

量子力学の基礎

量子情報班（文責：矢田季寛）

September 19, 2020

高校物理でもお馴染みのヤングの干渉実験（二重スリット実験）のように、光は様々な不思議な性質を示します。このような不思議な性質の一部は、「光が（私たちの身近なものの中ではかなり珍しく）量子性（量子力学特有の性質）を持っていること」が原因となっています¹。この文章では、ミクロな世界を記述する量子力学の枠組みについて、光、特に偏光の例を用いて説明していきたいと思います²。

なおこの文章は、量子情報班の堀江紘己君、坪内健人君らが作成した資料を参考にして作成しました。

1 偏光の不思議な性質

1.1 偏光と偏光板

偏光とは、振動方向がある一方向に定まった光のことです。中学や高校で実験したことがあると思いますが、偏光を偏光板に入射すると、その角度によって光の見え方が暗くなったり明るくなったりします。図 4のように、縦方向の偏光を透過する偏光板に縦偏光を入射すると、偏光はそのままの強さで偏光板を通過します。また、図 5のように縦方向の偏光を透過する偏光板に横偏光を入射すると、偏光は完全に吸収され、透過光はなく真っ暗になります。図 6のように、縦方向の偏光を透過する偏光板にナナメの偏光を入射すると、偏光は吸収されるものと透過するものに分かれて、透過する光は最初のものよりは少し弱くなります。

¹正確には、量子性が損なわれにくいということです。デコヒーレンスの解説記事を参照。

²なお、この文章中では特に断りがない限り、振動数が定まった光を使うこととします。

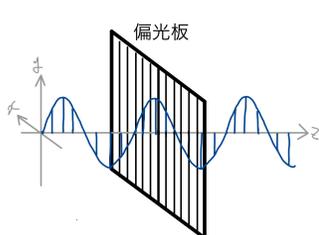


図 1

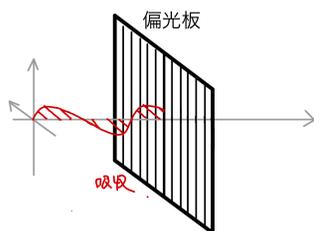


図 2

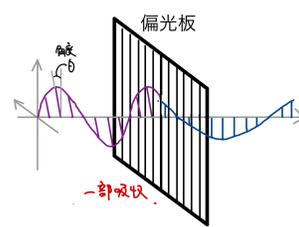


図 3

偏光に対して似たような作用を示す器具として「偏光ビームスプリッター」というものがあります。これは偏光板と同じような板状の器具ですが、横偏光を吸収するのではなく完全に反射するという点が偏光板と異なります。

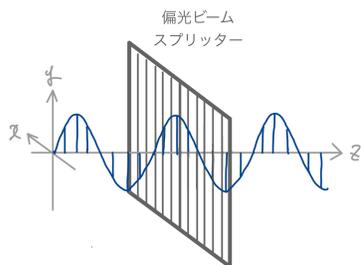


図 4

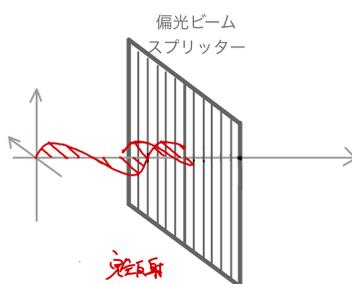


図 5

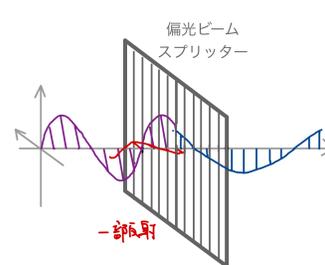


図 6

この解説記事では、偏光板ではなく偏光ビームスプリッターに、偏光や偏光光子を入射した場合の振る舞いを調べていくことにします。³

具体的に、透過する偏光の角度と縦方向のなす角度を θ とすると、透過光の振幅と、そのエネルギーは次のようになることが知られています。

$$\text{入射光 } \vec{E} = E(\sin \theta, \cos \theta) \xrightarrow{\text{偏光ビームスプリッター}} \text{透過光 } \vec{E} = E(0, \cos \theta) \quad (1)$$

$$\text{入射光エネルギー} : E^2 \xrightarrow{\text{偏光ビームスプリッター}} \text{透過光エネルギー} : E^2 \cos^2 \theta \quad (2)$$

1.2 偏光光子と偏光ビームスプリッター

次に、この偏光をどんどん弱い光にしていくことを考えましょう。直観的には光はいくらでも弱くすることができるように思えるかもしれませんが、実は光のエネルギーには最小単位があつて、そ

³偏光板でなく偏光ビームスプリッターを使うのは、1.2節の実験が(状態を壊さない)射影測定になるようにするためですが、初学者の方は気にしなくて良いです。なお、ポスターではあえてより身近な偏光板を使って説明しています。(偏光板を使った測定は、(多くの場合)量子力学の公理として採用されている射影測定という測定にはなりません、より一般的な、一般測定という測定にはなります。このことも初学者の方は特に気にせず読み飛ばしてもらっていいです。)

れ以上に細かく光のエネルギーを指定することはできません。この偏光のエネルギーの最小単位は光子と呼ばれます。(高校物理などで光子について勉強したことのある人も光子が偏光方向を持つというイメージをあまり持っていないかもしれません。しかし、光子は「偏光した光のエネルギーの最小単位」なので偏光方向を持っています。この文章では、ある方向に偏光した光子のことを偏光光子と略して呼んでいます。) この偏光光子を、縦方向の偏光を透過する偏光板に入射し、透過されるか反射されるかを観測しましょう⁴。すると、結果はどうなるでしょうか。

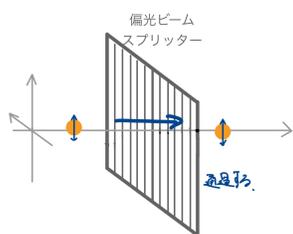


図 7

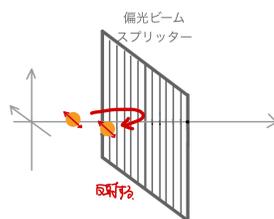


図 8

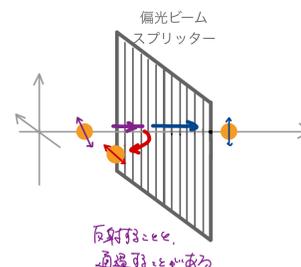


図 9

(1) 縦偏光光子を入射する場合と (2) 横偏光光子を入射する場合については、簡単に予想を立てることができます。普通の偏光と同じように、(1) は光子がそのまま透過し、(2) では光子は反射されるでしょう。実際に実験でもそのような結果が得られます。問題は (3) ナナメ偏光の光子を入射した場合です。この場合には、普通の偏光の結果をそのまま使うことができません。なぜなら、光子はエネルギーの最小単位なので、それが「分かれる」ことはできないからです。実際に実験を行なうと、ナナメ偏光光子は「透過する時と反射される時がある」という結果が得られます。例えばナナメの方向を垂直方向から 45 度とすると、光子は $\frac{1}{2}$ の確率でエネルギー不変のまま透過し、 $\frac{1}{2}$ の確率で反射されることが実験により分かります。より一般に、ナナメの方向を垂直方向から θ とすると、光子は $\cos^2 \theta$ の確率でエネルギー不変のまま透過し、 $\sin^2 \theta$ の確率で反射されます。光子が透過するか反射されるかは、実際にナナメ偏光光子をビームスプリッターに入射してみるまでわからないのです。(透過する確率、反射する確率はここで示したように、わかります。なお、垂直方向から θ の偏光方向を持つ偏光光子の透過確率とその方向の普通の偏光の透過率(透過するエネルギーの比)は、一致しています。偏光板の偏光光子がたくさん集まったのが普通の偏光であることを考えると、これは自然なように思われます。)

このような、「対象の状態(光子の偏光方向)は完全に定まっているのに、測定をしてみるまで測定結果がわからない」ということは、私たちの直観には大きく反します。このようなことが起こるのは、光子が古典的な物理学ではなく量子力学に従うからであり、ここに、古典物理学と量子力学の本質的な違いが現れていると言えます。この実験結果をよく理解するために、次章では、量子力学の枠組みについてこの実験に沿って簡単に勉強しましょう。

⁴光子がビームスプリッターのどちら側に出てくるかは、光子の偏光を変化させたり、光子を自体を吸収したりすることなく測定できるものとし、そのような測定方法を使うとします。(このようなまどろっこしい仮定をわざわざ置く理由は、この測定が射影測定になるようにするためですが、初学者の方は気にしなくて良いです。)

2 量子力学の枠組み

2.1 古典物理との根本的な違い

古典物理学では、普通、「対象の状態が定まっている」というのは「対象のあらゆる物理量の値が定まっている」ということを意味しています。（例えばボールの状態が決まっていると言うのは、その位置、速度、回転などの全ての物理量が定まっていることを指しますね。）

その一方、量子力学では、一般には対象の状態が定まっても、対象に測定をするまで物理量はわかりません（ナナメ偏光光子の例で見た通り）。さらに、実際に測定をしても、結果は確定した値をとるわけではなく、一般には確率的に異なった値をとります（これは45度偏光光子の例では、 $\frac{1}{2}$ の確率で透過し、 $\frac{1}{2}$ の確率で反射することに対応しています）。

このように量子力学の枠組みでは、「状態＝全物理量の値の一覧」であった古典的な物理学と違って、状態に対して測定を行なって初めて物理量を得られ、その測定結果は確率的になるのです（量子力学での状態を古典物理の場合と対比させて書くと、「状態＝全物理量の確率分布の一覧」であるとも言えます）。このことは直観に反しており、量子力学に馴染みのない人からするとちょっと信じがたいかもしれませんが、偏光光子の例をはじめ様々な実験により、このことが確かめられています。

2.2 状態の表し方と重ね合わせ

先ほどの偏光光子の例に戻しましょう。

私たちは偏光光子の状態（つまり偏光方向）を表すのにベクトルを用います（方向を表せればいので、単位ベクトル、つまり長さが1のベクトルを使うこととします）。図4の様にxy軸を設定すると、縦偏光は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、横偏光は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、縦方向と角度 θ をなすナナメ偏光は $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ とかけ

ます。量子力学で状態を表すときに使われるケットという記号を使ってベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $|0\rangle$ 、ベ

クトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を $|1\rangle$ と書き直すルールにすると、一般の状態 $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ は $\sin \theta |0\rangle + \cos \theta |1\rangle$ とかけます。このように偏光の状態は長さ1のベクトルを使って表せ、また状態同士の重ね合わせ（足し算）が別の状態になっています。

実は、「状態が長さ1のベクトルを使って表せること」と、「状態の重ね合わせがまた別の状態を表していること」は量子力学に従うすべての系に共通して言えることです⁵。2つ目の性質のことを特に「重ね合わせの原理」などと言います。

⁵「偏光の例はわかったけど、そうじゃないもの（例えば電子とか原子とか）の状態がどういう風にベクトルで表せるのかよくわからないなあ。」というのはもっともな疑問です。このことが完全に腑に落ちるようになるには、量子力学をちゃんと勉強するしかないと思います。（量子力学の入門書としては参考文献[1]がおすすめです。）この記事で説明しているのは特に分かりやすい光子の例ですが、この記事をとっかかりとしてこのような疑問や興味を持ち、本格的に量子力学を勉強していく人が増えればいいなと思っています。また、「デコヒーレンス」の解説記事の1章を読むと雰囲気少し掴めるかもしれません。

2.3 状態の測定

最後に、偏光光子が偏光ビームスプリッターに入射し、透過 or 反射を測定する過程で何が起こったかを整理しましょう。

1章でも書いたように、「垂直方向から θ の角度の方向の偏光光子 $|\psi\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle$ 」の「縦偏光を通すビームスプリッター」に対する透過確率は $\cos^2\theta$ 、反射確率は $\sin^2\theta$ 、であると実験により確かめられました。

これの一般化として、ビームスプリッターを「垂直方向から ϕ の角度の方向の偏光を通すもの」に置き換えて先ほどの偏光光子を入射すると、透過確率は $\cos^2(\theta - \phi)$ 、反射確率は $\sin^2(\theta - \phi)$ であると実験で確かめられます。「垂直方向から ϕ の角度の方向の偏光を通すビームスプリッター」での測定は、状態 $|\phi\rangle = \sin\phi|0\rangle + \cos\phi|1\rangle$ か、状態 $|\phi'\rangle = \cos\phi|0\rangle - \sin\phi|1\rangle$ かを測る測定と言い換えられます。この測定で状態 $|\phi\rangle$ をとる確率は $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$ となり、 $|\phi'\rangle$ をとる確率は $|\langle\phi'|\psi\rangle|^2$ となります⁶。このように、偏光光子の偏光ビームスプリッターを用いた $|\phi\rangle$ か $|\phi'\rangle$ かの測定（ただし $\langle\phi|\phi'\rangle = 0$ ）では、それぞれの場合の測定確率は、 $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$ 、 $|\langle\phi'|\psi\rangle|^2$ となります。

また1章では明記しませんでした。実はナナメ偏光光子は、「縦偏光を通す偏光ビームスプリッター」を透過したらその後は縦偏光光子に変化し、逆にビームスプリッターで反射されるとその後は横偏光光子に変化することがわかっています。（図9のように。）「垂直方向と ϕ の角度をなす方向の偏光を通すビームスプリッター」についても同様のことが言えます。すなわち、偏光光子の偏光板を用いた $|\phi\rangle$ か $|\phi'\rangle$ かの測定（ただし $\langle\phi|\phi'\rangle = 0$ ）では、測定後の状態はそれぞれ $|\phi\rangle, |\phi'\rangle$ に変化するのです⁷。

測定⁸がこのようになること（与えられた状態 $|\psi\rangle$ が、直交するベクトルで表される状態の組 $\{|k\rangle\}_k$ のどれになるかを測定した時に、測定結果が k となる確率は $|\langle k|\psi\rangle|^2$ となり、測定結果が状態 k の時の測定後の状態は $|k\rangle$ になる、ということ）も、量子力学に従う全ての系で共通です⁹。このことを射影測定の公理などと呼びます。

References

- [1] 清水明, 「新版 量子論の基礎 その本質とやさしい理解のために」サイエンス社 (2004).
- [2] 沙川貴大 「物理学汎論」(東京大学前期課程の講義,2018)

⁶この記号はベクトルの内積を表しています。例えば $\langle\phi|\psi\rangle$ はこの場合には、状態ベクトル $\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ の内積を表しています。より一般の議論については、「高校生のための量子力学入門」の pdf2.2 節を参照してください。

⁷これが成立するためには、光子の位置の測定の時に課した条件が必要になる。

⁸ここでは射影測定を指している

⁹より正確にいうと、量子力学ではこのような測定の存在を仮定している、ということになります。（測定の存在は人間の直観的には当たり前に見えると思ったので、ここでは敢えて射影測定の条件についてのみ書きました。）