が入射角  $\theta$  と屈折率  $n$  を用いて、

$$n = \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \quad (22)$$

と与えられることを思い出すと、確かに光は図 3 のように屈折することが分かる。

## 2.3 応用例 ~ 透明マント

前節ではかなり特殊なケースについて話をしたが、屈折率を操ることで物質中での光の伝搬を制御することができることは理解して頂けたと思う。これをうまく利用すると、今まで実現不可能であったことができるようになる。ここではその一例、応用例として「透明マント」について紹介する。<sup>\*4</sup>

この透明マントのアイデアの基にあるのは、Maxwell 方程式が座標変換に対して不変に保たれるという事実である。Maxwell 方程式

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho, & \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{j} \end{aligned} \quad (23)$$

<sup>\*4</sup> この透明マントは NIM を利用した応用例というわけではないが、メタマテリアルという物質を作ることで初めて考えることが可能になったものであるため、ここであげておく。

とその構成方程式

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}\end{aligned}\quad (24)$$

が与えられたとき、 $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x'_1, x'_2, x'_3)$  という座標変換によって方程式系は

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{B}' = 0, \quad \vec{\nabla}' \times \vec{E}' + \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = 0 \quad (25)$$

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{D}' = \rho', \quad \vec{\nabla}' \times \vec{H}' - \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t} = \vec{j}' \quad (26)$$

及びに、

$$\vec{D}' = \varepsilon' \vec{E}' \quad (27)$$

$$\vec{B}' = \mu' \vec{H}' \quad (28)$$

と変換され、元の系との対応関係として、

$$\varepsilon' = \frac{J\varepsilon {}^tJ}{|J|} \quad (29)$$

$$\mu' = \frac{J\mu {}^tJ}{|J|} \quad (30)$$

が成り立つ。ここで  $J$  は変換により定まるヤコビアンであり、 $J_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$  をみたす行列である。また、ここでは  $\varepsilon, \mu$  も単なる定数ではなく、2階のテンソル（行列）として考えている。

Maxwell 方程式が座標変換に不変であることから、もとの系として一般的な空間（真空）を考え、そこから一部分に座標変換を行い、それぞれの座標変換に対応した  $\varepsilon', \mu'$  を決めることで、変換後の系では光は直進しないが、変換を受けなかった部分から見ると直進しているかのような状況を作り出すことができる。

これだけだと甚だ分かりにくいので、座標変換の一例として、

$$r' = \begin{cases} a + r \frac{R_2 - R_1}{R_2} & (0 \leq r \leq R_2) \\ r & (r > R_2) \end{cases}, \quad \theta' = \theta, \quad \phi' = \phi \quad (31)$$

を考える ( $R_1, R_2$  は  $R_2 > R_1 > 0$  をみたす定数である)。また、便宜上座標系を極座標でとった。デカルト座標との関係は

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \sin \phi \\ y = r \sin \theta \cos \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (32)$$

である。この場合には誘電率、透磁率として

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{r'} &= \mu'_{r'} = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \frac{(r' - R_1)^2}{r'} \\ \varepsilon'_{\theta'} &= \mu'_{\theta'} = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \\ \varepsilon'_{\phi'} &= \mu'_{\phi'} = \frac{R_2}{R_2 - R_1}\end{aligned}\quad (33)$$

とすれば不変な関係式が得られる。

ポイントは、座標変換後に  $(r, \theta, \phi)$  から変換されていない領域  $r < R_1$  が生じているにも関わらず、座標変換を受けていない領域  $r > R_2$  では光が直進しているように（まるでそこには  $r < R_1$  などという領域は存在していないかのように）見えることである。

わかりやすいように図4に光の道筋を示した。<sup>\*5</sup> $r < R_1$ の領域に光が侵入できないにもかかわらず、 $r > R_2$ の領域では真空中であるかのように、光が直進していることが分かるであろう。

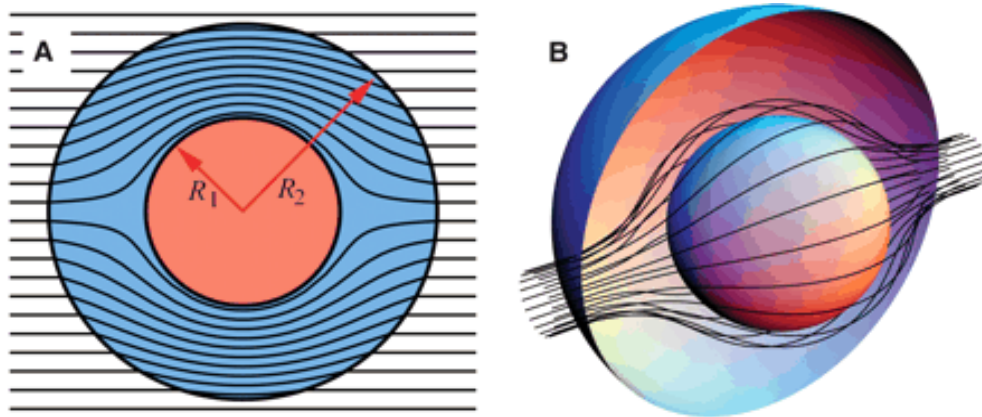


図4 透明マントを進む光

## 2.4 応用例続 ~スーパーレンズ(完全レンズ)

負の屈折率物質 NIM を使うと平板のレンズを作ることができる。これを次の応用例としてあげることにする。この平板レンズは「完全レンズ」もしくは「スーパーレンズ」などと呼ばれる。<sup>\*6</sup>一目見て、このレンズが通常のレンズと異なっている点を列挙してみると

1. 通常のレンズがレンズの外に焦点(光の集まる点)を1つだけ持つのに対して、スーパーレンズは(レンズとして働く場合には)必ずレンズ内外に1つずつ焦点を持つ。
2. 通常のレンズが一定の値の焦点距離を持つのに対して、スーパーレンズの焦点距離はおかれた物体の距離(とレンズ自体の厚さ)に依存した焦点距離を持つ。実際、物体とスーパーレンズの間の距離を  $z$ 、スーパーレンズの厚さを  $d$  とすると焦点距離は  $d - z$  で与えられる。
3. 上記に加えて、物体とレンズの間の距離がレンズ自体の厚さよりも大きい場合 ( $z > d$ ) にはスーパーレンズはレンズとして機能しない(集光できない)。

くらいであろう。

では、このレンズの何が「完全」で「スーパー」なのか?それは、前章で述べたようにスーパーレンズがエバネッセント波を伝搬できるからである。

例えば、レンズの外を真空  $n = 1$ 、レンズを  $n = -1$  ( $\epsilon = -\epsilon_0$ ,  $\mu = -\mu_0$ ) の NIM でできた物質だと考えた場合、真空とレンズの境界面を  $xy$  平面であるとして(光は  $z$  方向に伝わるとして)

- 真空からレンズ内に入射した伝搬波  $Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$   
 $\Rightarrow$  光の伝わる方向の波数ベクトルの向きが逆の  $Ae^{i(k_x x + k_y y - k_z z - \omega t)}$  となってレンズ内部を伝わる。
- 真空中からレンズ内に入射したエバネッセント波  $Ae^{-\kappa z + i(k_x x + k_y y - \omega t)}$   
 $\Rightarrow$  先ほどと同様に  $z$  方向の波数の正負が反転した波  $Ae^{+\kappa z + i(k_x x + k_y y - \omega t)}$  となってレンズ内部を伝わる。

\*5 図4は文献[2]より転載した。

\*6 以後、スーパーレンズで統一する。

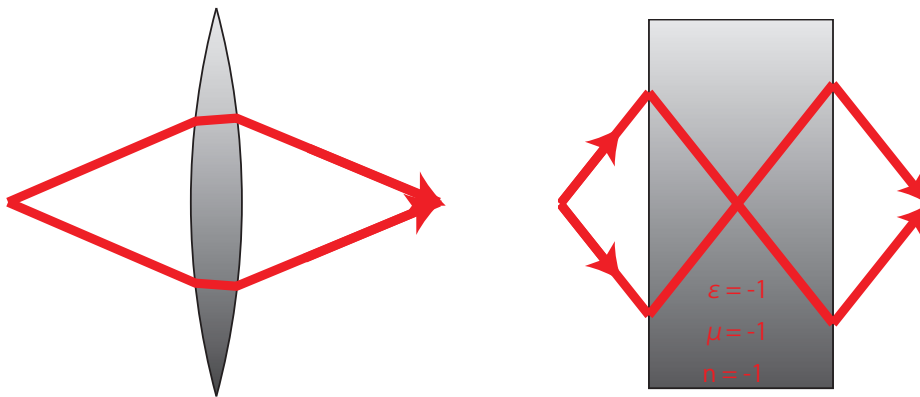


図5 通常のレンズと NIM を使ったレンズ（スーパーレンズ）の光路の違い

となることが計算によりわかる（計算するためには、真空とレンズの間の境界条件と Maxwell 方程式を電磁波に課せば良い）。\*7さらに、計算を進めていくとレンズから真空中に出た場合の伝搬波、エバネッセント波の振幅や位相の変化も計算できて、その結果として焦点では伝搬波もエバネッセント波も完全に（振幅を変えることも位相差を生じることもなく）集光されることが分かる。これをもって「完全」と言われるのである。\*8

### 3 電気回路と電磁波・電磁メタマテリアル

#### 3.1 電気回路にできること

電気回路を波の伝わる媒質、電流もしくは電圧を波と見なすことで、電気回路を用いて通常の物質が示すような様々な波動現象をシミュレーションすることができる。

電気回路を用いると良い点は、回路が持つ多彩な自由度をうまく利用してやることで通常の物質、波では作ることが難しいメタマテリアルを簡単に再現することができる点である。例えば、水面波の伝搬を決める物理量として、液体の密度があるがこの値は精々、 $10^2 \sim 10^5 [\text{kg}/\text{m}^3]$  であるが、回路に含まれる抵抗などは  $10^{-3} \sim 10^7 [\Omega]$  の非常に広い範囲の値をとることができる。

次節からより詳細に、どんな波動現象を再現できるのか、具体的にいくつかの回路について考えていくことにする。

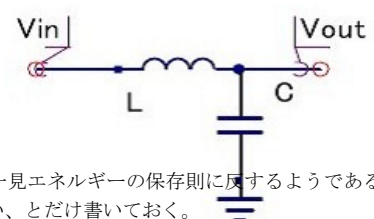
#### 3.2 実際の回路一例

ここからは実際にいくつかの回路について考えてみよう。

##### 3.2.1 同軸ケーブル

まず初めに考えるのは、送電線（同軸ケーブルなどを考えればよい）を離散化した図6のような回路である。

図の左側から、電圧、電流がそれぞれ  $V_{\text{in}} = Ve^{i\omega t}$ ,  $I_{\text{in}} = Ie^{i\omega t+i\delta}$  が入ってくるときに図の右端で output、 $V_{\text{out}}$ ,  $I_{\text{out}}$  がどうなるかを考察する。容量が  $C$  のキャパシターに溜まる電荷を  $Q$  で示すことにす



\*7 これを見ると、スーパーレンズはレンズ内でエバネッセント波を“増幅”していて、一見エネルギーの保存則に反するようであるが、そもそもエバネッセント波はエネルギーの伝搬には寄与しないので問題にならない、とだけ書いておく。

\*8 詳細な計算、証明は文献 [3] を参照のこと。

図6 離散化された同軸ケーブル

ると、

$$V_{\text{out}} = \frac{Q}{C}, \quad I_{\text{in}} = I_{\text{out}} + \dot{Q}, \quad V_{\text{in}} = V_{\text{out}} + L \frac{dI_{\text{in}}}{dt} \quad (34)$$

が成立する。これらから、 $V_{\text{out}}$ ,  $I_{\text{out}}$  を  $I$ ,  $V$  などを用いて表すと

$$\begin{cases} I_{\text{out}} = I_{\text{in}} - C\dot{V}_{\text{in}} + CL\ddot{I}_{\text{in}} = [(1 - CL\omega^2)Ie^{i\delta} - i\omega CV] e^{i\omega t} \\ V_{\text{out}} = V_{\text{in}} - LI_{\text{in}} = (V - i\omega LIe^{i\delta})e^{i\omega t} \end{cases} \quad (35)$$

これで、 $V_{\text{out}}$  と  $I_{\text{out}}$  が求められたわけだが、 $\delta$  の不定性が残っている。これは  $V_{\text{out}}$ ,  $I_{\text{out}}$  に周期境界条件を課すことで、消すことができる。すなわち同軸ケーブル中を電圧、電流が位相差や波形を変えることなく伝搬することを仮定して、

$$\frac{V_{\text{in}}}{I_{\text{in}}} = \frac{V_{\text{out}}}{I_{\text{out}}} \implies e^{i\delta} = \frac{CV}{2I} \left[ -i\omega \pm \sqrt{\frac{4}{CL} - \omega^2} \right] \quad (36)$$

ここで  $|e^{i\delta}| = 1$  なので、 $4/CL > \omega^2$  として\*9

$$\left( \frac{CV}{2I} \right)^2 \left( +\omega^2 + \frac{4}{CL} - \omega^2 \right) = 1 \implies CV^2 = LI^2 \quad (37)$$

したがって  $1/\sqrt{CL} = \omega_0$  として

$$\delta = \pm \arctan \frac{\omega}{\sqrt{4\omega_0^2 - \omega^2}} \quad (38)$$

最後に、 $C$ ,  $L$  を単位長さ当たりの量  $C_1$ ,  $L_1$  で置き換えてやると、(この際に1回路あたりの位相のずれ  $\delta$  は  $n$  回路を通した後のことを考えることで、 $\delta n \rightarrow kx$  と変換される) 離散化された同軸ケーブルの分散関係が得られる。

$$V_{\text{in,out}}, I_{\text{in,out}} \propto e^{i(\omega t \pm kx)} \quad (\text{with } k = \arctan \frac{\omega}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}) \quad (39)$$

特に  $k, \omega \rightarrow 0$  の極限をとると (これは離散化されていた同軸ケーブルの連続極限をとることに対応する)

$$c' = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{\omega=0} = \frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}} \quad (40)$$

となる。同軸ケーブルの場合にはこの  $c'$  は同軸ケーブルの中に入っている誘電体中での光速  $c/n$  に等しい (ただし  $n$  は誘電体の屈折率)。

### 3.2.2 遅延回路

次に、図7のような回路を多数つなげて作った伝送路を考えることにする。

ここでは後々のため、伝送路に含まれる抵抗値について  $R_1 = R_2 = R'$  という条件を課す。また、先ほどと同様に、入力電圧に関しては  $V_{\text{in}} = V \exp(i\omega t)$  とする。 $R$ ,  $R_1$  に流れる電流を  $I_1$ ,  $I_2$ 、 $R_2$ - $R_1$  間、 $R$ - $C$  間の電圧をそれぞれ  $V_1$ ,  $V_2$ 、 $C$  に溜まる電荷を  $Q$  として、以下の等式が成り立つ。

$$V_{\text{out}} = A(V_2 - V_1) \quad (41)$$

$$V_1 = V_{\text{in}} - I_1 R' = V_{\text{out}} + I_1 R' \quad (42)$$

$$V_2 = \frac{Q}{C} = V_{\text{in}} - I_2 R \quad (43)$$

$$\dot{Q} = I_2 \quad (44)$$

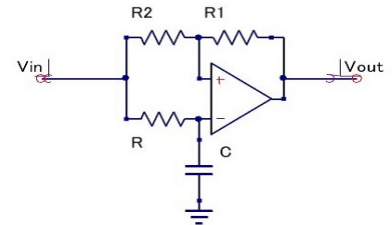


図7 遅延回路

\*9 後々、同軸ケーブルに持っていくために回路の大きさ (長さ)  $\Delta x$  を0に近づけていく。この極限で  $C/\Delta$ ,  $L/\Delta$  が有限の値にとどまるはずであるから  $C, L \rightarrow 0$  がわかる。よって、回路の大きさを十分に小さくすれば  $4/CL > \omega^2$  が成り立つ。

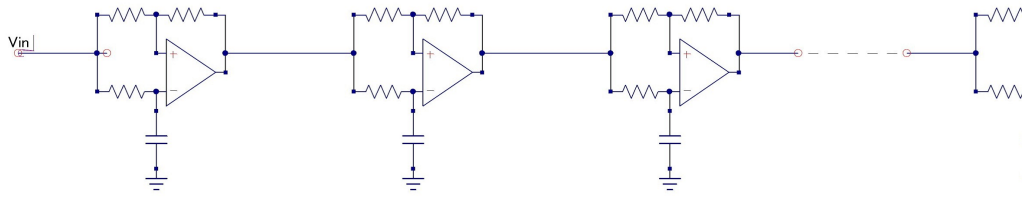


図8 多段階遅延回路

ここで、 $A$  はオペアンプの増幅率であり、 $A \gg 1$  を満たすものとした。

これらを解くと、

$$V_2 = \frac{V}{1 + i\omega CR} e^{i\omega t} \quad (45)$$

$$\therefore V_{\text{out}} \simeq \frac{1 - i\omega CR}{1 + i\omega CR} V e^{i\omega t} = V e^{i(\omega t - \theta)} \quad (46)$$

ただし、 $|\frac{1 - i\omega CR}{1 + i\omega CR}| = 1$  であるから、 $\theta = \arctan \frac{2\omega CR}{1 + (\omega CR)^2}$  とおいた (おける)。これより、この回路が  $n$  個つながっている場合 (図8) には  $V_{\text{out}} = V e^{i(\omega t - n\theta)}$  となる。これを連続的な媒質と比較することで (平面波に対して (波動)  $\propto e^{i(\omega t - kx)}$  であるが、現在  $x \leftrightarrow n$ ,  $k \leftrightarrow \theta$  と対応する) 離散化された回路の分散関係として、

$$k = \arctan \frac{2\omega CR}{1 + (\omega CR)^2} \simeq \frac{2\omega}{\omega_0} \quad (47)$$

が得られる。

したがってこの回路は十分に低周波の電流 (電圧) を入れた場合には、ほぼ線形な分散関係を媒質とみなすことができる。

### 3.3 今回の実験結果

今回は、前節であげた遅延回路 (図7) を実際に使って導波路 (2次元なので路ではないかもしれない) を作成した。縦、横に前節であげた遅延回路を複数個つなぎ、格子状にすることで擬似的に2次元の系を実現することにした。結果については、動画として見てもらった方が分かりやすいと思われるので、そちらを参照のこと。分散関係を見ればわかるように回路 (導波路全体) の伝搬は抵抗値  $R$  とコンデンサー  $C$  の値のみで決まる。特に低周波の極限では、その積  $CR$  と電流・電圧の伝搬する速さが比例するという結論が得られる。

今回は、二つの物質間で電流・電圧が屈折する様子を再現するためにこの定数  $CR$  を回路の各部で変化させ、屈折を再現することにした。これについても動画を参照のこと。

## 4 音響メタマテリアル

電磁波でスーパーレンズと呼ばれていたメタマテリアルを実際に制作することは難しい。<sup>\*10</sup>ここでは電磁波の代わりに音波を用いてスーパーレンズを作成し、これについて、先述の「回折限界」を超えた解像度が得られるか調べることにした。<sup>\*11</sup>

<sup>\*10</sup> なぜ難しいのか詳しく語ることはしないが…。

<sup>\*11</sup> これについては2次元の像を伝搬する実験が J. Zhu, et al によって行われており、それを再現したものとなっている。詳しくは [5] を参照のこと。

## 4.1 音響メタマテリアル製作

実際の音響メタマテリアル製作は以下のような手順による。

1. 実際に作成する音響メタマテリアルの大きさ、形状、入れる音波の波長を決める。
2. シミュレーションソフトを使って実際に作る音響メタマテリアルの動作を確認する。
3. 実際に制作する。
4. 動作を確認し、解析を行う。

それぞれについて若干の説明をしておく。

2. についてはシミュレーションソフトとしてマルチフィジックスシミュレーション (連成解析) ソフトウェア、COMSOL を利用した。このソフトは音波だけでなく、電磁波や熱の伝搬など、2 階の偏微分方程式で書けるような物理現象ならば、どんなものでもシミュレーションできるので、勿論今回作成したメタマテリアルについてもこれを用いてシミュレーションすることができた。

3. については、東京大学の工学部物理工学科の工作室にある放電加工機を用いて金属の加工、実際の音響メタマテリアルの制作を行った。放電加工機は簡単に説明すれば、金属のワイヤーに電流を流して発生する熱を利用して銅やステンレスなどの金属を切断する機械で、 $1[\mu\text{m}]$  単位の精密な加工が可能なのが特長である。

## 4.2 今回の実験結果

今回作成した、音響メタマテリアルの写真を図 9 に示す。さらに、これを前面 (音波を入射、検出する面) で切った断面図を図 10 に与える。奥行き方向には  $50[\text{mm}]$  の大きさがあり、前面から入射した音波はそれぞれの導波路を通して反対側の面で検出される。

つまり、実験系は図 11 のようになっている。図中の遮蔽板には 2 箇所直径  $2[\text{mm}]$  の穴が開けられており、スピーカーから出た音はこの穴からのみ、出ているものと近似できる。

また、測定するには検出器を図のようにメタマテリアルの後面に当て、左右に動かすことで行った。検出器は極小のマイクロフォンと電気回路からできており、マイクロフォンが検出した音波は電圧に変換され、最終的にオシロスコープ (図 12) を用いて電圧の強度として取り出される。

よって音波の強度 (音の圧力) は直接にはわからないが、電圧の強度と音波の強度の間にはほとんど比例関係が成り立つことが予想されることと、今回の実験では解像度を調べたい (音の強度の最大となる点を読み取れば良い) ので、問題にならない。

実験結果として、 $3.3[\text{kHz}]$  の音波を入れた際にマイクロフォンが検出した音波の強度分布を図 13 に示す。グラフは横軸が測定した位置  $x[\text{mm}]$ 、縦軸がオシロスコープでみた電圧の強度  $V[\text{mV}]$  である。また、グラフ中の赤い線は音響メタマテリアルが存在する場合の分布を、青い線は存在しない場合の分布を与えている。これを見ると、確かに音響メタマテリアルの存在する場合のみ、音波の 2 つの頂点が見えていることがわか

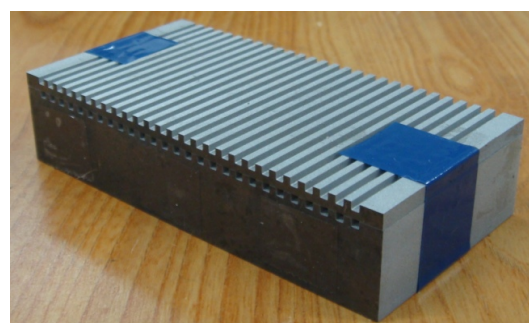


図 9 実際に作成した音響メタマテリアル

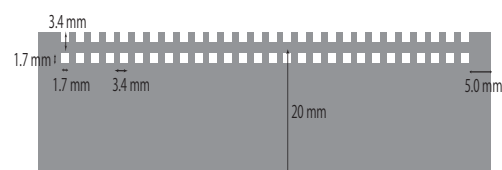


図 10 音響メタマテリアルの断面図



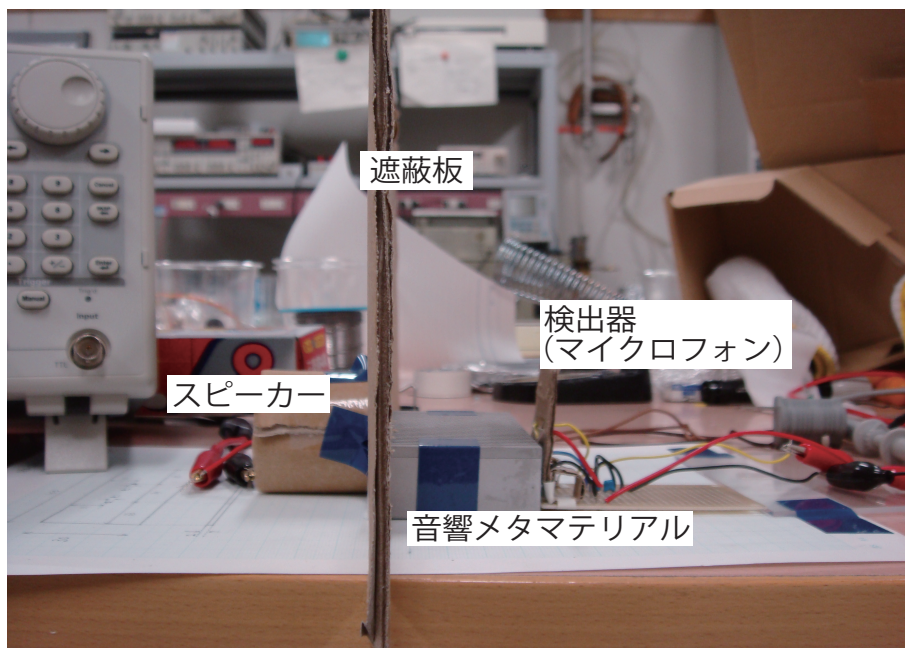


図 11 音響メタマテリアル・実験系

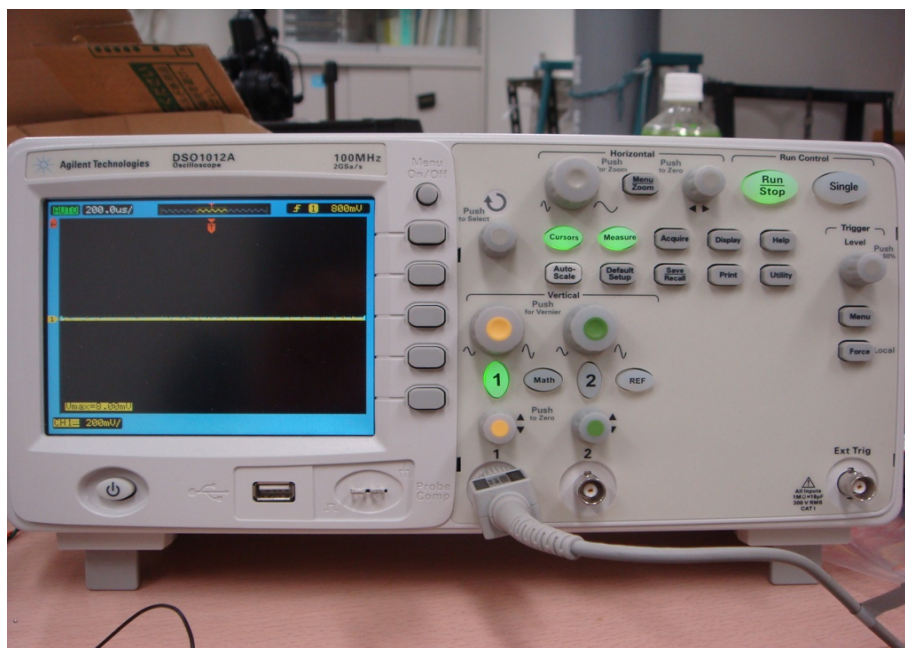


図 12 実験に用いたオスロスコープ

る。ちなみに当然のことではあるが、これらの2つの頂点は前面で音を入射した点と一致していた。今回は、3.3[kHz]の音波を使っているので、これを波長に換算すると $\lambda = 104[\text{mm}]$ となる。グラフを見ればわかるが、今回見分けることのできた2点間の距離は34[mm]であり、波長よりも明らかに小さい。これにより、この音響メタマテリアルが回折限界を超えた解像度を得ることのできる、音波におけるスーパーレンズとして機能していることが分かった。



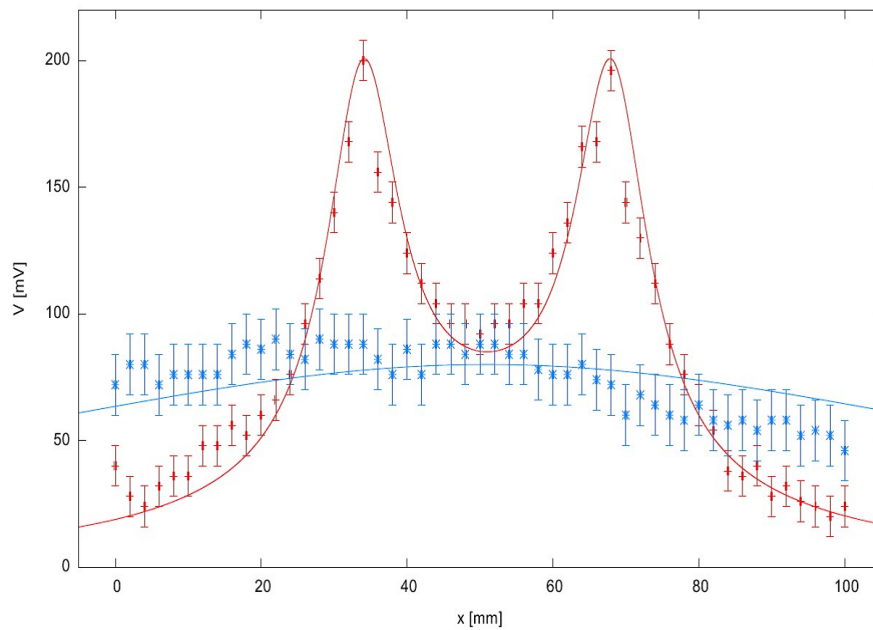


図 13 実験結果のグラフ一例

## 5 終わりに

計画立案から実験を実際に行うまで、東京大学大学院工学系研究科付属の光量子科学センターの皆様、特に田丸博晴特任講師には大変お世話になりました。この場で御礼申し上げます。

## 参考文献

- [1] 石原照也監修 “メタマテリアル —最新技術と応用—”, 2007年 シーエムシー出版
- [2] J. B. Pendry, et al. 著 “Controlling Electromagnetic Fields”, 2006年 Science 312 p1780-p1782
- [3] J. B. Pendry 著 “Negative Refraction Makes a Perfect Lens”, 2000年 Physical Review Letters 84 p3966-p3969
- [4] 北野正雄, 中西俊博著 “光の異常な伝搬を電気回路でシミュレートする”, 2006年 日本物理学会誌 61 p758-p765
- [5] J. Zhu, et al. 著 “A holey-structured metamaterial for acoustic deep-subwavelength imaging”, 2010年 nature physics 7 p52-p55