# 力学系入門

Physics Lab. 2020 生物物理班

2020 年 9 月 20, 21 日

この資料は基本的には高校数学（微積分など）を知っている人向けに書かれています。ただ、（助けになるかは自信ないですが）最初に微分の定義とそのイメージを書いておいたので、そうでない人もなんとなくは読めるのではないかと思っています。発展的な脚注（大学生や、大学の内容に触れたことのある高校生向け）には ♠ がつけてあるので、よくわからない人は飛ばしてもらって構いません。

## 1　力学系とは

### 1.1　微分とは

まず、微分を知らない人のために微分について少し説明する。関数 $x(t)$ の**導関数**（関数 $x(t)$ を微分したもの）とは、$t$ に対して極限

$$x'(t) \coloneqq \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \tag{1}$$

を対応させるような関数である（$\coloneqq$ は「左辺を右辺で定義する」という意味）。$x'(t)$ のことを $\frac{dx}{dt}$ や $\dot{x}$ などとも書き（後者は $t$ が時間を表すときに使うことが多い）、$x'(t)$ の導関数を $x''$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\ddot{x}$ などと書く。

微分（導関数）のイメージ

例えば、$x(t)$ がある物体の時刻 $t$ における位置を表しているとする。このとき式 (1) の分子は「（時刻 $t$ から時刻 $t+h$ までの間に）移動した距離」を表し、分母は「移動にかかった時間」を表している。$h$ はとても小さいので、$x(t)$ の導関数は時刻 $t$ における速度を表している（（平均の）速度 = 距離/時間 をじゅうぶん小さい時間幅で計算したものがある時刻の瞬間の速度になっているということ）。つまり、速度は位置を時間微分したものになっている。

$x(t)$ が物体の位置以外を表しているときも同様に考えると、$x(t)$ の導関数は「$t$ に対する $x(t)$ の変化率」、「$x(t)$ のグラフの接線の傾き」などを表していると解釈できる。以下 $t$ は時間を表すので、微分を知らない人は微分を「〜の時間変化（率）」と読むと良いと思う。

### 1.2　微分方程式と力学系

未知関数とその導関数の関係式を**微分方程式**といい、それを満たす関数を**微分方程式の解**と呼ぶ。例えば Newton の運動方程式（未知関数は位置や速度など）や化学反応の反応速度式（未知関数は物質の濃度）、感染症の感染拡大のモデル（の一部）などは微分方程式である。

＜微分方程式の具体例＞

以下に三つの具体例をあげる。最初の二つは Newton の運動方程式、もう一つは生物の個体数の増減のモデルの一つであるロトカ・ボルテラ方程式である。

- 等加速度運動

  $x(t)$ を物体の位置とする。位置の時間微分は速度であり、速度の時間微分（時間変化率）は加速度である。これが時間によらない加速度 $a$ に等しいので、等加速度運動の微分方程式は次のようになる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a \ (= \text{const.}) \tag{2}$$

  この式を積分することで、速度 $v$ と位置 $x$ は次のように求まる（求め方は 3 節参照）。

$$v = v_0 + at \tag{3}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{4}$$

  物理基礎で $x_0 = 0$ の形の式を見たことがある人も多いと思う。高校物理でグラフの面積を考えて... とかしていたことは実は微分方程式 (2) を解くことに対応している。

- （理想的な）バネ（調和振動子）

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{5}$$

  これを解くと単振動のおなじみの式

$$x = A\sin(\omega t + \theta_0), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6}$$

  が得られる。（解き方は 3 節参照）

- ロトカ・ボルテラ方程式（捕食・被食関係のモデル）

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = cxy - dy \end{cases} \tag{7}$$

  $x$ が被食者の個体数、$y$ が捕食者の個体数、$a,\ b,\ c,\ d$ はある正の定数である。2 次元力学系のポスターや解説のベクトル場の図はこの方程式で $a = b = c = d = 1$ としたものであり、個体数は普通正なので図の右上（$x,\ y > 0$）の領域がそれぞれの個体数の変化を表している。

微分方程式（や差分方程式）などの、時間変化を記述する方程式を**力学系**と呼ぶ。微分方程式には、等加速度運動やバネの例などのように解けるものもあるが、解けないものも多い。[*1]

そのような「解けない方程式」に出会ったときにとる方法の一つが力学系の手法である[*2]（もちろん解ける方程式をこの方法で調べることも可能である）。これは微分方程式そのものを見てその解が持つ性質（例えば周期軌道の有無やじゅうぶん時間が経ったときの振る舞いなど）を調べる方法である。これについてこれから見ていこう。

---

[*1] ♠ そもそも解が存在しなかったり、解が複数あり得たりすることもあるが、ここでは主に「解がただ一つ存在することが（微分方程式の解の存在と一意性の定理により）保証されているが、それを初等関数（三角関数とか指数関数とか）などで表せない」ものことを言っている。

[*2] 他の代表的な方法に数値計算（微分方程式を差分化したものを PC に解かせる）などがある。

# 2　1 次元力学系

## 2.1　1 次元力学系と具体例

まず簡単な例として、**1 次元力学系**について説明する。1 次元力学系とはある関数 $f$ を用いて

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{8}$$

という形で記述されるシステムのことである（$x = x(t)$ は未知関数）。以下 $\frac{dx}{dt}$ のことを $\dot{x}$ と書くことにする。

1 次元力学系において、縦軸を $\dot{x}$、横軸を $x$ にとったグラフを**相図**と言う。$\dot{x}$ は $x$ の時間変化率なので、$\dot{x} > 0$ の領域では時間とともに $x$ が大きくなる方向に、$\dot{x} < 0$ の領域では時間とともに $x$ が小さくなる方向に向かう。また、$\dot{x} = 0$ となる点では時間が経っても $x$ が変化しない。このような点を**固定点**という。固定点の近くの点が時間とともにその固定点に近づくときその固定点は**安定な固定点**といい、時間とともに離れていくとき**不安定な固定点**という。[*3]

例

$$\dot{x} = ax, \quad (a \text{ は実数}) \tag{9}$$

このとき、$a$ の符号によって 3 通りの振る舞いがあり得る。

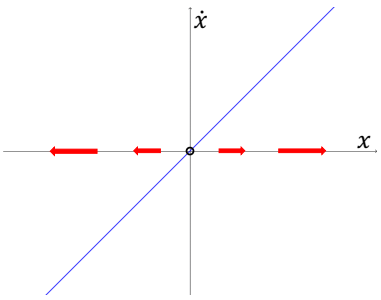


図 1　$a > 0$ のとき

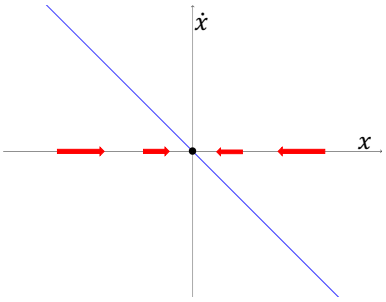


図 2　$a < 0$ のとき

(1) $a > 0$ のとき

相図は図 1 のようになる。$x > 0$ の領域では時間とともに $x$ が大きくなる方向へ、$x < 0$ の領域では時間とともに $x$ が小さくなる方向へ向かう（図では赤い矢印で表している）。点 $x = 0$ は不安定な固定点になっている（図では白丸で表現している）。

これは生物の個体数の増加の単純なモデル（このとき $x$ は個体数）などに用いられている。[*4]

---

[*3] 固定点の左右一方からは固定点に近づき、もう一方からは離れるというケースもある。そのような固定点は**半安定な固定点**という。

[*4] ♠ ドラえもんに出てくるバイバインを使ったくりまんじゅうは（後で述べる $x$ の離散性と、人が食べる効果をのぞいて）完全にこの方程式 (9) に従うが、生物の個体数の場合は実際には食料や土地が有限であることなどによってどこかで指数的な増加がストップするはずである。この効果を取り入れた次のようなモデルを**ロジスティック方程式**という。

$$\dot{x} = ax(1 - \frac{x}{\kappa}), \quad a > 0,\ \kappa > 0 \tag{10}$$

(2) $a = 0$ のとき

$x$ は常に一定値をとる（全ての点が固定点である）。

(3) $a < 0$ のとき

相図は図 2 のようになる。$a > 0$ のときと逆に、$x > 0$ の領域では時間とともに $x$ が小さくなる方向へ、$x < 0$ の領域では時間とともに $x$ が大きくなる方向へ向かう。点 $x = 0$ は安定な固定点になっている（図では黒丸で表現している）。

このような微分方程式は核分裂（$x$ は残存原子数）などで現れる。

ちなみに、この方程式（9）は簡単に解くことができて（解き方は 3 節参照）、その解は $A = x(0)$ を任意定数として

$$x(t) = Ae^{at} \tag{11}$$

となる（指数関数を知っている人は、今まで場合分けして述べてきた解の性質とこの解を比べてみて、確かにこの解の持つ性質が相図を見ることで確認できることを確かめよう）。

1 次元力学系の大事な性質として、振動しないということがある（固定点を超えた移動は起こり得ないことなどからわかるだろう）。2 次元では振動が起きるので、細胞性粘菌のふるまいなどで現れる振動現象は 1 次元力学系ではなく、2 次元力学系で表現される。

## 2.2 1 次元分岐

$f(x)$ がパラメータ（先ほどの例の $a$ や、次の例の $r$ がこれにあたる）を含んでいる場合について考える。このとき、系のパラメータの変化に伴って固定点の安定性が変化することを**分岐**という。

＜具体例＞

- サドルノード分岐

$$\dot{x} = r + x^2 \tag{12}$$

この力学系の相図は図 3 のようになっている。$r < 0$ から徐々に $r$ を増やしていくと、安定な固定点と不安定な固定点が近づいていき、$r = 0$ で合体して半安定な固定点になったのち $r > 0$ で消失することがわかる。

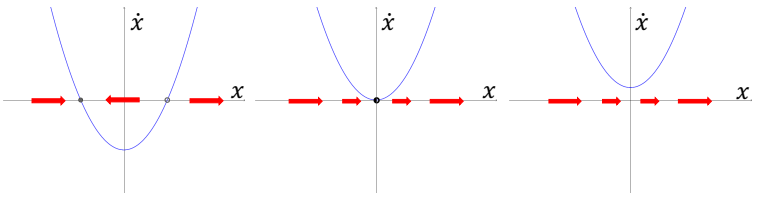


図 3　サドルノード分岐（左から $r < 0,\ r = 0,\ r > 0$）

この式の $\kappa$ を環境収容力といい、$x < \kappa$ から始まった個体数の増加は $x = \kappa$ を超えない（興味がある人は相図を書いて確かめてみよう）。

また実際は個体数 $x$ は正の整数しかとらない離散的なものだし、他にもいろんな要素が絡み合っているが、これらのモデルではそのような複雑なものを無視して一部の本質的な（と思われる）性質を抜き出している。

また、パラメータ $r$ を横軸に、固定点の位置 $x$ を縦軸にとったグラフを**分岐図**という。図 4 はサドルノード分岐の分岐図である（実線は安定な固定点、破線は不安定な固定点を表す）。

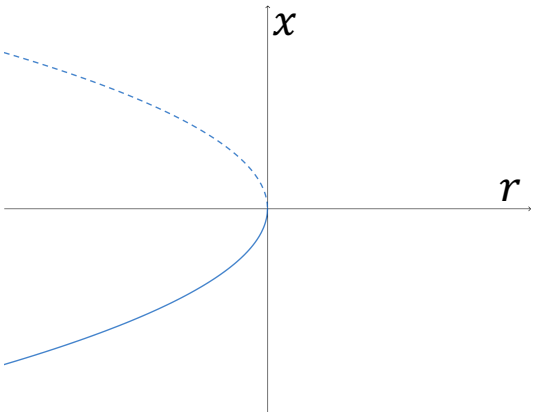


図 4　サドルノード分岐の分岐図

- 超臨界ピッチフォーク分岐

$$\dot{x} = rx - x^3 \tag{13}$$

この力学系の相図は図 5、分岐図は図 6 のようになっている。$r \leq 0$ までは原点が安定な固定点になっているが、$r > 0$ になると原点は不安定な固定点となり、左右に安定な固定点が出現する。

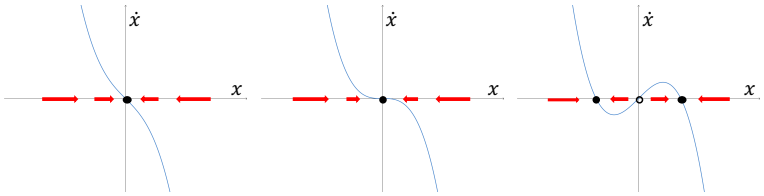


図 5　超臨界ピッチフォーク分岐（左から $r < 0,\ r = 0,\ r > 0$）

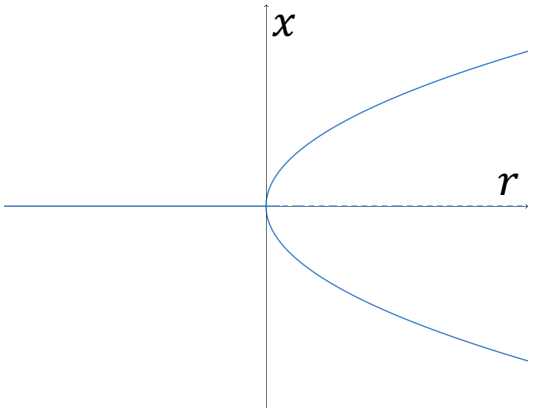


図 6　超臨界ピッチフォーク分岐の分岐図

## 3　補足（微分方程式の解法）

本文中で述べたとおり、微分方程式とは未知関数とその導関数の関係式である。いつでも解けるわけではないが、解ける微分方程式は存在する。ここでは、（主に高校数学の微積分の計算ができる人向けに）本文中でとりあげた等加速度運動と調和振動子の運動方程式と、微分方程式 $\dot{x} = ax$ の解法を紹介する。

- 等加速度運動の運動方程式（ただし速度 $v = \dot{x}$ とした）

$$\frac{dv}{dt} = a(= \text{const.}) \tag{14}$$

一般に右辺が $t$ のみに依存する（$x,\ v$ を含まない）場合、単に積分することで微分方程式を解くことができる。初期条件 $v(t=0) = v_0$ のもとで積分すると、速度 $v$ は

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a dt' = v_0 + at \tag{15}$$

となる。また、$v = \dot{x}$ よりこの結果は $x$ に関する微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at \tag{16}$$

と見ることができる。これを初期条件 $x(t=0) = x_0$ のもとで解くと、

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + at)dt = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{17}$$

となる。

- 1 次元力学系の例の微分方程式（$a$ は実数）

$$\frac{dx}{dt} = ax \tag{18}$$

これは右辺に $x$ があるので単に積分して解くことはできない。一般に、ある関数 $f, g$ によって

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t) \tag{19}$$

という形で表された微分方程式は**変数分離法**で解くことができる（今の例では例えば $f(x) = x,\ g(t) = a$。定数はどちらに含めても良い）。両辺 $f(x)$ で割って $t$ で積分すると左辺は置換積分で $x$ のみを含む積分に、右辺は $t$ のみを含む積分になるから、両辺それぞれ積分したのち $x$ について解けば良い。
今の例で具体的にやってみよう。$x(t=0) = A$ とする。まずどの時刻でも $x = 0$ でないと仮定して（ある時刻で $x = 0$ となる場合は後で）$f(x) = x$ で両辺割ったのち、$t$ で積分すると、

$$\int_0^t \frac{1}{x}\frac{dx(t')}{dt'}dt' = \int_0^t a dt' \tag{20}$$

となる（積分範囲の $t$ と被るのを避けるため、積分の記号は $t$ の代わりに $t'$ を用いた）。両辺それぞれ計算すると、置換積分より

$$(\text{左辺}) = \int_A^x \frac{1}{x'}dx' = \log\left(\frac{x}{A}\right) \tag{21}$$

$$(\text{右辺}) = at \tag{22}$$

となる（今はどの時刻でも $x$ が 0 にならないと仮定しているので、$x$ と $A$ は同符号だから log の中身の絶対値をつけていない)。これを $x$ について解くと、

$$x(t) = Ae^{at} \tag{23}$$

となる。今どの時刻でも $x$ は 0 ではないと仮定しているので、$A = x(0) \neq 0$ であり、確かに仮定が満たされている。次にある時刻で $x = 0$ となるとき、微分方程式の解の存在と一意性の定理[*5]より、その解は任意の時刻で $x = 0$ を満たす。よってこのときは恒等的に 0 になる関数が解になっている。
以上まとめると、求める解は $A = x(0)$ を任意定数（0 もオッケー）として

$$x(t) = Ae^{at} \tag{24}$$

となる。[*6]

- 調和振動子の運動方程式（$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$）

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{25}$$

たくさん解き方はあるが、脚注*6 に示したような方法を今回も使うことができる。方程式をじっと見ると

$$x(t) = \sin\omega t,\ \cos\omega t \tag{26}$$

が解になることがわかる。この二つは互いに一次独立（今回は一方が他方の定数倍で表されないという意味）で、これの線型結合

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{27}$$

も解になっている（$A$, $B$ は初期条件で決まる任意定数)。これが一般解になっていることはこの方程式の解全体が二次元のベクトル空間になっていることを確かめればわかる（平面の任意のベクトルが平行じゃない二つの 0 でないベクトルの線型結合で書けることと同じ)。三角関数の合成により、本文中で述べた一般解が得られる。

＜問題＞この微分方程式 (25) はエネルギー保存則（を定数倍したもの）

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = C = \text{const.} \tag{28}$$

を使えば変数分離法で解くことができる。

(1) 微分方程式 (25) の両辺に $\dot{x}$ をかけて $t$ で積分することで式 (28) を導き、$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ について解け。
(2) 変数分離法を用いて (1) で求めた微分方程式を解き、式 (27) または式 (6) と似た式が得られることを確かめよ。
(3)（発展）この微分方程式 (25) の他の解き方を調べよ。（例えば行列の指数関数を使う方法などがある。

---

[*5] ♠ 関数 $x(t) = 0$ は微分方程式の解であり、ある時刻 $t_0$ で $x(t = t_0) = 0$ を満たす。逆に $x(t = t_0) = 0$ を満たすような微分方程式の解は $x(t) = 0$ しかないということがこの定理を使うことで言える。

[*6] ♠ 微分方程式 (18) をよく見ると $x$ は微分しても（$a$ 倍はされるが）変わらない関数であることから、解の一つとして指数関数 $e^{at}$ を見つけることができ、これの定数倍も解になることがすぐにわかる。これで全ての解を尽くしていることは、この微分方程式の解全体が 1 次元のベクトル空間になっていることから言うことができる（大学 1 年生で習う線形代数の知識を使う。ざっくり言うと、一次元の任意のベクトルはある一つの 0 ではないベクトルの定数倍で表せるということ)。

＜略解＞

(1) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) = \dot{x}\ddot{x}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2}{2}\right) = x\dot{x}$ などの関係式を使うと良い。式 (28) を $\dot{x}$ について解くと $\dot{x} = \pm\sqrt{C - \omega^2 x^2}$ である。

(2) $A = \pm\sqrt{C}$, $\theta_0$ を任意定数として $x(t) = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \theta_0)$ になる。途中必要な積分 $\int^x \sqrt{C - \omega^2 x^2}dx$ は例えば $x = \frac{\sqrt{C}}{\omega}\sin\theta$ などと置換するとできる。

(3) 略