P. Lab.

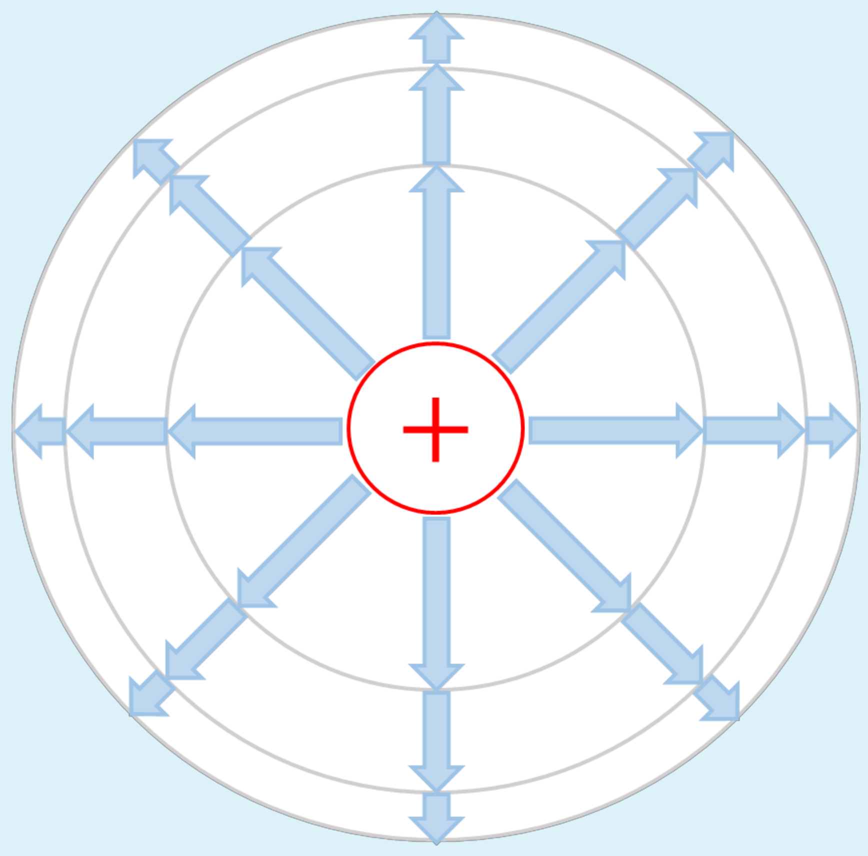
イントロダクション

「場」とは？

現代物理学では、「場」という概念が度々用いられます。場とは、時空 (時間と空間をひとまとめにしたもの。我々の住む世界は、3 次元空間 +1 次元時間。) の各点で、値を持つ量のことです。

一番分かりやすい例は、高校の物理で習う、点電荷(1点に集まった電荷)が作る「電場」でしょう。点電荷が作る電場は、クーロンの法則に従って電荷からの距離の二乗に反比例して弱まっていきます。

これだけ聞いても果たして何の役に立つのかピンと来ないかもしれませんが、このような「場」の概念を応用すると、実は量子の持つ粒子性と波動性の両立や、粒子が生成・消滅したりする現象を説明できるのです。場を考える上で大事なこととして、ある条件下では場がその値を変えない、つまり対称性を持つ場合があります。先程の電場の例では、見る角度を変えても場の分布が変わらないという「球対称性」を持っていることが分かると思います。このような対称性の中でも現代物理学にとって重要なのは「ゲージ対称性」と呼ばれるものです。



↑正の点電荷が作る電場のイメージ。外側に向かって放射状に伸びていき、遠くへ行くほど小さくなっていく。

「ゲージ対称性」とは？

物理学の目標はこの世界が従う物理法則を数式で表すことです。この数式を考える際に「対称性」というものが重要な役割を果たします。

物理学において「対称性」という言葉は、ある操作を施しても物理現象が変わらないことを指す時に使われます。例えば、同じ高さから同じ初速度でボールを投げるとき、東に向かってボールを投げると 10m しか飛ばないけれど、北に向かって投げれば 100m 飛ぶということはありません。これはボールの従う物理法則は「投げる向きを変える」(＝投げる向きを回転させる)という操作を施しても同じ、つまり「回転対称性」を持っていることを表します。ボールの従う物理法則を表す数式は、それを解けばこの「回転対称性」が説明出来る、という性質を持つものでなければなりません。

現代物理学では「ゲージ対称性」という対称性がよく登場します。これは大雑把には、ゲージと呼ばれる直接は見えない角度が時空の各点で定まっていて、これを回転させても物理法則は変わらないとするものです。なお、先ほどの「回転対称性」はボールを投げる人が向きを回転すると視界全体が変化するように、”回転”によって空間全体が影響を受けますが、「ゲージ対称性」で考える見えない角度は時空のそれぞれの点で好きに回転することが出来るもので”回転”が空間全体に影響することはありません。(物理では前者のような時空全体に影響を与える操作と関連する対称性を「大域的対称性」,逆に後者のように時空全体には影響しない操作と関連する対称性を「局所的対称性」と呼んで区別しています。)物理法則を表す数式はこの「対称性」の性質を反映しなければならないと考えることで、この後紹介するような色々な発見が生まれました。

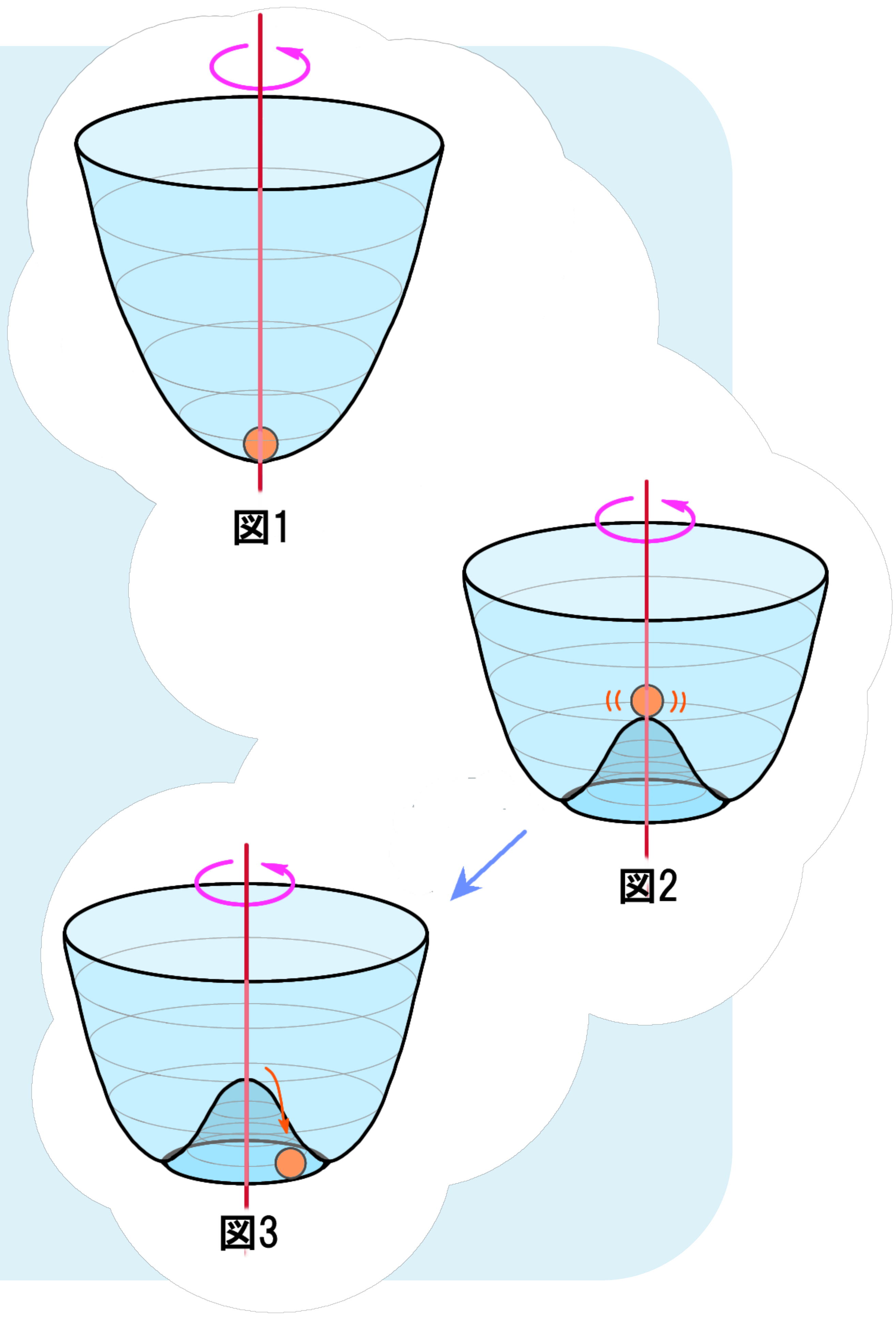
南部ゴールドストーン粒子とヒッグス機構

南部ゴールドストーン粒子

南部ゴールドストーン粒子とは、物理系の対称性が破れたときに現れる質量０の粒子のことです。

例えば物理系を右のようなイメージ図で考えると、図１では、赤い軸の周りで回転させても図は変化しないので、回転対称性をもつと言えます。一方で、系の様子が図２のようになっている場合は、不安定な山の頂上に乗っている球が図3のように谷のどこかに落ちます。図３の系では赤い軸の周りで回転させると球の位置が別の場所になってしまうので、回転対称性を持つとは言えません。このとき、もともとあった対称性がなくなってしまうので、”対称性が破れている”といいます。

このように対称性が破れた図３で、球を同じ高さの谷にそってほんの少しだけ動かすと、球に揺らぎが生じます。物理学では、図の球は真空状態に対応していて、その真空の揺らぎが全空間に伝わっていきます。その揺らぎを表す場に対応する粒子が南部ゴールドストーン粒子です。

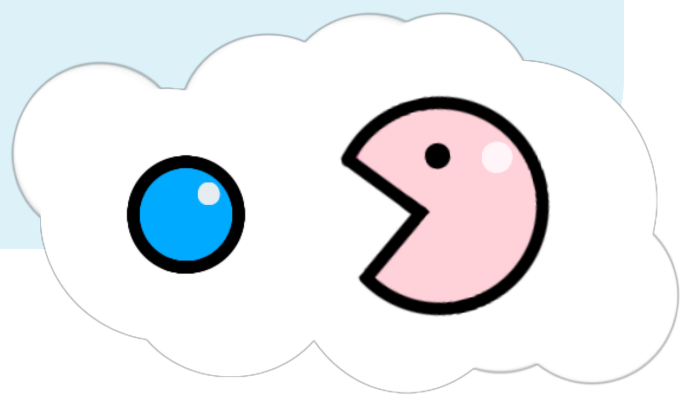


ヒッグス機構

ヒッグス機構とは、質量が０の粒子の系である対称性が破れると同時にその粒子が質量を獲得する仕組みのことです。

素粒子論では、力はゲージ粒子と呼ばれる粒子によって媒介されます。このゲージ粒子を含んだ理論では、系はゲージ対称性と呼ばれる対称性を持ちますが、この対称性が存在するためには、ゲージ粒子の質量は０でなければなりません。一方で、弱い相互作用（力）を伝えるウィークボソンは質量をもっています。この質量はヒッグス機構により獲得されると考えられています。このときにはゲージ対称性が破れることになります。

前項で言ったように、ある対称性が破れるとそれに対応する南部ゴールドストーン粒子が現れます。しかし、力を媒介するゲージ粒子が存在する場合は、南部ゴールドストーン粒子はあらわには出てこず、代わりにゲージ粒子が質量を獲得します。これはしばしば、「ゲージ粒子が南部ゴールドストーン粒子を食べて太った」と表現されます。このような仕組みがヒッグス機構です。



P. Lab.

特殊相対論とテンソル記法

このポスターでは、場の理論で用いられる特殊相対論やテンソルの演算について簡単にまとめます。

特殊相対論

　まず始めにざっくりとローレンツ変換と呼ばれる変換を紹介したいと思います。特殊相対論は

1.光速度不変の原理：任意の慣性座標系で真空中の光の速度は等しい

2.相対性原理：物理法則の形は慣性座標系に依らない

という二つを指導原理とする理論です。このうち、１番の仮定から、異なる慣性系間（別々の観測者が見る運動）の関係を導くことができます。ある慣性系 K'が慣性系K に対してx軸方向に速度vで動いている、ものとし、また光速をc、K系での座標を(ct,x,y,z)、K'系での座標を(ct',x',y',z')とすると

$$ct' = \gamma(ct-\beta x),\qquad x' = \gamma(x-\beta ct),\qquad y' = y,\qquad z' = z$$

となります。ただし都合上$\beta = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}$,　$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ とおいています。系の間の変換に時空間の座標が入り乱れていると言うのはかなり非直感的かもしれませんが、それは１番の仮定から来ています。

　では、どうしてこの変換が重要になるかと言うと、それは２番の仮定から「物理法則（運動方程式など）の形がローレンツ変換を施しても変わらない」と言うことが要求されるからです。これで物事を統一的に扱うことが可能になります。この「ローレンツ不変性」に限らず、物理では一般に不変性を指導原理としてものを考えることがよくあります。

　ところで、解析力学をかじったことがあれば、物理法則を与えるものとして「最小作用の原理」なるものが登場することに馴染みがあると思います。これは場の理論に拡張して考えることができ、先のローレンツ不変性と組み合わせると、「ラグランジアン(密度)というものがローレンツ変換の下で不変かどうか」と言うものの見方に帰着されます。以降のポスターでは実際にラグランジアンの変換性を考えていますが、その背後にはこういった動機が隠されています。ラグランジアンがどう構成されるかなどは紙面に限りがあるため省略しますが、大切なのは、「不変性を持ったラグランジアンが物理法則を与える」と言うことです。

スカラー、ベクトル、テンソル

　上で見たようにローレンツ変換では、時空間の座標が混ざって出てきます。これより、これまでの３次元座標での表記から、時間と空間の座標を対等のものとした4元ベクトル

$$\mathrm{x}^\mu = (ct,x,y,z)\quad \mu = 0,1,2,3 \qquad x^0 = ct,\ \ x^1 = x,\ \ x^2 = y,\ \ x^3 = z$$

で表したくなります。

　また、スカラーの代表例としては、三次元空間の距離の二乗$x^2+y^2+z^2$に倣って定義された$(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2$があり(原点からの波の伝播の式$x^2+y^2+z^2=(ct)^2$を考えると良い）、これはローレンツ変換で不変となっています。ここで上の不変量を簡潔に表すことを考えます。新たに添字の位置を下にしたベクトル$x_\mu = (ct,-x,-y,-z)$を用意します。すると

$$(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2 = x^0x_0+x^1x_1+x^2x_2+x^3x_3 = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu = x^\mu x_\mu$$

と簡潔に書き表すことができます。最右辺における和記号の省略を「アインシュタインの縮約則」と言い、これにより同じ添字が上下に現れている際は和が取られ、ベクトルx^μからスカラー$x^\mu x_\mu$が構成されます。

テンソルについては、添字がさらに増えたものと捉えて置いてください。$\mathrm{A}_{\mu\nu}$は二階のテンソルと呼びます。

　より一般にはローレンツ変換における「変換性」によってベクトルやスカラー、テンソルは定義されています。変換の下で不変なものがスカラー、x^μと同様に変換するものが反変ベクトル、といった具合です。重要なのは、変換性で定義された物理量で記述された物理法則はローレンツ不変性が明白であると言うことです。

※曖昧な、また不正確な説明もあるかと思いますが、分かり易さを重視しました。ご容赦ください。

P. Lab.

Lie群とLie代数

このポスターでは，物理において，対称性を記述する道具として使われるLie群とLie代数について解説します．

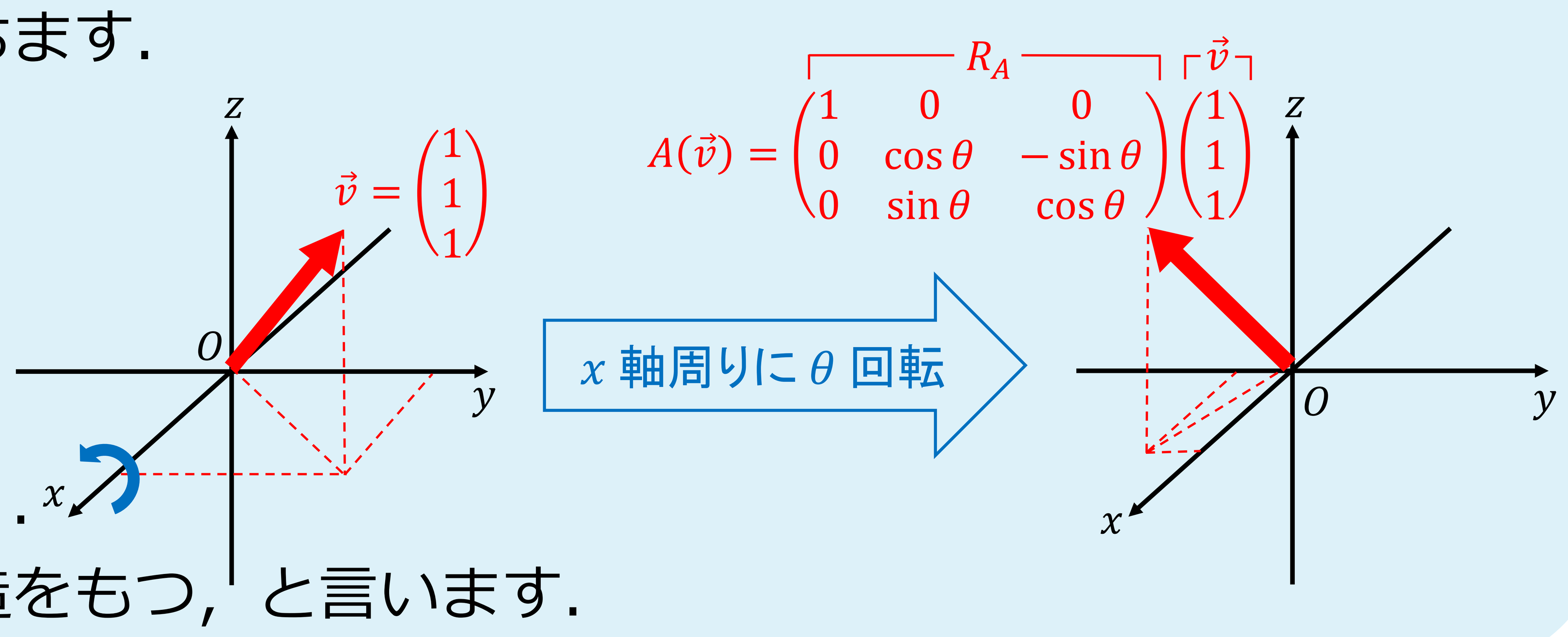
群

xyz 空間内の原点を中心とした回転操作を考えてみましょう．例えば図のような回転操作は，ベクトル $\vec{v}$ を回転後のベクトル $A(\vec{v})$ に移す操作とみなすことができます．この写像 A は，**行列** R_A という量をベクトルに掛け算することで， $A(\vec{v}) = R_A\vec{v}$ のように表現することができます． 3 次元回転操作を表す行列全体の集合を $\mathrm{SO}(3)$ と書きます．行列 $R_A, R_B \in \mathrm{SO}(3)$ で表される 2 つの回転操作を立て続けに行うと，その結果はベクトル $\vec{v}$ をベクトル $R_B R_A \vec{v}$ に移す 1 つの回転操作に一致します．この 1 つの回転操作を表す行列を R_{BA} と書くと， $\mathrm{SO}(3)$ に含まれる 2 つの行列 R_A と R_B の「積」 $R_B R_A$ は， $\mathrm{SO}(3)$ に含まれる 1 つの行列 R_{BA} になると考えられます．さらに，この $\mathrm{SO}(3)$ と積に対して，以下の 3 つの性質が成り立ちます．

(1)「 0 度回転させる操作」を表す行列を I と書くと，
　$R_A \in \mathrm{SO}(3)$ に対して $IR_A = R_A I = R_A$.

(2) どんな行列 $R_A \in \mathrm{SO}(3)$ に対しても，
　逆操作を表す行列 $R_A{}^{-1} \in \mathrm{SO}(3)$ が存在する．

(3) $R_A, R_B, R_C \in \mathrm{SO}(3)$ に対して，$R_C(R_B R_A) = (R_C R_B)R_A$.



これらの性質をまとめて， $\mathrm{SO}(3)$ は積のもとで**群**の構造をもつ，と言います．

回転操作全体が群を成したように，物理では，場に対するある種の変換（ゲージ変換）全体が成す群（ゲージ群）を考えます．特にゲージ群はLie群の構造をもっています．ゲージ変換の下で対称性をもつ場の方程式を作るときには，ゲージ場と呼ばれる場が導入されますが，このゲージ場は，Lie群であるゲージ群のLie代数になっています．

Lie群

直感的に、 3 次元空間の回転には，x 軸，y 軸，z 軸周りの回転の 3 つの自由度があるように思えます．実際，x 軸周りに角度 α だけ回転させる行列を $R_x(\alpha)$ などと書くと，どんな行列 $R \in \mathrm{SO}(3)$ も， $R = R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$ のように，各軸の周りの回転の積として書けることが知られています．つまり， $\mathrm{SO}(3)$ の要素は 3 つの実数 (α, β, γ) で指定できます．$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ と $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ の値が近ければ，それぞれが指定する行列 $R_1, R_2 \in \mathrm{SO}(3)$ も“近い”回転操作を表します．このような“近さ”の概念が定められた群のことを，**位相群**と言います．特に $\mathrm{SO}(3)$ では，積や逆操作のもとで“近さ”が保たれます（ R_1 と R_2 が近ければ， $R_1 R_3$ と $R_2 R_3$ は近い． $R_1{}^{-1}$ と $R_2{}^{-1}$ も近い）．このような群のことを**Lie群**といいます．

Lie代数

Lie群の性質を使うと， $I \in \mathrm{SO}(3)$ 周辺の様子だけから $\mathrm{SO}(3)$ 全体の様子を把握することができます．まず $R_x(\alpha)$ を，実数 α に行列 $R_x(\alpha)$ を対応させる関数とみなしましょう．関数のグラフの $\alpha = 0$ における接線と同じように考えると， α が十分小さい数ならば，$R_x(\alpha) \approx R_x(0) + R_x'(0)\,\alpha = I + R_x'(0)\,\alpha$ という近似が成り立つはずです．ここに現れる行列 $R_x'(0)$ のように，十分小さい数 t に対して（ t の 1 次のオーダーで） $I + At$ が $\mathrm{SO}(3)$ の元となるような行列 A 全体の集合を，Lie群 $\mathrm{SO}(3)$ の**Lie代数** $\mathfrak{so}(3)$ といいます． $\mathrm{SO}(3)$ が 3 つの自由度をもっていたことに対応して， $\mathfrak{so}(3)$ は $R_x'(0)$，$R_y'(0)$，$R_z'(0)$ を基底とする 3 次元のベクトル空間となることが知られています．

以上でLie代数 $\mathfrak{so}(3)$ の元は， $I \in \mathrm{SO}(3)$ に近い回転操作，つまり微小な回転操作に対応することを説明しました．実は“微小な回転を積み重ねる”ことで， $\mathfrak{so}(3)$ の元 A に，必ずしも I に近くない $\mathrm{SO}(3)$ の元 $\exp(A)$ を対応させることができます．特に $\mathrm{SO}(3)$ の場合は，どんな $\mathrm{SO}(3)$ の元も $\exp(A)$，$A \in \mathfrak{so}(3)$ の形で表せることが知られています．したがって， $I \in \mathrm{SO}(3)$ 周辺の様子だけから $\mathrm{SO}(3)$ 全体の様子を把握することができたと言えます．

自発的対称性の破れ

P. Lab.

対称性

物理では、考えている系に何らかの操作をしても元の系と変わらないとき、系に「対称性」があると言うのでした。では、その対称性は物理学の理論の中でどのように現れるのでしょうか？

その答えの１つは「『Lagrangianの対称性』として現れる」です*。系のLagrangianとして、相互作用のある実スカラー場の系で最も一般的な形である

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \quad (m > 0, \lambda > 0)$$

を取ることにしましょう。この系の対称性とは、このLagrangianを変えない操作であり、ここでは

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \mathcal{L}(-\varphi, -\partial_\mu \varphi)$$

だから、変換 $\varphi \to -\varphi$ に対する対称性があると言えます。ここで、系のエネルギー基底状態（最もエネルギーが低い状態）を考えましょう。系のエネルギーは

$$\mathcal{H}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2}\partial_0 \varphi \partial^0 \varphi + \frac{1}{2}\partial_i \varphi \partial^i \varphi + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4$$

から計算でき、エネルギー基底状態はこれを最小にする

$$\varphi_0 = 0 = -\varphi_0$$

です。基底状態が、Lagrangianの持っていた変換 $\varphi \to -\varphi$ に対する対称性を再び持っていることに注目しましょう。外からエネルギーを与えなければ状態は基底状態に落ち着くので、ラグランジアンや系が持っている対称性を、状態も持っていることになります。ふつうの系では、このように基底状態の対称性とLagrangianの対称性は一致します。

*:Lagrangianは系の物理的な性質を記述するものだったことを思い出せば当たり前かもしれません。逆に、系の満たす対称性を満たすようにLagrangianを作ることもあります。

自発的対称性の破れ

上では系の対称性の話をしましたが、一方で、考えている系の対称性が無くなるとき、「対称性が破れる」と言います。とくに、外から作用を加えたのではなく、系が勝手に対称性を破るとき、これを「自発的対称性の破れ」と言い、一見すると不思議な性質が見えることがあるため、よく研究されています。上で紹介したLagrangianも、実は少し変えれば自発的対称性の破れを見ることができます。

上のLagrangianの一部の符号を変えて下のようにすると、エネルギーも下のように変化します。

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \quad (m > 0, \lambda > 0)$$

$$\mathcal{H}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2}\partial_0 \varphi \partial^0 \varphi + \frac{1}{2}\partial_i \varphi \partial^i \varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4$$

この系で安定する状態の対称性を見てみましょう。エネルギー基底状態は以下と求まります。

$$\varphi_0 = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \neq -\varphi_0$$

これはLagrangianが持っていた変換 $\varphi \to -\varphi$ に対する対称性を持っていません！

大域的対称性の破れとNambu-Goldstone粒子

P. Lab.

Goldstoneの定理

いくつかの実スカラー場からなる系 $\varphi(x)$ のLagrangian密度が

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi, \partial^\mu \varphi\right) - V(\varphi)$$

で与えられ、compact群 G のunitary表現 T の下で対称、すなわち

$$V(T(g)\varphi) = V(\varphi) \ \ (\forall g \in G)$$

であるとします。この大域的対称性は自発的に破れており、真空（最も安定な状態）

$$\varphi(x) = \varphi_0 \neq 0$$

を持つとします。φ_0は真空であるための条件

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi}(\varphi_0) = 0$$

を満たします。

破れていない対称性の部分群 $H \subset G$ を

$$h \in H \Leftrightarrow T(h)\varphi_0 = \varphi_0$$

で定義します。G の基底のうち H の基底でないもの$\{t'_\alpha\}$をとします。

真空φ_0からの摂動（微小なゆらぎ）$\chi(x)$ を

$$\chi(x) = \theta_\alpha(x) T'_\alpha \varphi_0 + \eta(x) \ \ (T'_\alpha := T(t'_\alpha))$$

と表します。ここで、

$$g = 1 + \theta_\alpha t'_\alpha + B\theta^2$$

という形の G の元を取り、$V(T(g)(\varphi_0 + \eta))$ という量について考えます。対称性の仮定より

$$V(T(g)(\varphi_0 + \eta)) = V(\varphi_0 + \eta)$$

です。一方、左辺を摂動の2次まで展開すると

$$\begin{aligned} V(T(g)(\varphi_0 + \eta)) &= V((1 + \theta_\alpha T'_\alpha + B'\theta^2)(\varphi_0 + \eta)) \\ &\simeq V(\varphi_0 + \theta_\alpha T'_\alpha \varphi_0 + \eta + B'\theta^2 \varphi_0 + \theta_\alpha T'_\alpha \eta) \\ &\simeq V(\varphi_0 + \theta_\alpha T'_\alpha \varphi_0 + \eta) + \frac{\partial V}{\partial \varphi}(\varphi_0 + \theta_\alpha T'_\alpha \varphi_0 + \eta) \times (B'\theta^2 \varphi_0 + \theta_\alpha T'_\alpha \eta) \end{aligned}$$

となりますが、φ_0が真空であるという条件から$\frac{\partial V}{\partial \varphi}(\varphi_0 + \theta_\alpha T'_\alpha \varphi_0 + \eta)$ は1次のオーダーなので、2次までの関係式として

$$V(\varphi_0 + \theta_\alpha T'_\alpha \varphi_0 + \eta) = V(\varphi_0 + \eta))$$

が成立します。質量項は2次なので、θ_αという場は質量を持たないことが分かります。この大域的対称性の破れに伴って現れた質量ゼロの場のことをNambu-Goldstone粒子と呼びます。

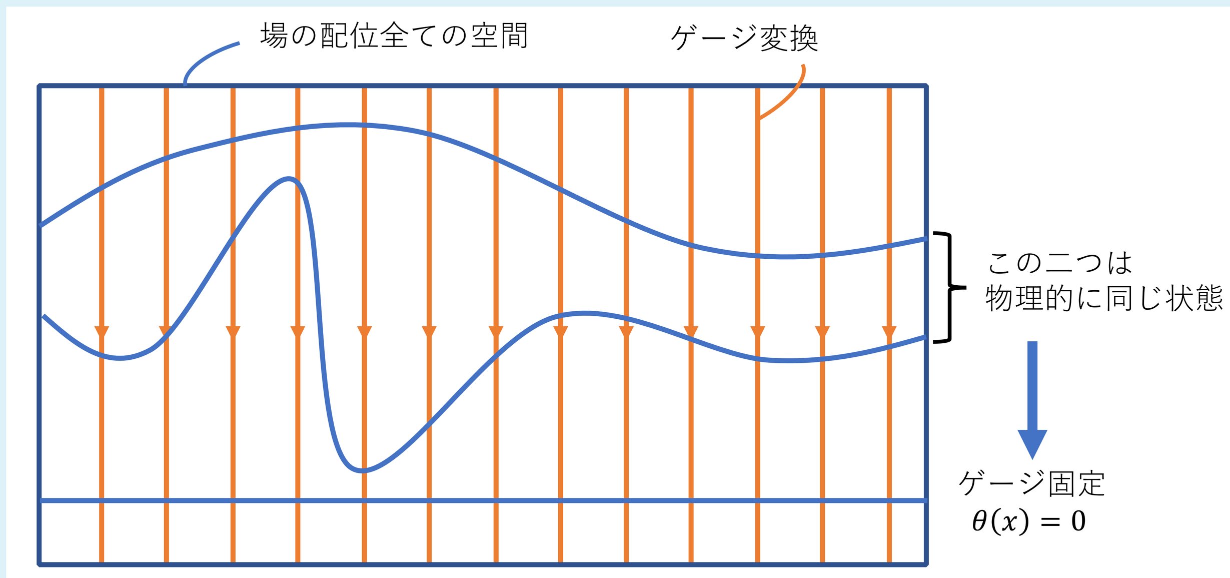
Higgs機構

Higgs機構とは「ゲージ場がNGボソンを食べて質量を獲得する」ことだとよく説明されます．この表現は確かに標語的でいいのですが，一方で何が言いたいのかわかりづらくもなっていると思います．
このポスターでは，Higgs機構を「NG粒子は非物理的」「ゲージ場が質量を獲得する」の二つに分けて説明します．

Nambu-Goldstone粒子は物理的でない

Nambu-Goldstone粒子とは，大域的対称性の自発的に破れにともなって表れる粒子でした．しかし，ゲージ対称性を考える枠組みでは**「ゲージ変換で移り合う場は物理的に同じ」**と解釈します．よってゲージ変換の分だけ冗長性があり，その冗長性を排除するために，特別なゲージをとる必要があります．このことを**ゲージ固定**といいます．

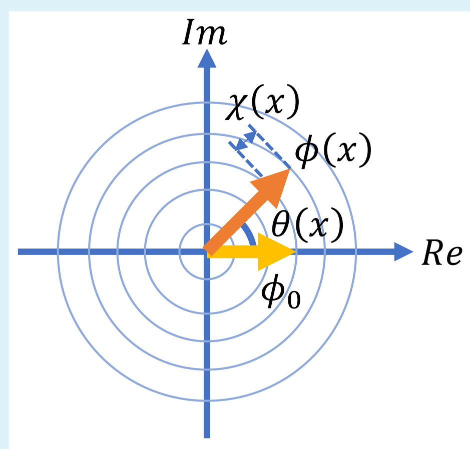
例として，U(1)ゲージ群が複素スカラー場ϕに作用している場合を考えます．このとき，複素スカラー場の「角度方向」には自由に運動することができるため，このモードが質量0のNG粒子として現れます．しかし，U(1)は角度を変える変換なので，角度が0になるようにゲージを固定することができます．



このように，ゲージ対称性の枠組みでは，**Nambu-Goldstone粒子は物理的でない**ことが分かります．

ゲージ場の質量獲得

自発的対称性が破れているとき，$\phi=(\phi_0+\chi(x))e^{i\theta(x)}$として真空$\phi=\phi_0$からの摂動$\chi,\theta$を定義すると，Lagrangianは次のようになります．



$$L \approx \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{ゲージ場}}+\underbrace{\frac{\mu}{2\lambda}\left(\partial_\mu\theta-eA_\mu\right)^2}_{\text{共変微分}}+\frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi-\mu^2\chi^2$$

$\theta(x)=0$とゲージ固定*し，$A_\mu\to B_\mu$と書き換えると，Lagrangianは次のようになります．

$$L \approx -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}+\underbrace{\frac{e^2\mu}{2\lambda}B_\mu B^\mu}_{\text{動きにくさ}}+\frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi-\mu^2\chi^2$$

「動きにくさ」は質量に対応するため，**「ゲージ場が質量を獲得した**」**といえます．

*　ゲージ固定せずに，$B_\mu=A_\mu-\partial_\mu\theta/e$とおいても同様の結論が得られます．
** ゲージ場はベクトルボゾンという粒子に変わります．