



# イントロダクション：界面成長

## 界面成長とその例

机にコーヒーをこぼしてしまったあなた。そのシミをよく観察してみると、運が良ければリングが見られるかもしれません。実は、その環はコーヒーの微粒子が堆積したもののなのです（詳細→p2）。図1を見ると、粒子がどんどん積もっていき、リングの凸凹な境界が形成されていく様子が分かります。

このような境“界面”の広がりを「**界面成長**」といいます。他の様々な例を見てみましょう。

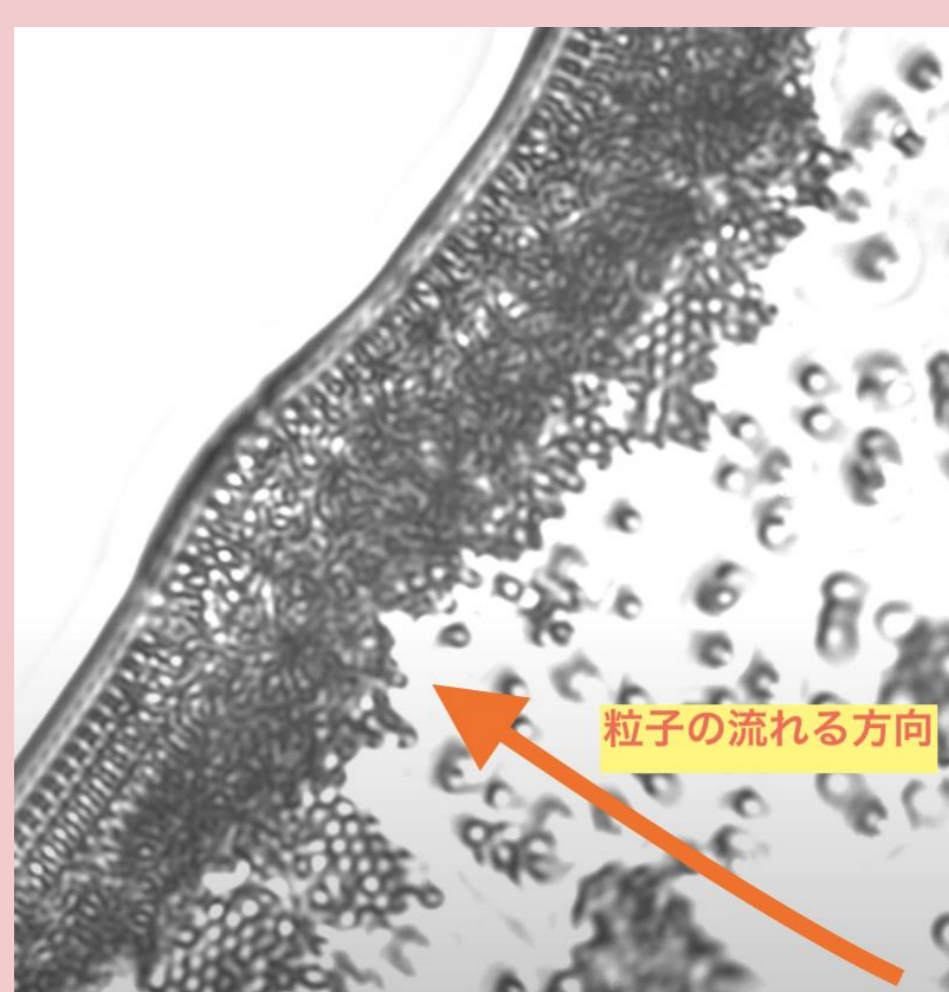


図1：コーヒーリング効果における粒子の堆積

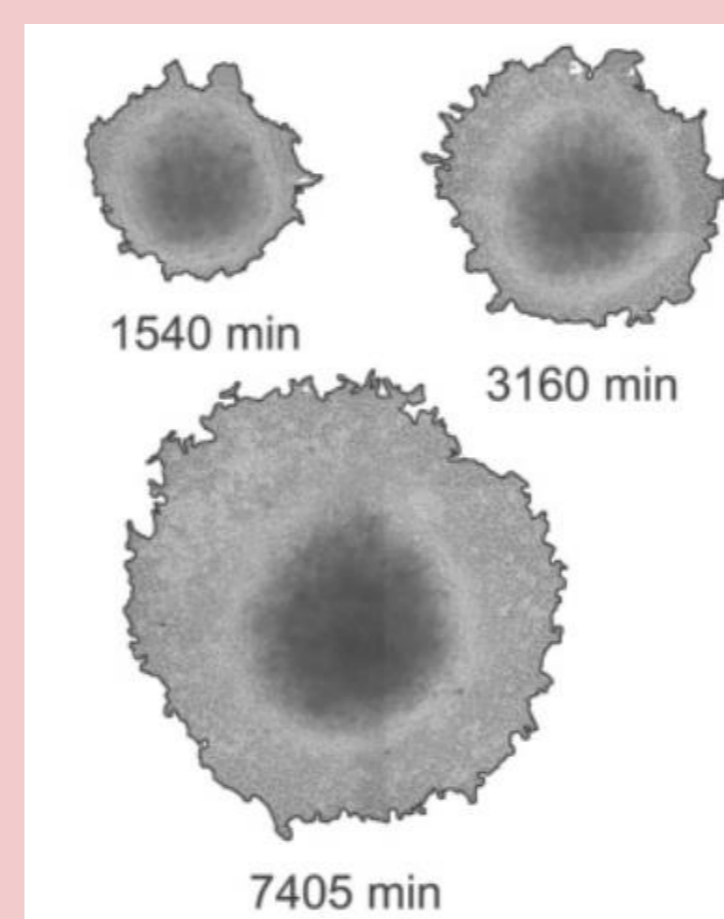


図2：がん細胞(HeLa細胞)集団の増殖

M. A. C. Huergo., et al. (2012). Phys. Rev. E 85, 011918.  
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.85.011918>



図3：紙の燃焼

図2では、がん細胞が細胞分裂によって増殖することで、その集団の領域が時間と共に拡大しています。図3では、紙に点けられた火がどんどん燃え広がっています。他にも、紙への水の吸収など多くの自然現象で界面成長が見られます。

## 界面成長の魅力

身の回りの自然現象は変化に満ちあふれています。その身近さとは裏腹に、人間はそうした複雑極まりない変化の多くを未だ理論的に完全には説明できていません。例に漏れず、界面成長もこのような**非平衡現象**（詳細→p5）の一例です。

しかし、鋭い観察と深い洞察によりそうした混沌の中から普遍的な法則性を見つけ出すことが物理学、ひいては科学の醍醐味でしょう。上の図1～3の界面の形状をご覧ください。一見、この界面の揺らぎ（凸凹）はランダムな形に見えるのですが、実は計測を通じてその凹凸具合を評価してみると、非常に似ていることが分かったのです。そこでこれらを一つの**クラス**（グループ）にまとめて統一的に説明することが可能となりました。

改めて、図1～3の観測対象はコーヒーの微粒子や細胞といった顕微鏡を使わないと観測できないミクロなものから、紙の燃焼といった肉眼でも見えるマクロなものまで様々な大きさをしています。さらに、界面の成長は堆積（物理）、細胞分裂（生物）、燃焼反応（化学）といった全く異なる機構から生じているのです。こうした異なるサイズとメカニズムの界面成長がある普遍性で貫かれているなんて、なんとも不思議でワクワクする話だと思いませんか？

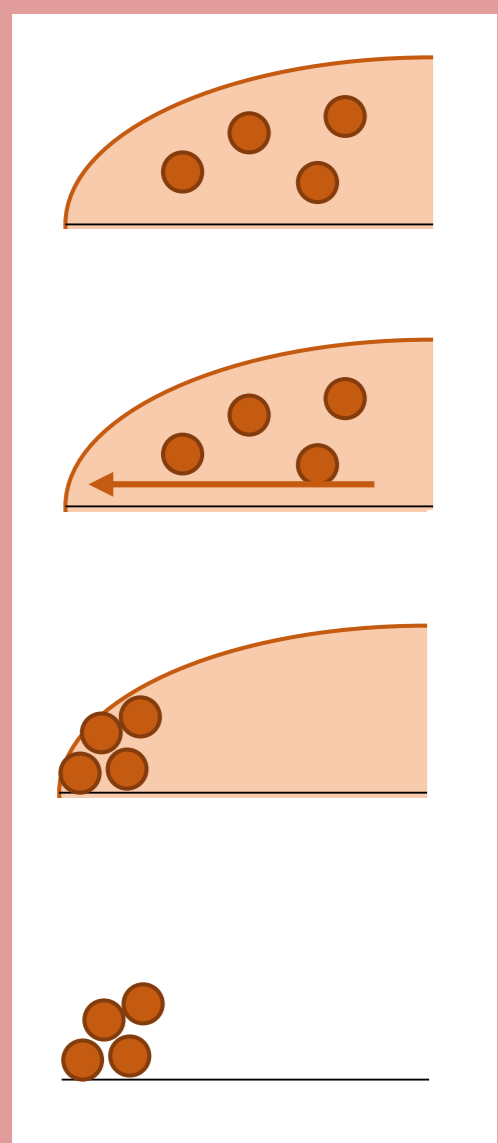




# 実験 1 : コーヒーリング効果

## コーヒーリング効果とは？

コーヒーを机にこぼすと、乾いたあとに円形の模様ができます。この現象は**コーヒーリング効果**と呼ばれ、その仕組みは次のようなものです。



- ① コーヒーが机にのる
- ② ふちあたりのコーヒーが蒸発することで流れができ、粒子がふちの方に引き寄せられる
- ③ 粒子が溜まっていく
- ④ 水分が蒸発し、粒子のみが机の上に残る

この一連のプロセスを顕微鏡を使って見ると粒子がふちに「積もっていく」ように見えます。この積もっていく様子を詳細に調べるために実験が行われました。

## 界面成長のクラス

実験では高さ分布の標準偏差という量を測定しました。すると、ビーズの形に応じて標準偏差の時間変化の仕方が異なることがわかりました。これらは標準偏差が時間の何乗に比例して成長するか、という量(成長指数)によって特徴付けられます。これを分類したものを**クラス**といいます。

ビーズの形	クラス	成長指数	理論値
球形	ポアソン	0.48	0.5
球に近い楕円球	KPZ	0.37	0.33
歪な楕円球	qKPZ	0.68	0.68

表. ビーズの形とクラスの対応。理論値はモデルから計算したもの。

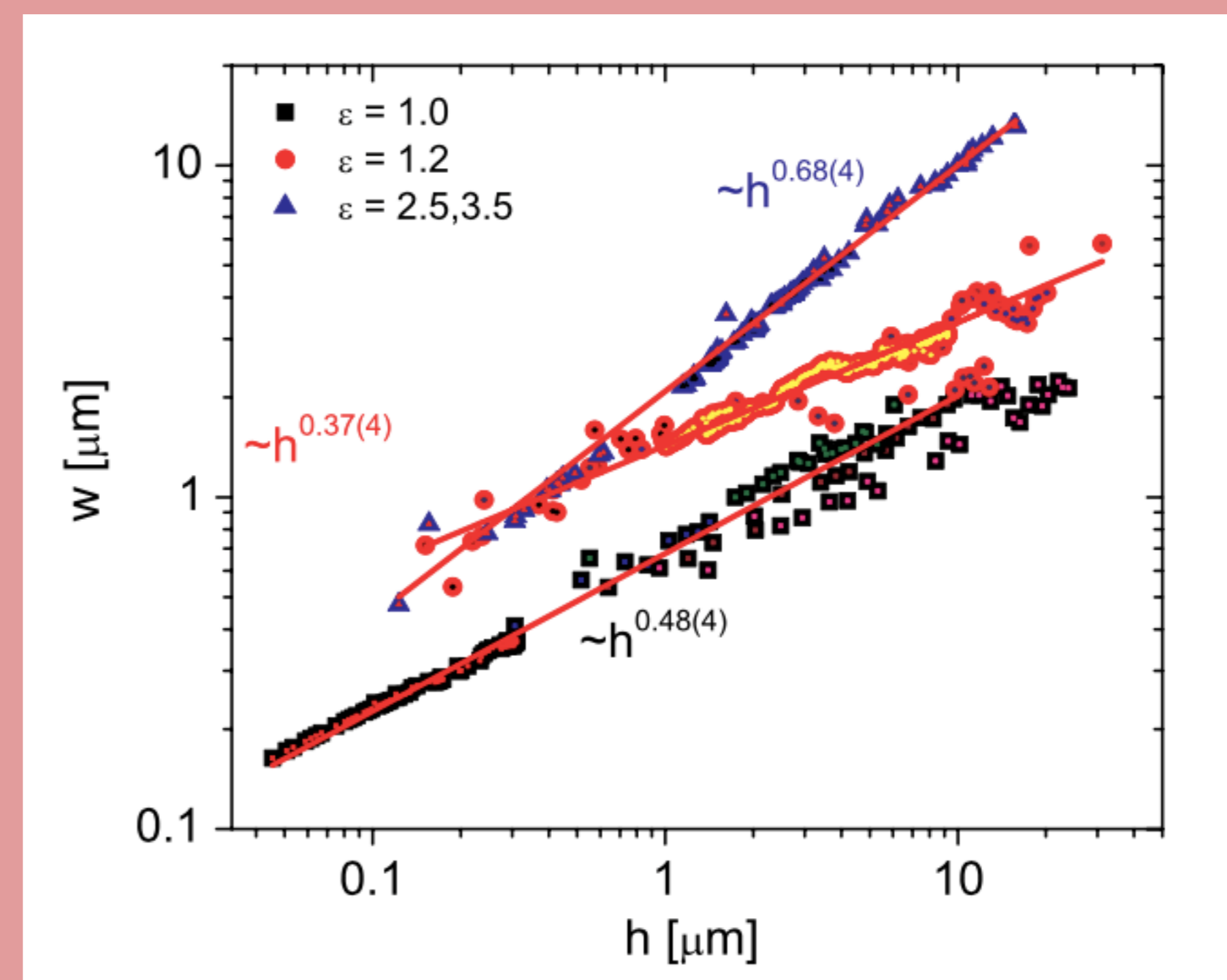
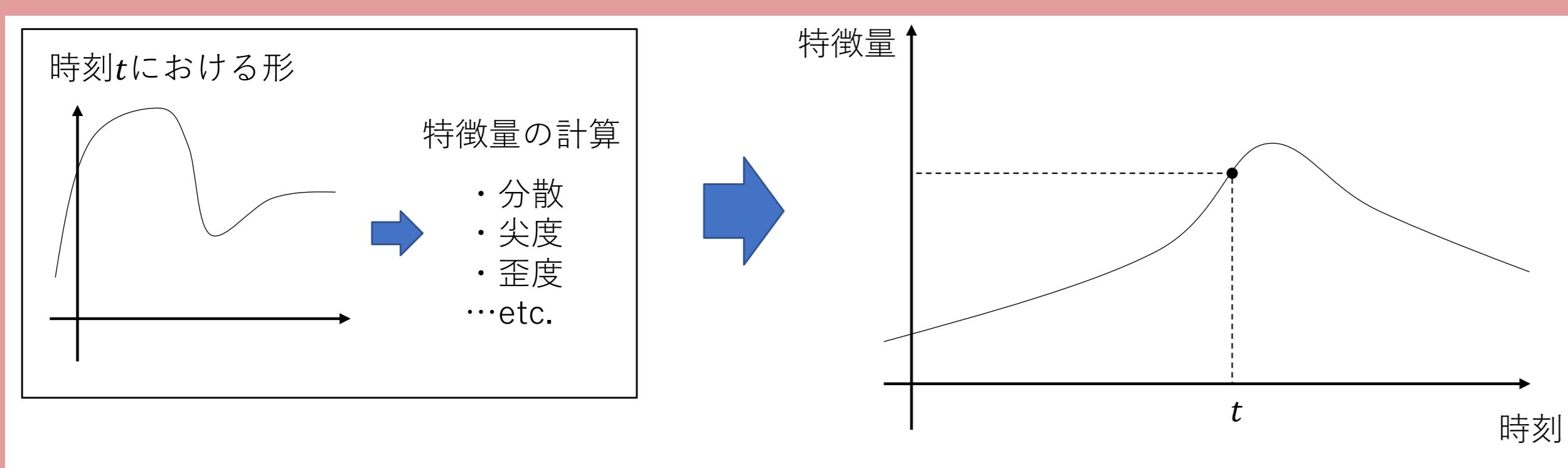


図. 横軸は平均高さ(時間の代わりに使っている), 縦軸は標準偏差を表す。

Peter. J. Y., et al. (2013). *Phys. Rev. Lett.*, 110(3), 035501.  
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.035501>

## 実験方法

コーヒー粒子の代わりに、形や大きさの決まったビーズを用いて実験を行います。ビーズは球形のものと楕円球のものを用意します。ビーズが積もってできる**界面の形が時間とともにどのように変化していくか**を測定します。具体的には、まずふちのそれぞれの場所における界面の高さを測定し、その分布を求めます。その分布の特徴的な量を求め、それを各時刻ごとに行なってグラフにプロットしていくことで「形の時間変化」を求めることができます。



## 意味

上で示したクラスのうち、**KPZ**というクラスに着目します。このクラスは少し凝ったモデルで記述され(詳細→p6)、いくつか非自明な性質を持ちます。実はKPZクラスはコーヒーリング効果に限らず、様々な界面成長に登場することが知られています。このことから、KPZクラスは**非自明な性質が普遍的に現れる**というとても面白い物理につながっています。





## 実験2：紙の吸水と界面成長

### 紙の吸水現象と実験

レポートを書いたり宿題をしているときにコップを倒してしまい、紙が濡れてしまった！ しかも濡れた部分がどんどん広がっていってしまう！ こんな経験のある方は多いのではないのでしょうか？ この身近な現象も、濡れた領域が広がっていくという意味で界面成長の一種です。特にここでは、下の写真の様に濡れた領域が勝手に上に広がっていく様な状態を見ていきます。



実験自体は簡単で、手順は次の通りです。

①左の写真のように紙を固定しぶら下げ、下端を水を張った水槽につける

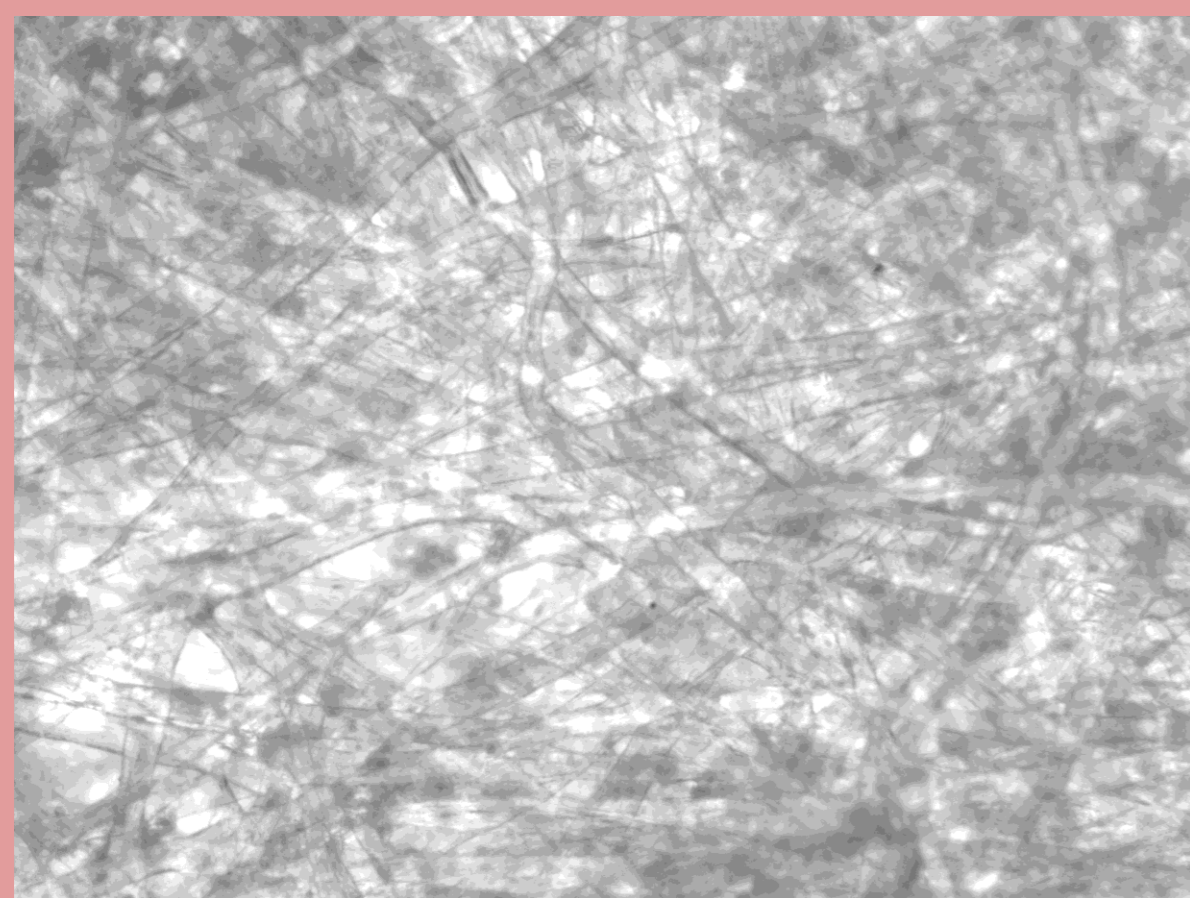
②濡れた領域の様子を観察する。

こうして得た濡れた領域と乾いた領域の境界は、写真の様にガタガタしたものになっています。ここにもなにか法則はあるのでしょうか？

### 紙の吸水現象の特徴

液晶の実験では、KPZクラスというものに属する界面成長を見ましたが、実は紙の吸水現象で見た界面成長は $qKPZ$ というクラスに属していると考えられています(詳細→p6)。

この $qKPZ$ クラスの特徴の1つに、界面成長が途中で止まりうるということがあります。ここではその原因を考えてみましょう。



紙の繊維の拡大写真（倍率10倍）

そもそも紙の吸水現象で境界がランダムにギザギザするのは、紙の繊維が左の写真のようにランダムに折り重なっているからです。

これを反映したモデルとして、格子状のモデルを考えます。このモデルでは各格子は確率 $p$ で“ブロック”されています。濡れた格子は隣接しているブロックされていない格子のうち1つをランダムに選び濡らします。また、濡れたセルの下にあるセルは全て濡れます。

このステップを繰り返していくと、 $p$ がある値より小さいときは界面が止まることなく成長しますが、 $p$ がある値より大きくなると止まるようになります。

また、実際の紙の吸水現象では、濡れた領域が大きくなるほど紙を吸水する力が弱くなり、これが $p$ が大きくなることに対応するため、途中で紙の吸水が止まってしまいます。





# 実験3：液晶の界面成長

## 液晶による実験の意義

ここまでコーヒーリング、紙の吸水の実験を見ていただきましたが、これらは“厳密に行うのが難しい”実験です。しかし、物理の理論を検証するためには、厳密な条件の下での実験が必要となります。投げたボールの辿る軌跡が放物線に従うことでさえ、空気抵抗の影響を考慮しなければなりません。ごく僅かな要素にも敏感な非平衡現象の理論を確かめるには、相応の厳密な実験が求められます。ここでは、理論的に導かれたKPZ方程式が界面成長を記述する方程式として正しいことを示した、液晶による実験について紹介します。

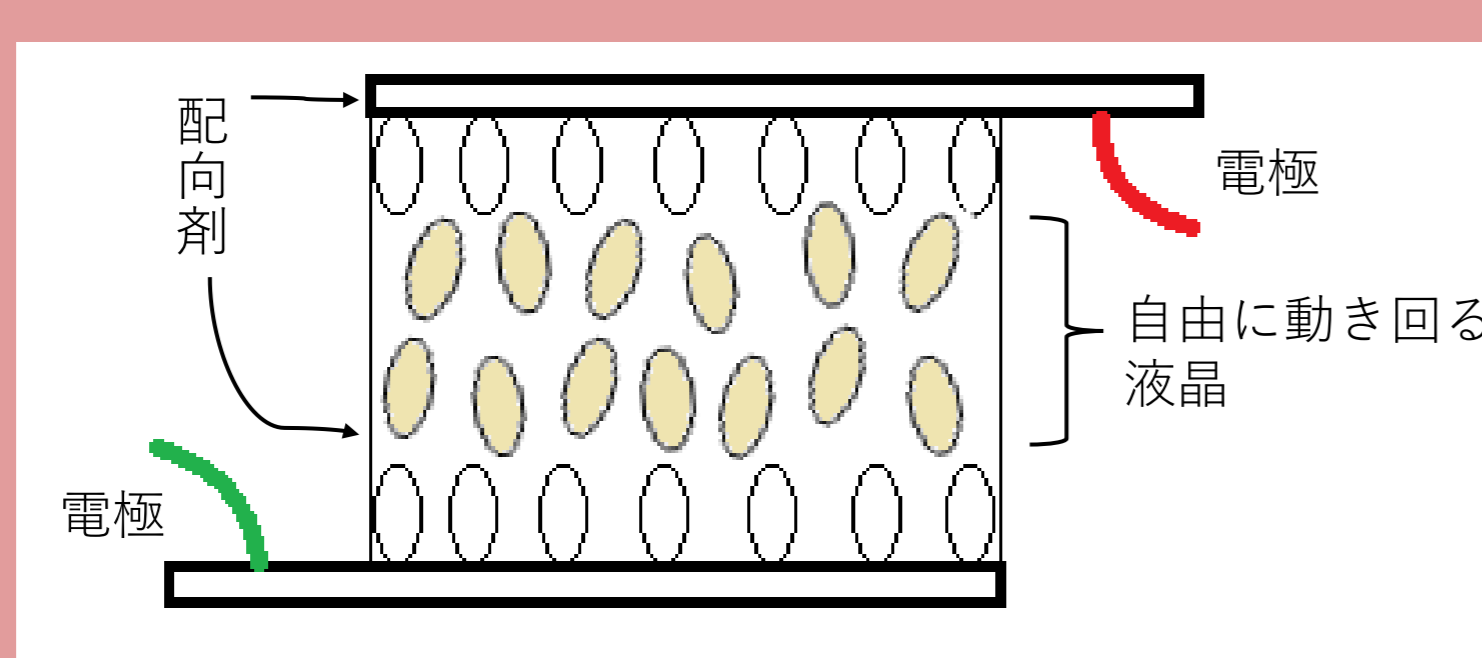
## 厳密な実験のために

分子の位置は不規則で液体のように動くこともできる一方、分子の向きは同じ方向を向く、という性質を持った物質を**液晶**といいます。

液晶分子には、かけられた電場によって様々な反応するという特徴があり、強く変化の激しい(振動数の大きい)電場をかけるほど、分子の向きが揃わなくなります。顕微鏡で観察すると、分子の向きが揃っているほど光が通りやすいので、分子の向きの乱れを反映した模様が観察されます。

特に強い電場をかけた時には、“乱流相”と呼ばれる2つの相、準安定な相のDSM1と、安定な相のDSM2が生じます。徐々に電場を強くすると、はじめはDSM1が現れますが、きっかけを与えるとより安定なDSM2に相転移します。このDSM2の領域は、付近の液晶の乱流により広げられます。

実験では、電気を通すガラスで作られた“セル”の中の液晶を観察します。セルを用いることで、空気の流れや湿度などの影響を除外することができます。ガラス板の表面には、電場がかかっていないときの液晶の向きがガラス板に垂直に揃うように加工が施してあります。相転移のきっかけには、レーザー光が用いられます。これらの条件を整えることで、理想的で再現可能な界面成長の観察が可能となります。

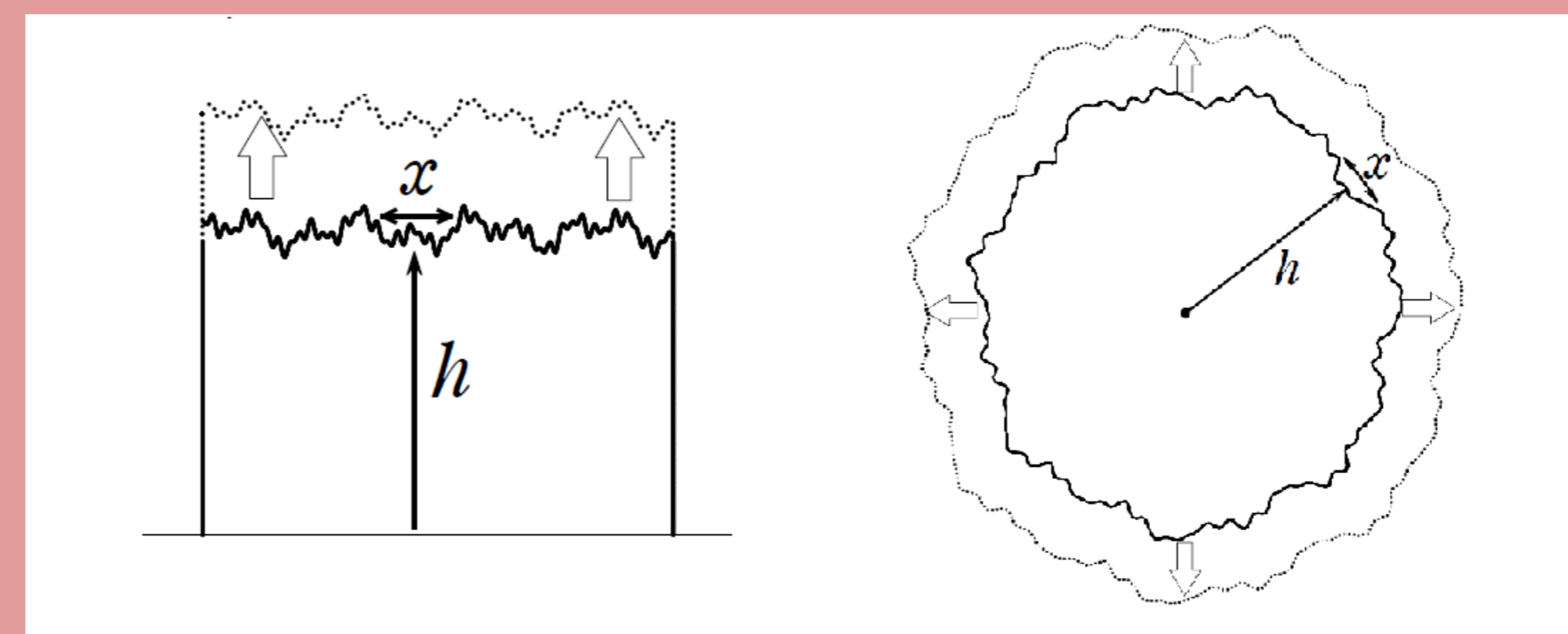


液晶セルのイメージ

## 観察される界面と解析

レーザー照射による核生成の仕方によって、2種類の界面を作ることができます。

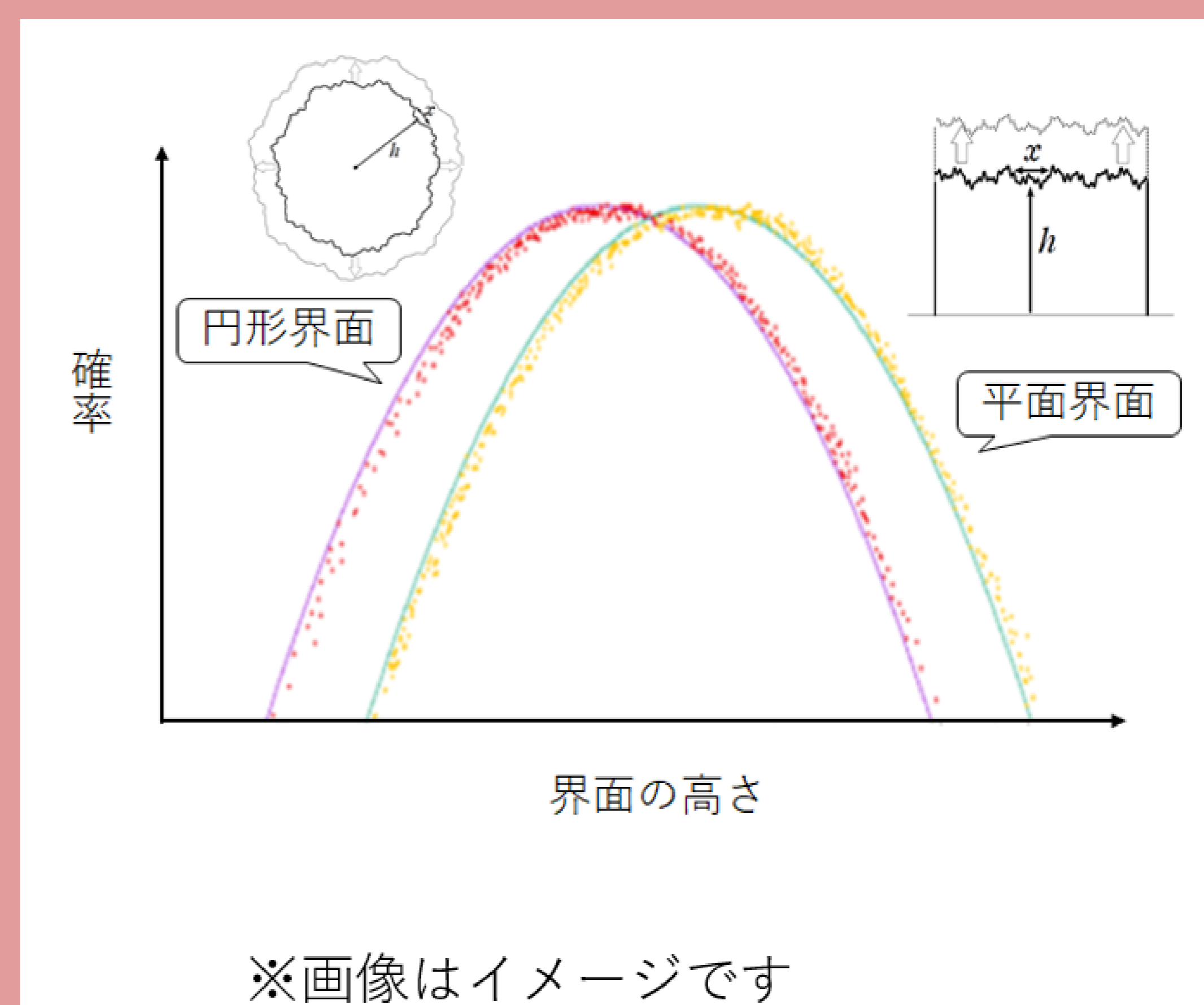
- ① レーザーを一点に当てると、点の核を作ることができます。DSM2の領域はこの点から円形に広がるので、円形界面を観察できます。
- ② レーザーを直線状に当てると、直線的な核を作ることができます。DSM2の領域はこの点から平面状に広がるので、平面界面を観察できます。



界面の成長の様子を撮影した画像をもとに、時刻  $t$ 、位置  $x$  における高さ  $h(x,t)$  を記録します。この記録をもとに、界面の成長度合いのばらつきを解析し、理論モデルであるKPZ方程式の検証を行います。解析は次のように行われます。

- ① KPZなら従うはずの変換を  $h(x,t)$  に施す  
→成長し始めてすぐの界面と、しばらく成長した界面のばらつきを直接比較できるように
- ② 変換された  $h(x,t)$  の分布を調べる
- ③ KPZのモデルの予言する分布を②と比較する

下のグラフでは、実験結果が点で、理論的な解が実線で表されています。理論モデルは、円形界面と平面界面で異なった分布を予言しますが、実験結果からは、いずれの形状の界面でも、理論と実験が十分な精度で一致することが読み取れます。







# 平衡と非平衡

## “平衡”とは？

非平衡の世界に入る前にまずは平衡の概念から考えていきましょう。

そもそも平衡とは粒子レベル（ミクロ）での変化はの量においては変化やばらつきがないあったとしても人が簡単に測定できるレベル（マクロ状態のことをいいます。

この状態がマクロな状態を扱う熱力学、それとの整合性を保ちつつミクロな状態を扱う統計力学の基本となる状態です。

## “非平衡”を考える

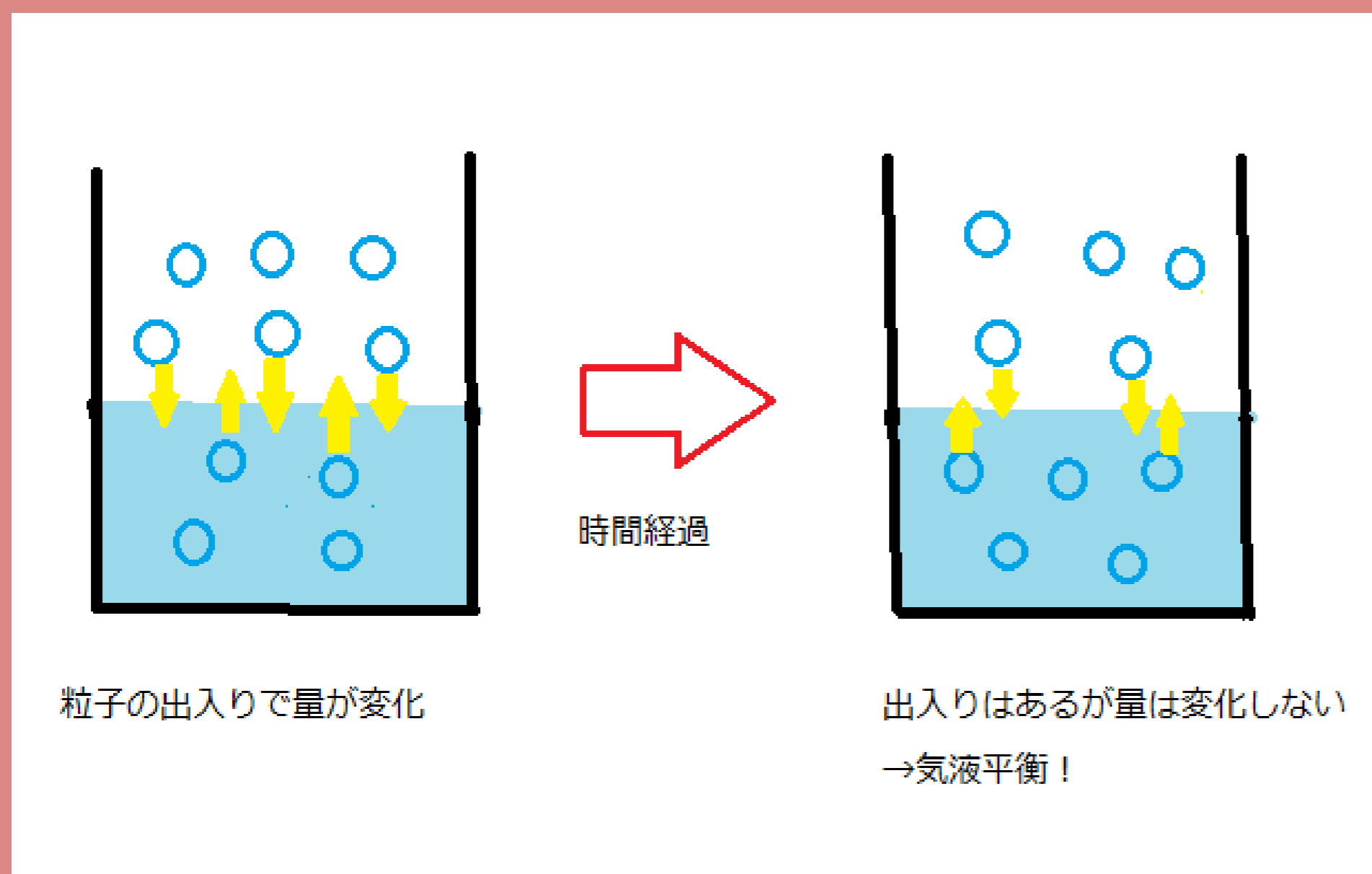
前節でのべたような平衡な例では体積や粒子の数といった単純な足し算が成り立つ量の組と温度が分かればその系の性質を完全に把握でき現在の物理学で理解ができます。

しかし、どちらの例も初めの状態では変化があった（＝平衡ではなかった）ことからわかるように現実の多くの現象は“非平衡”と呼ばれ平衡状態ではありません。また、平衡に近くても実際は外から粒子のやりとりや圧力、温度の変化といった様々な影響を受け、平衡は保たれないことが多いです。

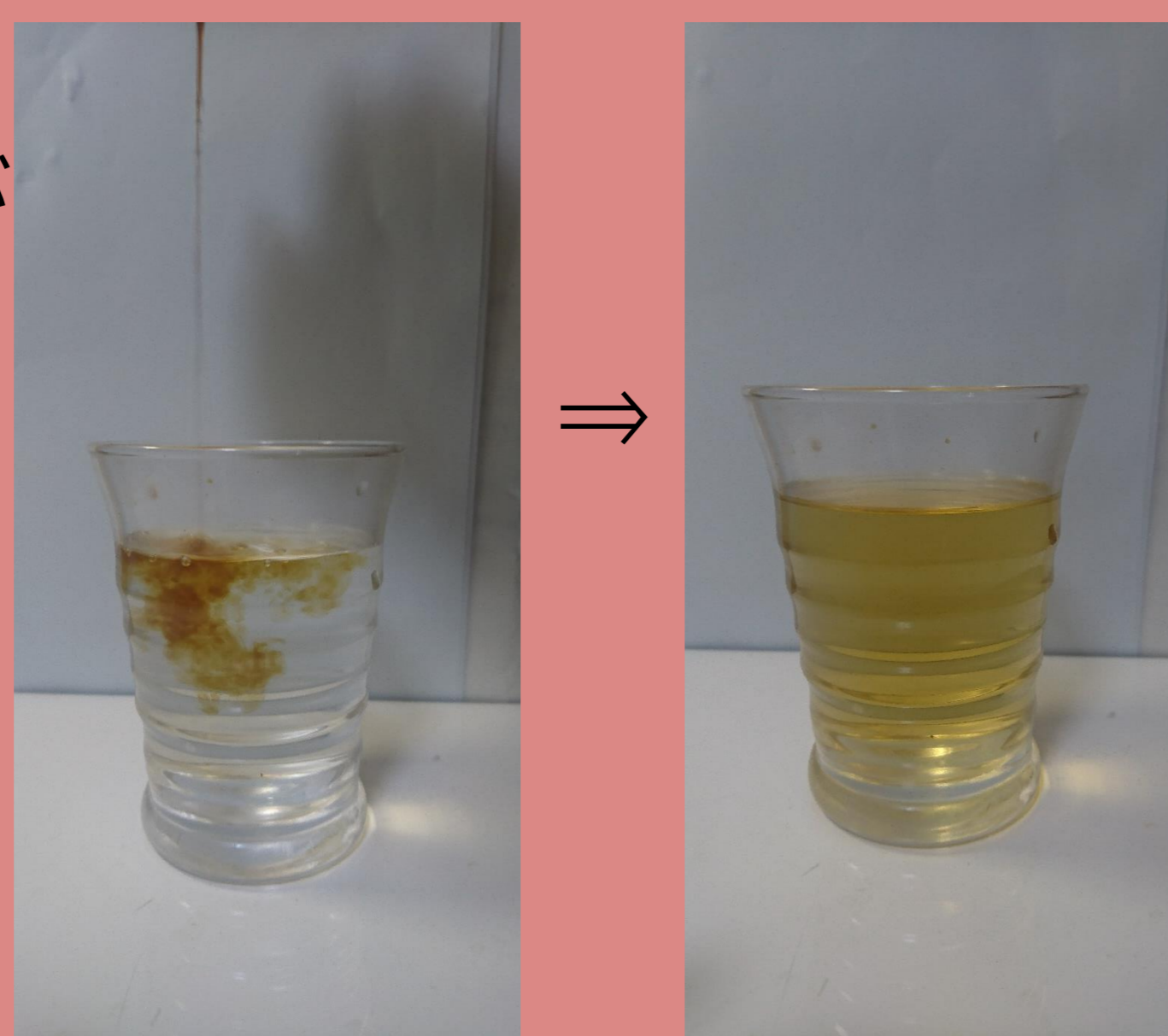
これらの状況を“非平衡状態”とよびます。現在の物理学では多くの非平衡状態に対して厳密には解けません。今までに発見された多くの式が平衡状態やそれに近い状態の枠組みでしか有効性が示されていないものが多く、非平衡分野における研究は困難とされています。

## “平衡”の例

ここからは平衡状態の例を見ていきましょう。平衡という概念は様々なところで出てくるがここでは特に蒸発の例と拡散の例を考えてみます。



上図のように蓋をした容器に水を入れると初めは水の量が増えるがいずれ見かけの変化がなくなります。しかし、実際は水分子ごとに見ると無数に蒸発と凝縮を繰り返しており、全体としては気体の水と液体の水の量が変化していません。これを気液平衡と呼びます。次に下図のように水に色水を垂らすと初めは垂らした周りだけ濃いですが次第に拡散していき最終的に全体が均一となります。この状態も、分子一つ一つは動いていても全体での濃度は一定であり、平衡状態といえます。以上の例から分かるように様々な現象が初めは平衡でなくともいずれ平衡へと向かっていきます。



$$\text{平衡} \rightarrow S(T,X) - S(T,X') = Q/T \rightarrow \text{解ける!}$$

(クラジウス関係式)

$$P = \exp(-\beta H) / Z$$

(カノニカル分布)

非平衡 → 簡単な式がない → 解けない…

## 非平衡統計の魅力

では非平衡のどこに魅力があるのでしょうか。

かつて世界初の人工雪を降らせた中谷先生はミクロな物理学では東京タワーの上から落とした紙がどう落ちるかは分からない、と指摘されたそうです。これはまさに乱流とよばれる非平衡の問題です。この様に他では扱えない現実世界の問題を扱うことが可能となります。

また、原子核分野や惑星形成や重力多体系を扱う宇宙物理分野、さらには細胞の増殖といった生物分野などでも非平衡統計力学の概念は応用されており、様々な分野から発展が強く求められています。

この様に非平衡は非常に将来性と魅力に満ち溢れた分野なのです。





# 界面成長の数理モデルとクラス

## クラス

系の物理量がパラメータに対して、べき乗に比例するような値をとることがよくあり、べきの指数で物理現象を分類できます。これによる分類をクラスと呼びます。

$$w(l, t) \sim t^\beta F_w(lt^{-1/z})$$

指数:  $\beta, z$

界面成長では、時刻 $t$ のときの幅 $l$ の範囲のガタガタ具合、 $w(l, t)$ (標準偏差の空間平均値)が、指数によって記述できます。

## Edwards-Wilkinson 方程式

界面成長を記述するのに必要最低限の項目を盛り込んだ、最も簡単なモデルがあり、**Edwards-Wilkinson 方程式**(以下**EW方程式**)と呼ばれています。数式は以下のようです。

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} h(\mathbf{x}, t)}_{\text{成長速度}} = \underbrace{\nu \nabla^2 h(\mathbf{x}, t)}_{\text{拡散の影響}} + \underbrace{\eta(\mathbf{x}, t)}_{\text{ノイズ}}$$

この方程式の属するクラスを**EWクラス**といいます。EW方程式は線型の方程式なので、さまざまな性質を比較的容易に導くことができます。

しかし、EW方程式では現実の物理現象を上手く表現できていません。理由としては

- ・実際の現象では非線形の効果がよく現れるが、この方程式は線形である
  - ・ $h \rightarrow -h$ の変換に対して不変な方程式であり、向きが意味を持っておらず、本質的には界面成長でない
- といった点が挙げられます。

## KPZ方程式・KPZクラス

EW方程式を改良したものが、

**Kardar-Parisi-Zhang 方程式**(以下**KPZ方程式**)です。

$$\frac{\partial}{\partial t} h(\mathbf{x}, t) = \nu \nabla^2 h(\mathbf{x}, t) + \underbrace{\frac{\lambda}{2} (\nabla h(\mathbf{x}, t))^2}_{\text{非線形の効果}} + \eta(\mathbf{x}, t)$$

簡単に言えば、EW方程式に非線形の効果をもっと簡単に導入したもので、と言えます。

非線形の方程式は、線形の方程式よりも解くことが難しく、多くはコンピュータによる数値計算で調べることとなりますが、**1次元のKPZ方程式は数学的な厳密解が知られており**、物理現象の理解への糸口となっています。

KPZ方程式の属するクラスを**KPZクラス**と呼び、様々な物理現象が、このKPZクラスに属していることがわかっています。前述の厳密解の発見もあり、KPZクラスは重要な役割を果たしています。

## qKPZ方程式

他にも、様々な方程式やモデルとそれらのクラスを考えることができます。ここでは、例として**qKPZ(quenched KPZ)方程式**を紹介します。

$$\frac{\partial}{\partial t} h(\mathbf{x}, t) = F + \nu \nabla^2 h(\mathbf{x}, t) + \frac{\lambda}{2} (\nabla h(\mathbf{x}, t))^2 + \underbrace{\eta(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}, t))}_{\text{場所に依存するノイズ}}$$

ノイズを場所に依存するものに変え、定常的な成長を表す定数 $F$ を加えて得られます。和紙の吸水など、ノイズ(乱雑さ)が空間的な配置に由来する場合には、こちらが良いモデルになると考えられます。

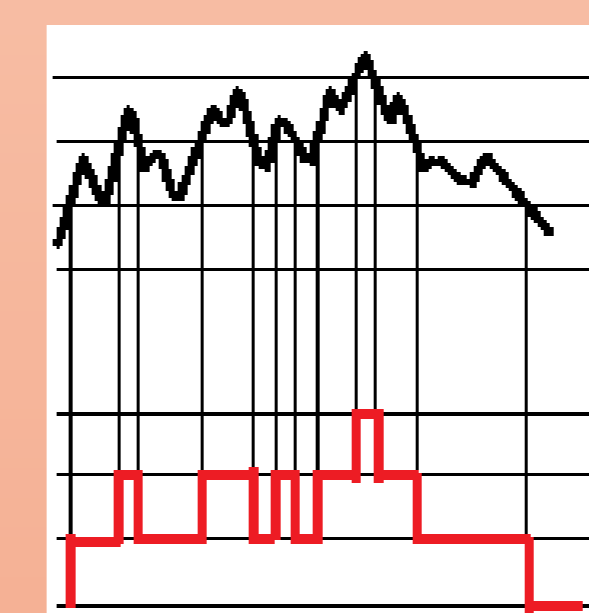




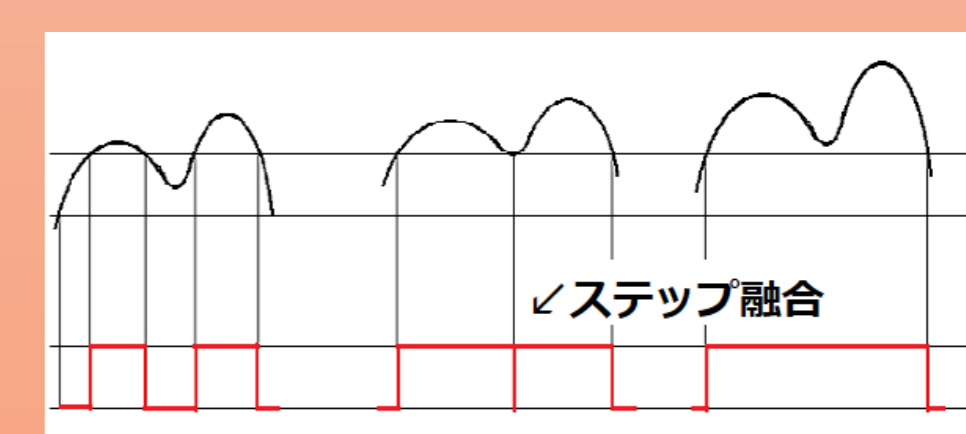
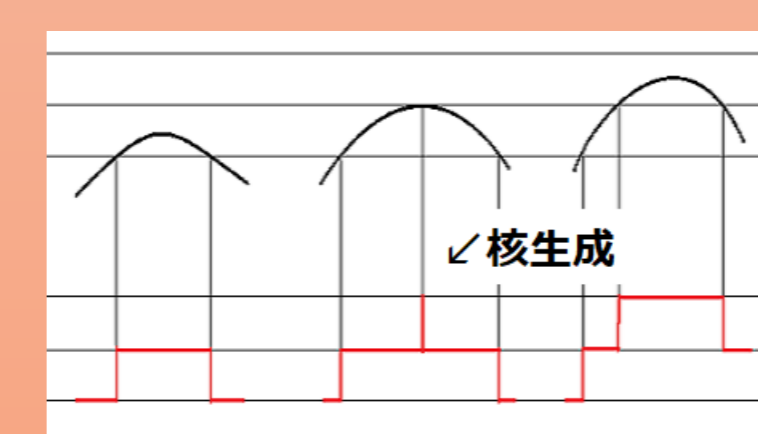
# 一次元KPZ方程式の解とサブクラス

## 界面成長のモデル化

界面成長を簡単に扱うため、等高線により界面を離散化します(右図)。離散化された界面は、もとの界面の成長に伴い、核生成とステップ融合の二つの性質を示します。この界面について、核生成の起こる確率を単位時間・単位長さあたり**1**、ステップの広がる速さを単位時間あたり**1**として、時刻**t**、位置**x**における界面の高さ**h**を考えます。

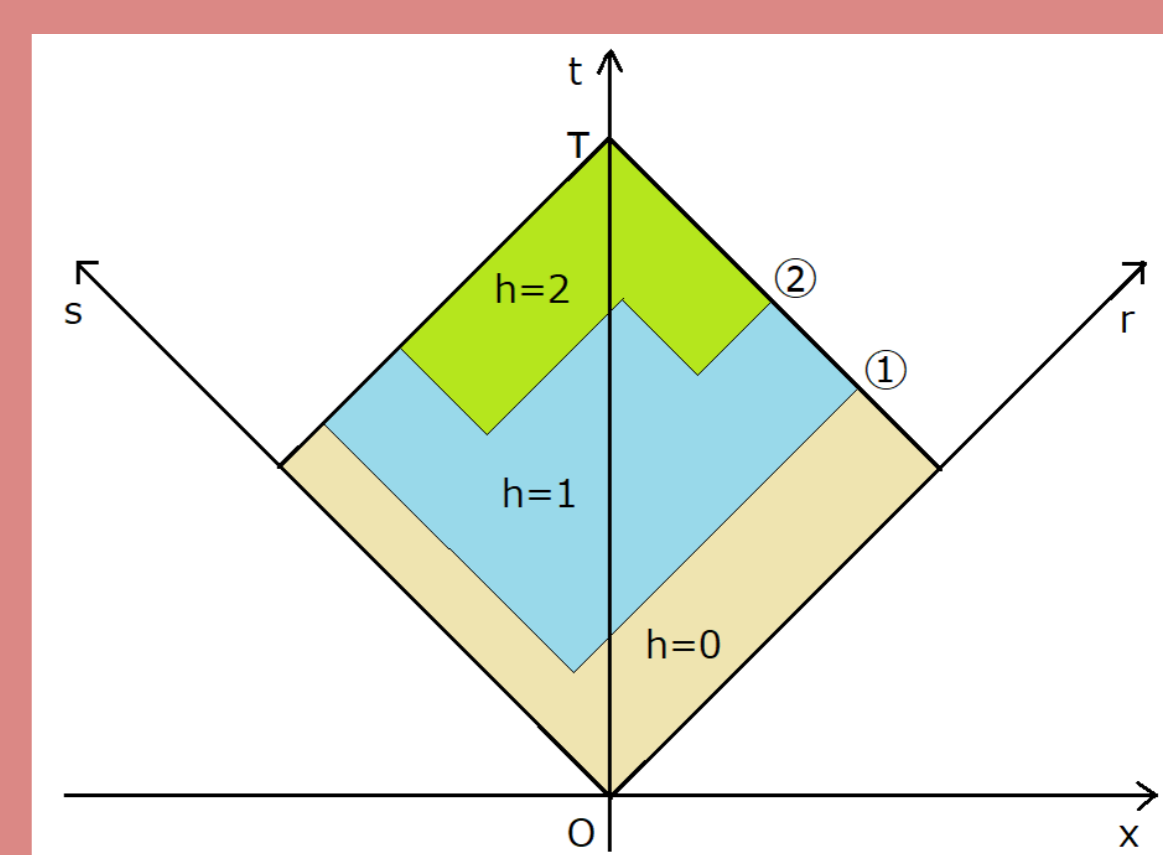


上図: 界面の離散化の例  
下左図: 界面の成長に伴う核生成  
下右図: 二つの界面の谷が等高線を越えることによるステップの融合



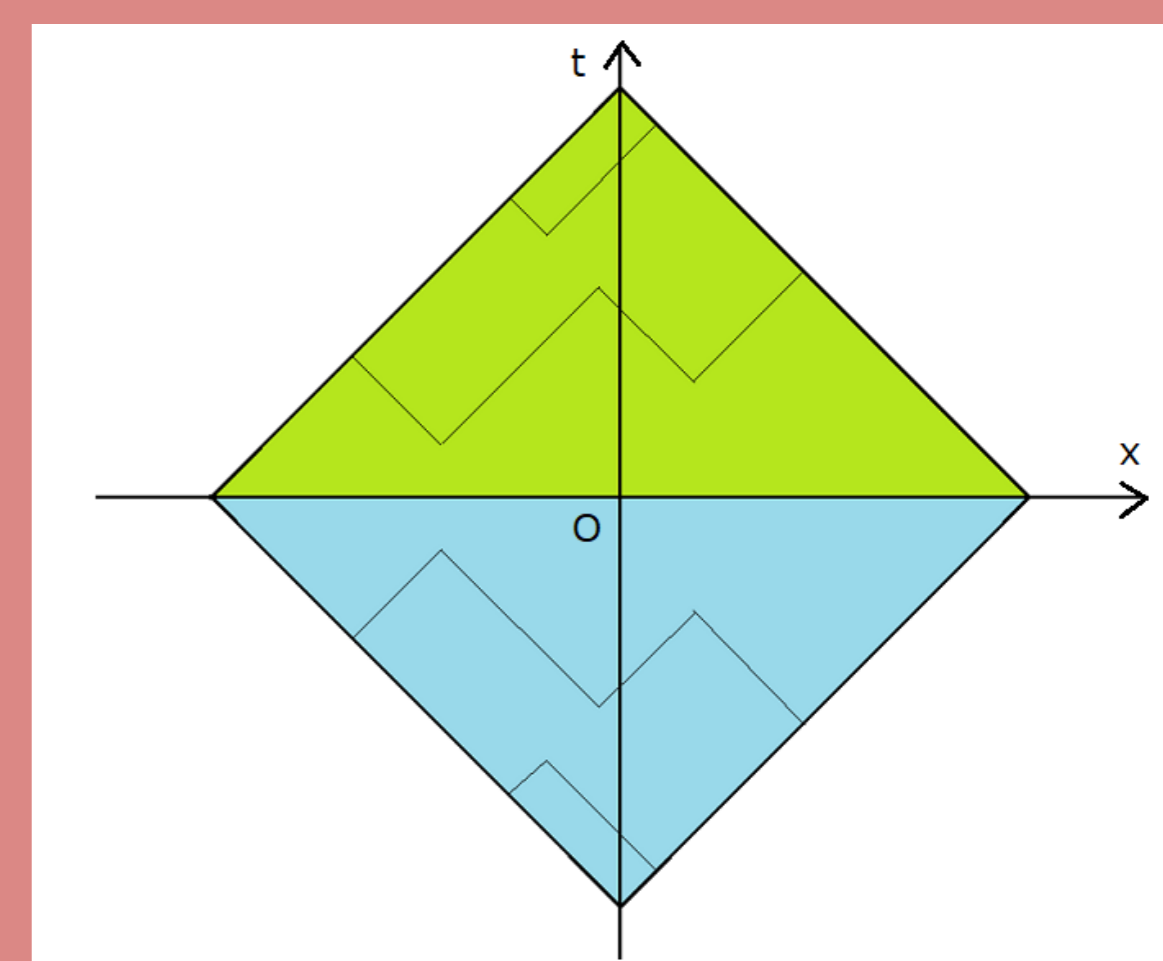
### ○円形界面

$h(0, \tau)$ に寄与を持つ核を、 $|x| \leq \tau$ の領域で生成されたものに限ることで、円形の界面成長を表すことができます。ある点で核生成が起きると、その点から広がるステップの両端は図の①の軌跡をたどります。**2**つのステップの軌跡の交わりはステップの融合に対応します。これは②で表された軌跡となります。ステップの両端の軌跡は、ステップの高さの境界線となっているため、 $h(\mathbf{0}, \tau)$ は、原点と点 $(\mathbf{0}, \tau)$ を結んだときにまたぐ軌跡の本数と一致します。



### ○平面界面

平面界面の場合、 $h(\mathbf{0}, \tau)$ に寄与を持つ核は図の黄緑色の領域で生成されたものです。この領域を  $x$  軸について対称移動した水色の領域と合わせて考えると、円形界面と似た図形を描くことができます。そのため、円形界面の図形に線対称性を要請したものとして、平面界面を取り扱うことができます。



## 解とサブクラス

モデル化された円形界面の界面成長の問題は、数学的には

$h(\mathbf{0}, t) =$  長さの平均が  $t^2/2$  のポアソン分布に従う、ランダムな数列の単調増加部分列の長さという問題に帰着されます。この問題の解は、ある確率分布に従うランダムな数を  $\chi$  として、

$$h(0, t) \cong \sqrt{2}t + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^{1/3} \chi$$

となることが知られています。この解の一項目は界面の平均的な成長を、二項目が界面の揺らぎを表しています。揺らぎの項は **t の 1/3 乗に比例しており**、KPZ方程式のスケーリング指数に一致するので、この解が確かに一次元のKPZ方程式の解となっていることがわかります。

平面界面について解いた場合にも、似た形の解が得られます。ただし、線対称の条件が課されているため全く同じとはならず、 $\chi$ の従う確率分布が円形界面の場合とは異なった分布となります。このように、ゆらぎのスケーリング指数(今の場合 **t の指数 1/3**)が等しい**普遍クラス**の中にも、 $\chi$ の従う確率分布が異なる、さらに細かいグループが存在します。このグループのことを、**サブクラス**と呼びます。

KPZ方程式の解として  $\chi$ の従う分布が数学的に求まると、理論モデルとしてのKPZ方程式を実験の結果と比較することが可能となります。円形界面と平面界面について、この理論の予言が高い精度で実験結果に一致することを示したのが、液晶による厳密な実験です。実験により保証されたKPZ方程式の理論モデルは、理想的な環境での非平衡現象を理解するきっかけとなることが期待されています。





## まとめ

### KPZ方程式の役割

KPZ方程式の発展は非平衡統計物理学においてどのような役割を果たしたのでしょうか？

まず、KPZ方程式が表すモデルが**“普遍的な”界面成長を記述している**ことが重要です。このため、一見異なる現象でも似たような性質を見いだすことができました。(紙の吸水、コーヒーリング効果、液晶の乱流成長などたくさんの関係する現象を紹介してきました)

また、**1次元のKPZ方程式が最近の数学の発展によって厳密に解くことができるようになった**ことが重要です。解くことができるモデルを**可解模型**と言いますが、平衡統計物理学でも可解模型であるイジングモデルが相転移現象の理解において大きな役割を果たしました。

最後に、KPZ方程式が平衡状態を記述する可解模型とは異なり、**初期状態に依存して異なる“サブクラス”を持つ**ということが重要です。このような性質はその他の非平衡モデルでも発見されており、平衡統計物理学では見られない非平衡統計物理学特有の性質を発見することができたといえます。

### 今後の課題・発展

KPZ方程式について解けるようになった部分や理解が進んだ部分を取り上げてきましたが、KPZ方程式についてわかっていないこともまだあります。

例えば、2次元以上のKPZ方程式について普遍クラスのスケージングは未だに不明です。また、サブクラスを生んでいる物理的な機構は何かなどもわかっていません。

平衡統計物理学では、イジングモデルなどの可解模型の出現のあと繰り込み群や共形場理論で相転移の本質的理解が進みました。非平衡統計物理学においても似たような発展をするのか。今後の発展からも目が離せません。

今回の展示において東京大学の竹内先生をはじめとする竹内研究室の皆さんに実験の指導やポスターに関するアドバイスをいただきました。皆さんのおかげですてきなポスターにできました。この場を借りて感謝の意を表します。ありがとうございました。





## 参考文献

### 参考文献

- [1] M. A. C. Huergo, M. A. Pasquale, P. H. Gonzalez, A. E. Bolzán, and A. J. Arvia, Phys. Rev. E85, 011918 (2012).
- [2] Peter J. Yunker, Matthew A. Lohr, Tim Still, Alexei Borodin, D. J. Durian, and A. G. Yodh, Phys. Rev. Lett. 110, 035501 (2013).
- [3] S. V. Buldyrev, A.-L. Barabási, F. Caserta, S. Havlin, H. E. Stanley, and T. Vicsek, Phys. Rev. A 45, R8313(R) (1992).
- [4] K. A. Takeuchi, Physica A 504, 77(2018).