

量子測定

量子情報班（文責：坪内健人）

2020年9月18日

1 はじめに

通常の量子力学の教科書や講義で扱う測定は、Bornの確率規則と射影仮説が仮定された射影測定^{*1}です。射影測定は、測定直後の状態をまた測定したとき、測定結果は全く同一のものになるという点で理想的な測定です。しかし、実際の実験室で行われる多くの測定は、それらの規則には従わないことが理論的にも実験的にも確かめられてきました。実際になされる多くの測定は、射影測定ではなく間接測定という考え方で記述されているのです。この記事では、量子測定理論の初歩を外観し、間接測定の考え方を紹介していきます。

2 量子力学における測定について

古典論では、局所実在論が仮定されています。つまり、任意の時刻について、すべての物理量が確定した値を持っていることが仮定されています。一方、量子論では、すべての物理量が確定した値を持つことはあり得ません。そのため、量子論における測定は、古典論での測定と根本的に異なったものになります。

古典論では、測定は観測者が確定している物理量の値を知ることとされています。一方の量子論では、すべての物理量が確定した値を持つことはないので、この定義は使えません。量子論においては、測定は観測者が測定値をひとつ得る行為とされています [1]。全く同じ状態に対して全く同じ測定を行ったとしても、測定結果は同じになるとは限りません。測定結果は、測定前の状態と測定方法に依存する確率分布に従います。

量子論における測定を記述するのに必要なことは何かを考えてみましょう。まず、測定前の状態が与えられたときに、測定結果の確率分布を導出できることが必要です。また、例えば測定を二回続けて行うとき、二回目の測定結果の確率分布を得るためには、一回目の測定後の状態を知る必要があります。つまり、測定後の状態がどうなっているかも記述できなければなりません。量子測定理論は、初期状態と測定が与えられたときに、測定結果の確率分布と測定後の状態を導出する手順を教えてください。

3 射影測定

量子論で最も広く知られている測定モデルは、射影測定と呼ばれる理想的な測定です。この測定は、量子系である被測定系（システム）を理想的な測定器で測定したとするモデルです^{*2}。通常の量子力学の講義や教科書で扱う測定の大部分がこの射影測定になります。

純粋状態に限定した、離散固有値をもつ物理量の射影測定を定式化してみましょう。状態 $|\psi\rangle$ に、物理量 \hat{Q} についての射影測定を行ったとします。物理量 Q の固有値分解を $Q = \sum q \hat{P}_q$ (ここで、 \hat{P}_q は固有値 q に対応する射影演算子) とおくと、測定結果の確率分布と測定後の状態は、それぞれ

$$\text{測定結果が } q \text{ になる確率: } p(q) = \langle \psi | \hat{P}_q | \psi \rangle \quad (1)$$

$$\text{測定結果が } q \text{ のときの、測定後の状態: } \frac{1}{\sqrt{p(q)}} \hat{P}_q | \psi \rangle \quad (2)$$

^{*1} 詳しい説明は後述。

^{*2} とはいっても、射影測定の定義自体は式 (1) と式 (2) をみただけの測定であり、後述する間接測定モデルでも射影測定を行うことは可能である。

と与えられます。確率分布が式 (1) のようになることを **Born** の確率規則、測定後の状態が式 (2) のようになることを射影仮説と言います。射影測定はこれらの性質を満たすため、物理量 Q についての射影測定の結果が q であったとき、その測定の直後に再度物理量 Q についての射影測定を行った場合も、測定結果は変わらず q になります。この性質は射影測定の重要な性質であり、これを射影仮説と呼ぶ立場もあります*3。射影測定はこの性質を満たすという意味で理想的な測定であり、理想測定とも呼ばれています。

4 間接測定

射影測定は理想化された測定だと書きましたが、実際の実験室で行われている量子測定の中には、射影仮説の成り立たない、非理想的な測定もあります。例えば、光電子増倍管を用いた光子数測定では、測定後の状態は測定結果によらず光子数 0 になり、射影仮説が成り立ちません。また、実際の測定には、量子揺らぎに起因するものではなく、測定自体の誤差もあります。これらは、本来は測定器自体も量子系であり、システムと測定器を合わせて一つの量子系と考えなければいけないのに、射影測定ではそれを無視していることに起因する齟齬です。

理想的でない測定も含めたより一般的な測定は一般化測定と呼ばれており、数学的には測定演算子*4を用いて定式化されています。測定演算子 $\{\hat{M}_k\}$ とは、完全性関係

$$\sum_k \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k = I \quad (3)$$

を満たす演算子であり、添字の k は可能な測定結果を表しています。純粋状態 $|\psi\rangle$ に対して測定演算子 $\{\hat{M}_k\}$ で表される測定を行うと、測定結果の確率分布と測定後の状態は、

$$\text{測定結果が } k \text{ になる確率: } p(k) = \langle \psi | \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k | \psi \rangle \quad (4)$$

$$\text{測定結果が } k \text{ のときの、測定後の状態: } \frac{1}{\sqrt{p(k)}} \hat{M}_k | \psi \rangle \quad (5)$$

と表されます。量子系の測定は、全て一般化測定であって、全て測定演算子で記述できることが数学的に示されています*5。

一般化測定を物理的に実現する方法について考えてみましょう。そのために、システムとは別にプローブ系を導入します。そして、次のようにしてシステムの測定を行います。

1. システムとプローブの初期状態 $|\psi\rangle$ 、 $|\Phi\rangle$ が与えられる。このとき、システムとプローブに相関はない。
2. システムとプローブの合成系がユニタリ的な相互作用をする。これにより、システムとプローブに相関が生まれる。
3. プローブを射影測定する。システムとプローブには相関があるので、これによりシステムの情報得られる。

このような測定方法を、間接測定と言います (図 1)。

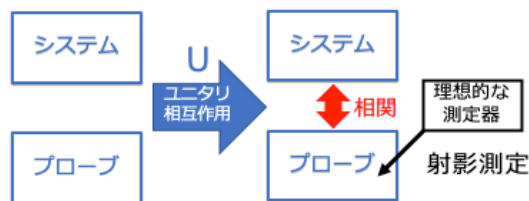


図 1 間接測定

*3 例えば、[2]。

*4 クラウス演算子とも呼ばれる。

*5 測定において成り立たなければいけない性質を要請すると、その要請を満たす測定は一般化測定と等価であることが示される。詳しい説明は、[4] 参照。

間接測定は量子系の測定なので一般化測定で記述できます。実は、逆に、一般化測定は間接測定モデルで記述することも示されています。^{*6}。つまり、間接測定は、物理的に可能なすべての測定を表現できるのです！例えば、理想的でない測定器による測定は、測定器自体をプローブ系と理想的な測定器に分割して考えると、間接測定に帰着できることが知られています (図 2)。

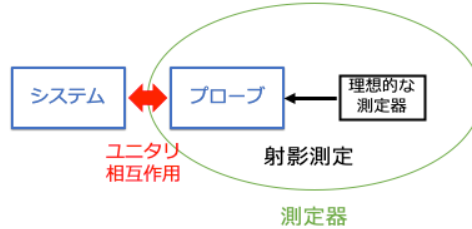


図 2 一般的な測定器

また、間接測定により、測定に起因する誤差や反作用^{*7}についてより深い理解を得ることができます。例えば、非可換な物理量である位置 \hat{x} と運動量 \hat{p} を同時測定することを考えてみましょう^{*8}。 \hat{x} と \hat{p} の同時測定において、測定結果の期待値が測定前の量子状態におけるその物理量の期待値に等しいような測定では^{*9}、 \hat{x} の測定結果の分散を $\langle \Delta \hat{x}^2 \rangle_{\text{meas}}$ 、 \hat{p} の測定結果の分散を $\langle \Delta \hat{p}^2 \rangle_{\text{meas}}$ とおくと、

$$\sqrt{\langle \Delta \hat{x}^2 \rangle_{\text{meas}}} \sqrt{\langle \Delta \hat{p}^2 \rangle_{\text{meas}}} \geq \hbar \quad (6)$$

が成り立ちます。これは、量子状態そのものがもつ不確定性を表す

$$\sqrt{\langle \Delta \hat{x}^2 \rangle} \sqrt{\langle \Delta \hat{p}^2 \rangle} \geq \frac{1}{2} \hbar \quad (7)$$

とははっきり区別されています。式 (6) は、量子状態そのものがもつ不確定性に加え、測定過程に起因する誤差も含まれているのです。つまり、非可換物理量 \hat{x} と \hat{p} の誤差のない同時測定は不可能であるということがわかるのです^{*10}。

最後に、射影測定と一般化測定の関係についての注意を述べておきます。一般化測定は、一般に射影測定より広い範囲の測定を記述しますが、量子論の公理においては、射影測定を採用すれば十分です。というのも、確かにシステム自体に Born の確率規則や射影仮説は適用できませんが、システムと測定器の合成系にはこれらの公理は適用できるからです。また、任意の一般化測定は間接測定で記述できるので、一般化測定はシステムと測定器の合成系におけるユニタリ時間発展とその射影測定で記述できます。つまり、量子論の公理において、射影測定を採用しようが、一般化測定を採用しようが、どちらの場合も全く等価な理論が出来上がるのです^{*11}。

参考文献

- [1] 清水明, 「量子論の基礎」 (サイエンス社, 2004)
- [2] 小澤正直, 「量子と情報」 (青土社, 2018)
- [3] 沙川貴大, 上田正仁 「量子測定と量子制御」 (サイエンス社, 2016)
- [4] 石坂智, 小川朋宏, 河内亮周, 木村元, 林正人 「量子情報科学入門」 (共立出版, 2012)

^{*6} 詳しい説明と証明は [4] を参照。

^{*7} 測定による状態変化。

^{*8} 非可換物理量 \hat{x} と \hat{p} の誤差のない同時測定は不可能である。しかし、誤差を許した同時測定なら可能である。間接測定において、プローブにおける可換な物理量 \hat{R}_x と \hat{R}_p を用意し、 \hat{x} の情報を \hat{R}_x に、 \hat{p} の情報を \hat{R}_p に与えるよう相互作用させ、可換な物理量 \hat{R}_x と \hat{R}_p の射影測定を考えれば良い。可換な物理量は同時固有状態をもつので、射影測定により誤差のない同時測定が可能である。

^{*9} この条件を不偏性条件という。

^{*10} 導出は [3] 参照。また、より平易な解説は量子情報班の作成した「不確定性関係」のポスター・解説文参照。

^{*11} 例えば、[1] や [4] は公理に射影測定を採用している。一方の [5] は、公理に一般化測定を採用している。

- [5] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information 10th Anniversary Edition* (Cambridge University Press, 2010)
- [6] K. Koshino and A. Shimizu, *Quantum Zeno Effect by General Measurements*, *Physics Reports* **412** (2005) 191.