2 次元力学系の解説

Physics Lab. 2020 生物物理班

2020 年 9 月 16 日

相平面と解の振る舞い

1 次元力学系の場合と同様に, 2 次元力学系は適当な関数 $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ を用いて

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x,y) \\ \dot{y} = f_2(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

と表されます. ここで簡単のために $(\dot{x},\dot{y}) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = \dot{\vec{x}}$ と書くことにします. また, この xy 平面のことを **相平面** と呼ぶことにします. 説明を簡単にするため, 具体例として $f_1(x,y) = x - xy$, $f_2(x,y) = xy - y$ を考えてみましょう. 余談ですが, これは力学系ポスターの初めに出てきたロトカ・ボルテラ方程式の特別な場合になっています. さて, この具体例において $\dot{\vec{x}}$ はどのようなベクトルになっているでしょうか. 試しに $(x,y) = (1,2)$ を代入してみましょう.

$$\dot{\vec{x}}|_{(x,y)=(1,2)} = (f_1(1,2), f_2(1,2)) = (-1,0) \tag{2}$$

どうやら $\dot{\vec{x}}$ は相平面上の各点に対してベクトルを返す関数のように見ることができそうです. そこで相平面上のいくつかの点に対して実際にそのベクトルを計算し, 図示してみましょう.

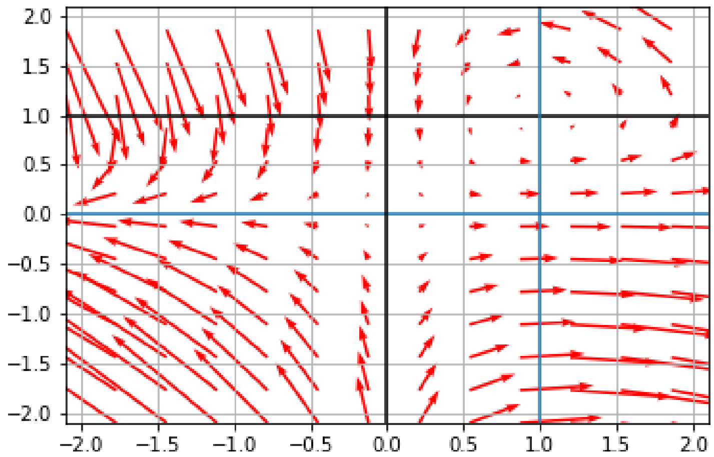


図 1　相平面上のベクトル場とヌルクライン

図示すると平面の各点からベクトルが伸びているイメージがはっきりつかめますね. 結局, $\dot{\vec{x}}$ は相平面上の **ベクトル場** を与えていたというわけです. 実は, ベクトル場を図示することで解の定性的な挙動を考えることができます. これは, $\dot{\vec{x}}$ が $\vec{x}$ の動く速度を与えているためです. 相平面にベクトル場を図示し, 点を初期値からベクトル場にそって動かしていくと, その軌跡が解曲線になっているのです. 上に挙げたベクトル場で実験してみましょう. $(1.5, 1.0)$ を初期値とすると相平面の右上の方をぐるぐる回るような解があらわれそうです. 一方 $(-0.5, -2.0)$ を初期値とすると, x 軸の負の方向に進む解があらわれることが分かりますね. 2 次元力学系を微分方程式として解くのは困難でも, このような図示によって解の振る舞いを分析することができるのです. また, この図における黒と青の直線は, それぞれ $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$

を満たす点の集合になっています．確かにベクトルの向きが青い直線の近くでは x 軸に平行になっており，黒い線の近くでは y 軸に平行になっていることが分かりますね．このようにベクトル場のある成分が 0 となる点の集合を表す曲線 (今回の例では直線ですが，一般には曲線です) を **ヌルクライン** と言います．ベクトル場を正確に図示しなくても，ヌルクラインとヌルクラインに囲まれた領域のベクトル場の向きがある程度わかれば，解の振る舞いを考察することができます．例えば，$\dot{x} = 0$ を満たすヌルクラインと $\dot{y} = 0$ を満たすヌルクラインの交点は固定点です．例で示した系では，$\dot{x} = 0$ を満たすヌルクラインは $x - xy = 0$ より $x = 0$ と $y = 1$ であり，$\dot{y} = 0$ を満たすヌルクラインは $xy - y = 0$ より $x = 1$ と $y = 0$ で，固定点は $(0, 0)$ と $(1, 1)$ であることが分かります．

リミットサイクルとホップ分岐

このように相平面の上でベクトル場を図示し，解の曲線を書いていると 1 次元の場合と同様に固定点があらわれることがあります．また 2 次元力学系では **リミットサイクル** と呼ばれる特別な解の軌道もみられます．リミットサイクルを考える前に，まずは閉軌道を定義しましょう．閉軌道とは，その名の通り相平面の上で閉じた解軌道のことです．初期値から出発してまた初期値に戻って来るような解のことですね．このような閉軌道で，しかもその周りの解が閉軌道にならないようなものをリミットサイクルと言います．リミットサイクルも固定点同様安定なものと不安定なものがあります．リミットサイクルの周囲の軌道がリミットサイクルに近づくとき，そのリミットサイクルを **安定なリミットサイクル** と言います．このようなリミットサイクルでは，周期的な解から少しずれてしまっても，また元の周期解に戻って来るため振動が持続する系のモデルになります．反対に，周囲の軌道がリミットサイクルから遠ざかるときにはそのリミットサイクルを **不安定なリミットサイクル** と言います．この場合には振動していた解が少しのずれで振動を止めることになります．さて，1 次元のとき，力学系に x とは別のパラメータが含まれている場合にはパラメータの値によって **分岐** がおこることがありました．2 次元力学系でも x, y 以外のパラメータが含まれるときには分岐が起こる場合があります．ここでは，リミットサイクルに関する分岐として **超臨界ホップ分岐** をみてみましょう．超臨界ホップ分岐では，パラメータの変化にしたがって安定な固定点 (周囲の解が吸い込まれていくため，スパイラルとも呼びます) が安定なリミットサイクルに変形します．これはパラメータの変化により元々は振動していなかった系が振動を始める現象のモデルになります．

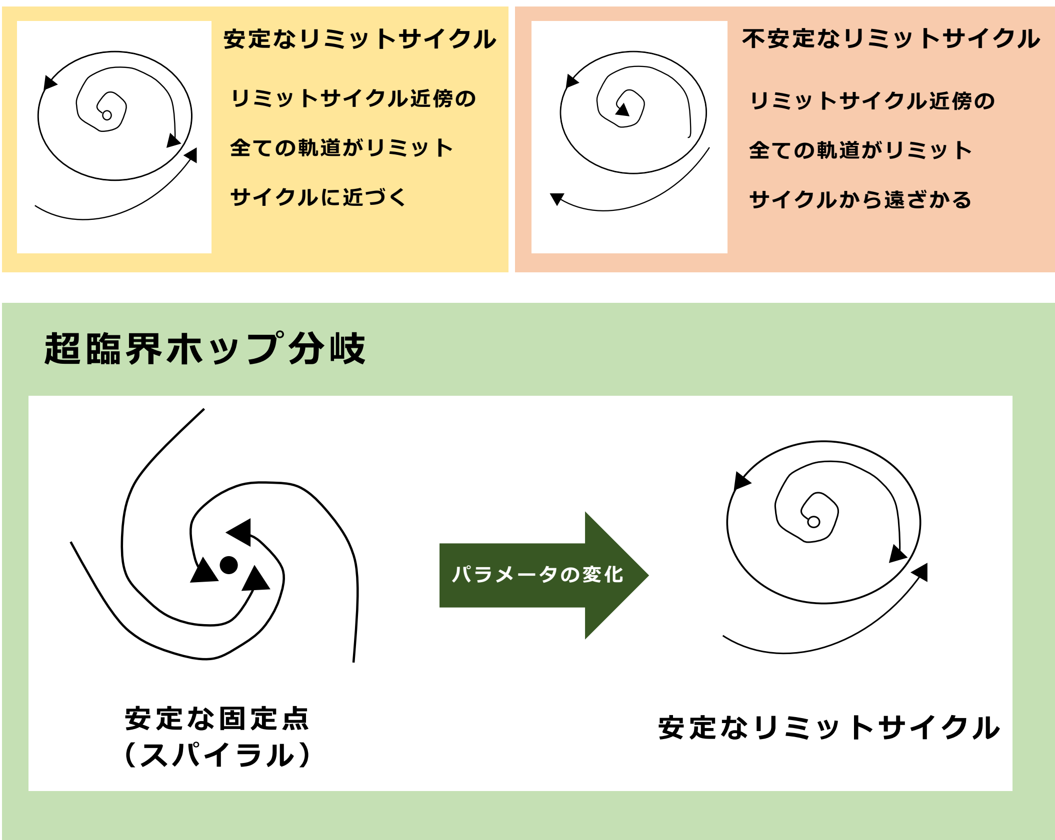


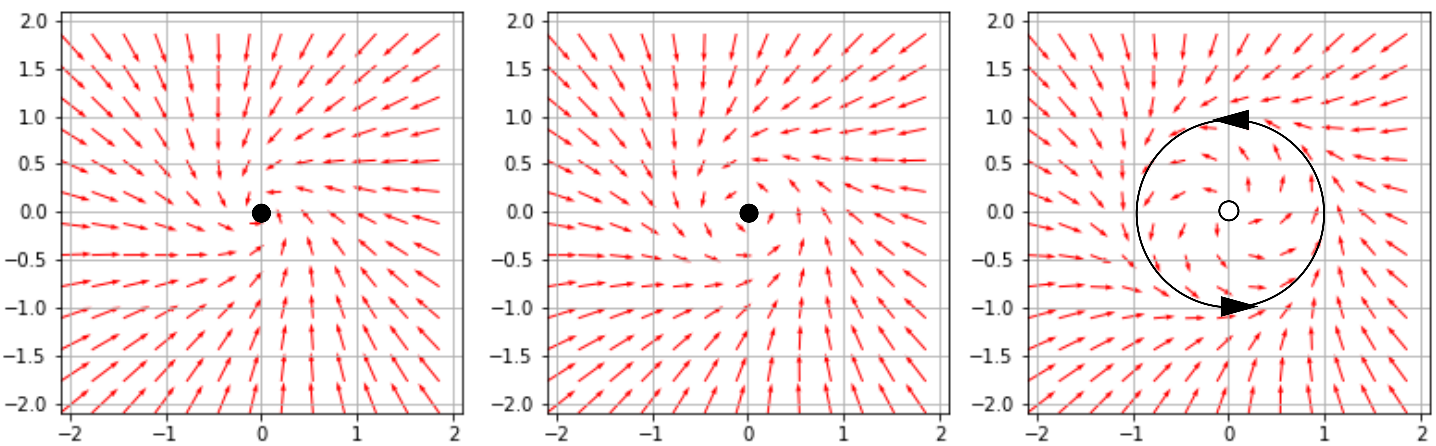
図 2　リミットサイクルと超臨界ホップ分岐の概要

例として, 次のような系を考えてみましょう.

例) 超臨界ホップ分岐を示す系

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = \mu r(t) - r(t)^3 \\ \dot{\theta}(t) = \omega \end{cases} \tag{3}$$

今までデカルト座標 (x, y) を使ってきましたが, ここでは簡単のため極座標を用いています. まず, 解の角度方向の振る舞いを考えてみましょう. $\dot{\theta}$ は一定なので, 原点の周りを一定の速度で回ることが分かります. したがって考察すべきは動径方向の振る舞いです. $\dot{r} = 0$, すなわち $\mu r - r^3 = 0$ を考えてみましょう. $r \geq 0$ なので, この三次方程式は $\mu \leq 0$ では $r = 0$ のみを解に持ち, $\mu > 0$ では $r = 0,\ \sqrt{\mu}$ を解に持ちます. また, $\mu \leq 0$ のときには, $r(t) > 0$ について $\dot{r}(t)$ が常に負になるので, $r = 0$(デカルト座標では原点) が安定な固定点であると分かります. 一方 $\mu \leq 0$ では $0 < r < \sqrt{\mu}$ で $\dot{r}(t)$ が正に, $r > \sqrt{\mu}$ で $\dot{r}(t)$ が負になるので, $r = 0$ が不安定な固定点となり, かわりに $r = \sqrt{\mu}$(デカルト座標では半径 $\sqrt{\mu}$ の円) が安定なリミットサイクルになっていることが分かります. したがってこの系はパラメータ μ が変化することで安定な固定点が安定なリミットサイクルに変化する超臨界ホップ分岐を示します. 最後にこの系のベクトル場と解の様子を $\omega = 1$, $\mu = -1,\ 0,\ 1$ の場合についてそれぞれ図示してみましょう. 赤い矢印がベクトル場, 黒丸は安定な固定点, 白丸は不安定な固定点を表し, 黒い曲線は安定なリミットサイクルです.



$\mu = -1$　　$\mu = 0$　　$\mu = 1$

図 3　リミットサイクルと超臨界ホップ分岐の概要