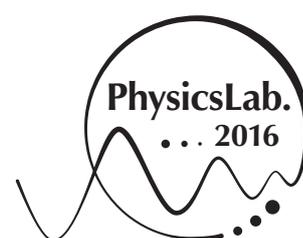


PhysicsLab. 2016

真空ゆらぎ班

真空の不思議 ～Casimir 効果～



はじめに

真空ゆらぎ班では、真空の不思議な現象の一つである Casimir 効果についての実験を行ってきました。五月祭当日は、実験装置の説明を中心として発表をする予定ですが、その関係上 Casimir 効果そのものの理論的な背景について詳しく触れることが出来ません。

本稿では、初歩的な量子力学から初めてその Casimir 効果の導出までを記すことにいたしました。

目次

第 1 章	調和振動子の量子化	4
第 2 章	電磁場の量子化	8
第 3 章	Casimir 効果の導出	10

第 1 章

調和振動子の量子化

調和振動子 (Harmonic Oscillator) とは、古典的にはばねに繋がれた質点のことである。質点には抵抗力などの外力が加わっていないとすると、Newton の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (1.1)$$

となる。一般解は良く知られているように、 C_1 , C_2 を定数として

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}, \quad (1.2)$$

という単振動解である。ただし、

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.3)$$

は角振動数である。

調和振動子の運動方程式 (1.1) は良く知られた式であるが、他にも Lagrange 形式や Hamilton 形式の方程式に書き換えることが出来る。この後、調和振動子を消滅生成演算子を用いて量子化するため、調和振動子の Hamiltonian について述べておく。

よくある手続きとしては、まず Lagrangian を求めてから Legendre 変換によって Hamiltonian を求めるというものである。調和振動子の場合、ポテンシャル U は

$$U = \frac{1}{2} kx^2 \quad (1.4)$$

の形をとるため、Lagrangian L は

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \quad (1.5)$$

となる。座標 x に共役な運動量 p は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (1.6)$$

である。したがって、 (x, \dot{x}) から (x, p) への Legendre 変換を行えば、Hamiltonian H は

$$\begin{aligned} H &= p\dot{x} - L \\ &= \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} kx^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

となることがわかる。角振動数 ω を用いれば

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad (1.8)$$

とも表せる。

Dirac の正準量子化法では、古典的な正準変数 (x, p) を、正準交換関係

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar, \text{他は } 0 \quad (1.9)$$

に置き換えることで量子化が行われる。 $\hat{\cdot}$ が付いているのは演算子ということを明示するためである。ここからは、 (x, p) の線形結合として得られる消滅生成演算子を用いて、Hamiltonian がどのように書き換えられるかを見ていく。

さて、式 (1.8) を次のように変形してみることを考える。¹⁾

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \\ &= \frac{m\omega^2}{2} \left(x^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2} \right) \\ &= \frac{m\omega^2}{2} \left(x - i\frac{p}{m\omega} \right) \left(x + i\frac{p}{m\omega} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

さらに、変数 a と a^\dagger を

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + i\frac{p}{m\omega} \right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - i\frac{p}{m\omega} \right) \quad (1.11)$$

と定義する。単純に考えれば、この a と a^\dagger を使って

$$H = \hbar\omega a^\dagger a \quad (1.12)$$

となるはずである。しかしながら、量子化をすると変数 x と p (あるいは a と a^\dagger) は演算子となるため、これは正しくはない。正準交換関係 (1.9) に注意して式 (1.12) の右辺を計算してみると

$$\begin{aligned} \hbar\omega a^\dagger a &= \hbar\omega \frac{m\omega}{2\hbar} \left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega} \right) \left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega} \right) \\ &= \hbar\omega \frac{m\omega}{2\hbar} \left(\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{m^2\omega^2} + \frac{i}{m\omega} [\hat{x}, \hat{p}] \right) \\ &= \hbar\omega \frac{m\omega}{2\hbar} \left(\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{m^2\omega^2} \right) + \hbar\omega \frac{i}{2\hbar} \cdot i\hbar \\ &= \hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega \end{aligned} \quad (1.13)$$

のようになる。よって

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (1.14)$$

が正しい計算結果となる。

このように Hamiltonian を書き換えたとき、演算子 \hat{a} を消滅演算子、 \hat{a}^\dagger を生成演算子と呼ぶ。これらは Hermit 共役の関係にあるが、Hermit 演算子ではない。

Hamiltonian を消滅・生成演算子を用いて書きなおしたところで、次に演算子自身の性質について調べてみる。まず、これらの交換関係を計算すると、式 (1.9) と (1.11) から

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left[\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}, \hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega} \right] \\ &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left(-\frac{i}{m\omega} [\hat{x}, \hat{p}] + \frac{i}{m\omega} [\hat{p}, \hat{x}] \right) \\ &= \frac{1}{2\hbar} \left(-\frac{i}{m\omega} \cdot i\hbar + \frac{i}{m\omega} \cdot i\hbar \right) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (1.15)$$

と求まる。また、Hamiltonian の形を見てみると、 $\hat{a}^\dagger a$ という項が入っているので、それを \hat{N} とおく。 \hat{N} 以外の項は単なる定数であるから、Hamiltonian の固有値を求めるには、 \hat{N} の固有値が分かれば充分である。そこで \hat{N} の固有値 n に対する固有状態を $|n\rangle$ とすると

$$\hat{N} |n\rangle = n |n\rangle \quad (1.16)$$

¹⁾ この一連の変形では、変数 x , p を演算子とはみなしていないので注意。

である。演算子 \hat{N} は Hermit 演算子となっているから、固有値 n は実数である。

議論を進めるために、 \hat{N} と \hat{a} あるいは \hat{a}^\dagger との交換関係を求めておく。式 (1.15) から

$$\begin{aligned} [\hat{N}, \hat{a}] &= \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ &= \hat{a}^\dagger \hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) \hat{a} \\ &= -\hat{a} \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] &= \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ &= \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ &= \hat{a}^\dagger \end{aligned} \quad (1.18)$$

となることがわかる。これらの関係式を用いると、次のことがわかる。 \hat{N} の固有値 n の固有状態 $|n\rangle$ に \hat{a} を作用させた状態について

$$\begin{aligned} \hat{N}(\hat{a}|n\rangle) &= (\hat{a}\hat{N} - \hat{a})|n\rangle \\ &= (n\hat{a} - \hat{a})|n\rangle \\ &= (n-1)\hat{a}|n\rangle \end{aligned} \quad (1.19)$$

が成り立つ。つまり、 $\hat{a}|n\rangle$ の固有値は $n-1$ ということであるから、適当な定数 C_- を使って

$$\hat{a}|n\rangle = C_-|n-1\rangle \quad (1.20)$$

と書ける。同様に、 $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ についても計算をすると

$$\begin{aligned} \hat{N}(\hat{a}^\dagger|n\rangle) &= (\hat{a}^\dagger\hat{N} + \hat{a}^\dagger)|n\rangle \\ &= (n\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger)|n\rangle \\ &= (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle \end{aligned} \quad (1.21)$$

となる。すなわち、 $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ の固有値は $n+1$ ということの意味している。こちらも定数 C_+ を用いて

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = C_+|n+1\rangle \quad (1.22)$$

と書ける。

2つの定数を求めておく。

$$\begin{aligned} |C_-|^2 &= |C_-|n-1\rangle|^2 \\ &= |\hat{a}|n\rangle|^2 \\ &= \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle \\ &= \langle n|\hat{N}|n\rangle \\ &= n \\ \therefore C_- &= \sqrt{n} \end{aligned} \quad (1.23)$$

同様に

$$C_+ = \sqrt{n+1} \quad (1.24)$$

となる。したがって、

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (1.25)$$

が成立する。

これらの結果から、固有値 n には下限があることが示せる。

$$\begin{aligned} n &= \langle n | n | n \rangle \\ &= \langle n | \hat{N} | n \rangle \\ &= |\hat{a} | n \rangle|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

つまり、固有値は 0 以上をとることがわかる。この状態を $|0\rangle$ とする。 $|0\rangle$ は、消滅演算子 \hat{a} によって固有値をそれ以上上げることが出来ないから

$$\hat{a} |0\rangle = 0 \quad (1.27)$$

である。 $|0\rangle$ を真空という。真空に生成演算子 \hat{a}^\dagger を作用させると、先ほどの計算から

$$\hat{a}^\dagger |0\rangle = |1\rangle \quad (1.28)$$

のように、固有値 1 の状態となる。これを繰り返していくと、固有値が $2, 3, \dots, n, \dots$ の状態を次々と得ることが出来る。つまり、 \hat{N} の固有値は全て整数であることがわかった。 $|0\rangle$ に \hat{a}^\dagger を n 回作用させた状態は $|n\rangle$ となるから、 $|n\rangle = C_n (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$ となるような定数 C_n を求めておく。

$$1 = |C_n|^2 |(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle|^2 \quad (1.29)$$

より

$$\begin{aligned} \frac{1}{|C_n|^2} &= |(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle|^2 \\ &= \langle 0 | \hat{a}^n (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \\ &= \langle 0 | \hat{a}^{n-1} (\hat{a} \hat{a}^\dagger) |0\rangle \\ &= \frac{1}{|C_{n-1}|^2} \langle n-1 | (\hat{N} + 1) |n-1\rangle \\ &= \frac{n}{|C_{n-1}|^2} \\ \therefore |C_n|^2 &= \frac{|C_{n-1}|^2}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{|C_{n-2}|^2}{n-1} = \dots = \frac{|C_0|^2}{n!} \end{aligned}$$

ここで、 $C_0 = 1$ であることを使えば

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \quad (1.30)$$

となる。よって

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (1.31)$$

を得た。

以上から、 $|n\rangle$ を粒子が n 個ある状態とみなすと、 \hat{a} は粒子を 1 つ消滅させ、 \hat{a}^\dagger は粒子を 1 つ生成するという意味を持っていることがわかる。さらに、真空 $|0\rangle$ は粒子が 1 つもない状態を指しているとみなせる。途中で定義した $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ は、 $|n\rangle$ の固有値、つまり粒子の個数を返す演算子であることから、数演算子と呼ばれている。

最後に、エネルギー固有値を求めておこう。 $\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)$ であるから、 $|n\rangle$ のエネルギー固有値 E_n は

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (1.32)$$

となる。注目すべきは、 $n = 0$ の真空において、エネルギーが

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega \quad (1.33)$$

と有限になっている事である。これを零点エネルギーというが、量子力学における不確定性関係の 1 つの表れである。

第 2 章

電磁場の量子化

前章では調和振動子の量子化を扱った。ここからは、少し発展的な内容にはなるが、電磁場の量子化を考えることにする。すぐにわかることではあるが、電磁場とは、無限個の調和振動子が集まったものとみなすことができ、それゆえ前章での議論を応用することが可能となっている。

まずは電磁場が従う方程式を確認しておく。電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{B} は Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (2.1d)$$

に従う。式 (2.1c) と (2.1d) により

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.2)$$

と電磁ポテンシャルを用いて電磁場を書き表すことが出来る。ただし、これらは gauge 変換

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \Lambda \quad (2.3b)$$

による不定性がある。ただし、 Λ は任意の (性質の良い) 関数である。上記の Maxwell 方程式を電磁ポテンシャル (ϕ, \mathbf{A}) を使って書き換えると、式 (2.1a) と (2.1b) より

$$\nabla \cdot \left(\nabla + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\rho \quad (2.4)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{j} \quad (2.5)$$

であるが、d'Alembertian

$$\square := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (2.6)$$

を用いれば

$$\square \phi - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = \rho \quad (2.7)$$

$$\square \mathbf{A} + \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = \mathbf{j} \quad (2.8)$$

と表すことが出来る。source が無い時について、Coulomb gauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ という条件をとる。この条件から、電磁波は横波となることがわかる。式 (2.7) より

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.9)$$

という Poisson 方程式が得られるが、無限遠で 0 になるという境界条件から、 $\phi \equiv 0$ なる解を得る。一方で、式 (2.8) よりベクトルポテンシャル \mathbf{A} の方程式は

$$\square \mathbf{A} = 0 \quad (2.10)$$

と波動方程式へと書き換えられることがわかった。今回は、体積が $V = L^3$ の箱に入っている場合を考えてみる。平面波 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ を用いて \mathbf{A} を Fourier 変換すると、 \mathbf{A} が実数であることから

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_r \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) (a_r(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_r^*(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) \quad (2.11)$$

となる。ここで、 $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$ で、 $\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{r})$ は偏極ベクトルを表している。ただし $\boldsymbol{\epsilon}_r(-\mathbf{k}) = -\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k})$ としておく。また、Maxwell 方程式から $k^2 = \omega_{\mathbf{k}}^2$ で、さらに Coulomb gauge の条件から $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}) = 0$ である。

さて、ここで式 (2.11) における展開係数 $a_r(\mathbf{k})$ を、調和振動子の場合と同様に生成消滅演算子とみなす。すなわち

$$[a_r(\mathbf{k}), a_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{rr'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (2.12a)$$

$$[a_r(\mathbf{k}), a_{r'}(\mathbf{k}')] = 0 \quad (2.12b)$$

$$[a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \quad (2.12c)$$

という代数関係を課す。これらをもとにして、電磁場のエネルギーの表式を計算してみる。

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.13a)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d^3x \quad (2.13b)$$

であることと、正準交換関係より

$$\mathcal{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_r \left(a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) \quad (2.14)$$

となることがわかる。これは、電磁場を無限個の独立な調和振動子が集まったものとして考えたことを意味している。前章で扱った調和振動子の量子化と同様に数演算子を

$$N_r(\mathbf{k}) = a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}), \quad (2.15)$$

その $n_r(\mathbf{k})$ 固有状態として

$$|n_r(\mathbf{k})\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_r(\mathbf{k})!}} (a_r^\dagger(\mathbf{k}))^{n_r(\mathbf{k})} |0\rangle \quad (2.16)$$

さらに一般的に

$$|\cdots n_r(\mathbf{k}) \cdots\rangle = \prod_{\mathbf{k}_i, r_i} |n_{r_i}(\mathbf{k}_i)\rangle \quad (2.17)$$

とすれば、エネルギー固有値は

$$E = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_r \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(n_r(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) \quad (2.18)$$

となる。

真空 $|0\rangle$ に対してそのエネルギーを求めてみると、常に $n_r(\mathbf{k}) = 0$ であるが

$$E_0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_r \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2} \quad (2.19)$$

のように、激しく発散してしまうことがわかる。

第 3 章

Casimir 効果の導出

前節の式 (2.19) でも見たように、場を量子化した場合、零点エネルギーは (2.19) のように発散してしまう。しかし、式 (2.19) からわかるように、零点エネルギーには周波数 ω が含まれているため、境界条件が変化すれば許される電磁場のモードが制限され、それに伴い零点エネルギーが変化する。変化量は有限の値になるが、それが Casimir 効果である。

一辺が L の導体板を距離 d だけ離して設置することを考える。導体板は xy 平面に対して平行に置かれているとする。 d が十分に大きい場合、零点エネルギー $E(d \rightarrow \infty)$ は

$$E(d \rightarrow \infty) = \hbar c \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \frac{d}{\pi} \int dk_x dk_y dk_z \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (3.1)$$

となる。ここで、分散関係 $\omega_k = c|\mathbf{k}|$ を用いた。一方で、 d が小さい場合、導体板上での境界条件から電場の x 成分と y 成分、さらに磁場の z 成分が 0 となる。よって z 成分の振動モードが制限されて

$$k_z = \frac{\pi n}{d} \quad (3.2)$$

を満たさなければならない。よって、零点エネルギーの方の計算も制限がかかり

$$E(d) = \hbar c \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \int dk_x dk_y \sum_n \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2} \quad (3.3)$$

となる。さて、これらの差

$$U(d) = E(d) - E(d \rightarrow \infty) \quad (3.4)$$

を評価してみる。 $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ と変数変換すると

$$U(d) = \hbar c \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \frac{\pi}{2} \int k dk \left[\sum_n \sqrt{k^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2} - \frac{d}{\pi} \int dk_z \sqrt{k^2 + k_z^2} \right], \quad (3.5)$$

$x = \frac{k^2 d^2}{\pi^2}$, $\kappa = \frac{k_z d}{\pi}$ とすれば

$$\begin{aligned} U(d) &= \hbar c \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{\pi^2}{2d^2} dx \left[\sum_n \frac{\pi}{d} \sqrt{x + n^2} - \int_0^\infty d\kappa \sqrt{k^2 + \frac{\pi^2}{d^2} \kappa^2} \right] \\ &= \frac{\pi^2 \hbar c}{4d^3} L^2 \int_0^\infty dx \left[\sum_n \sqrt{x + n^2} - \int_0^\infty d\kappa \sqrt{x + \kappa^2} \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

実際の金属では、プラズマ周波数 ω_p よりも高い周波数の電磁波は透過してしまうから、適当な cut-off 関数

$$f\left(\frac{\omega_k}{c}\right) = f(k) = \begin{cases} 1 & (k \ll \frac{\omega_p}{c}) \\ 0 & (k \gg \frac{\omega_p}{c}) \end{cases} \quad (3.7)$$

を用いて積分を評価する。

$$F(\kappa) = \int_0^\infty dx (x + \kappa^2)^{\frac{1}{2}} f\left(\left(\frac{\pi}{d}\right) (x + \kappa^2)^{\frac{1}{2}}\right) \quad (3.8)$$

なる関数 $F(\kappa)$ を定義すると

$$U(d) = \frac{\pi^2 \hbar c}{4d^3} L^2 \left[\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} d\kappa F(\kappa) \right] \quad (3.9)$$

となる。有限和を、積分で近似する Euler-Maclaurin 展開

$$\sum_{n=1}^{\infty} - \int_0^{\infty} F(\kappa) d\kappa = -\frac{1}{2} F(0) - \frac{1}{12} F'(0) + \frac{1}{720} F'''(0) + \dots \quad (3.10)$$

を利用する。

$$F(\kappa) = \int_{\kappa^2}^{\infty} du \sqrt{u} f\left(\frac{\pi}{d} \sqrt{u}\right), \quad u = \sqrt{x + \kappa^2} \quad (3.11)$$

だから、第3項のみが残って

$$U(d) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3} L^2 \quad (3.12)$$

となる。したがって、導体板間には

$$F = -\frac{\partial U}{\partial d} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^4} L^2 \quad (3.13)$$

という引力が働くことがわかる。以上が Casimir 効果の導出である。

導体板が $1 \mu\text{m}$ 離れて置かれているときに、単位面積あたりに働く力の大きさを見積もってみると

$$F = 1.6 \times 10^{-7} \text{ N/cm}^2 \quad (3.14)$$

と、とても小さい。どれくらい小さいかというと、蚊が受ける重力くらい小さい。

また、Casimir 効果は距離の4乗分の1に比例するため、導体板の距離が2倍になると、Casimir 効果による力の大きさは $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ となる。距離の変化によって、大きく値が変化することも Casimir 効果の特徴の一つである。