不確定性関係

量子情報班 (文責: 白石航暉)

September 18, 2020

このノートは Physics Lab. 2020 量子情報班ポスター『不確定性関係』の解説です。ノートは二部に分かれており、第 1 章はポスターの解説。第 2 章はポスターには書けなかった様々な不確定性関係の導出や物理的意味の解説が載っており、こちらは基本的な量子力学の知識が仮定されており、大学で物理を学んでいる・学んだ人向けになっております。

1 ポスターの解説

1.1 はじめに

物理に限らず、位置や運動量、電圧といった様々な物理量を測定することがありますが、量子力学ではこの測定について様々な不思議な性質が成り立ちます。ここで紹介する不確定性関係とは、測定結果のばらつきの間に成り立つトレードオフの関係のことです。ここでいうトレードオフというのは、ある量の測定結果のばらつきを小さくしようとすると別の量の測定結果のばらつきが大きくなってしまうといった関係です。

1.2 量子ゆらぎ・測定誤差・擾乱

測定結果のばらつきには様々な要因によるものがありますが、大きく分けて次の章で紹介する 3 つになります。

1.2.1 量子ゆらぎ

全く同じようにして作ったミクロなものを何個か用意し、それらをどんなにうまく測定をしても、測定するたびにその結果の値は異なる場合があります。これは、量子力学では異なる測定結果を与える状態を重ね合わせて状態を作ることができるからです。(重ね合わせについては量子情報班の講義ノート、「高校生のための量子力学」をご覧ください。) このような、ミクロなものの状態について存在する、決して避けることのできない本質的な不確定性を**量子ゆらぎ**と呼びます。

1.2.2 測定誤差

何かを測定するとき、いつも直接測定できるとは限りません。例えば長さを測るとき、手元にあるような小さなものであればものさしで直接測ることができます。しかし、遠く離れた山との間の距離を知りたいとなれば直接ものさしや巻尺で測ることは難しいでしょう。ここでは、その代わりとして音を出して帰ってくるまでの時間を使って山との距離を測ることにします。すると、時間という別の量によって距離を間接的に測ることができますが、音の速さは秒速 340 m 程度と速いので、ストップウォッチを押すタイミングのわずかなズレが数十メートルという距離のズレを生んでしまいます。このように、測り方によって生まれる測定結果のばらつきのことを**測定誤差**と呼びます。

この測定誤差は理想的な測定においては 0 になるので、このことから、量子ゆらぎとはどんなにうまい測定をしても避けることのできない測定結果のばらつきと捉えることができるのです。

1.2.3 擾乱

我々が物体を見るとき、物体に光が当たり、その光が反射され我々の目に入ってくることでその物体を目に見ることができます。このとき、我々のスケールでは光が当たった程度では物体は当然びくともしません。しかし、電子のようなミクロなスケールならどうでしょうか？電子は光が当たることでその運動を変えてしまいます。

もし一定の変化しかしない、例えば反射のように壁に当たる前と当たった後で入射角と反射角が必ず等しいのであれば、運動が変わってしまっても、光が当たる前の電子の運動を逆算して求めることができます。したがって、運動が変わることそれ自体は本質的に物体の運動についての不確定性を生み出しません。

本質的に重要なのは、電子に光があたったとき、電子と光がどのように当たるかはランダムなので、電子がその後どの方向に運動を変えるのかもランダムになるということです。電子に光を当てれば反射光によってその位置を特定することができますが、それによって位置とは別の量である運動の向きがランダムに変わってしまい、運動の向きのばらつきが大きくなってしまいます。このように、ある物理量の測定によってまた別の運動量のばらつきが大きくなるとき、この増えた分のことを**擾乱**と呼びます。

1.3 不確定性関係とは

この章の冒頭で不確定性関係とは測定結果のばらつきの間のトレードオフであると述べました。もっと詳しくいうのであれば不確定性関係は量子ゆらぎ、測定誤差、擾乱についてのトレードオフです。このポスターやこのノートの２章で紹介される様々な不確定性関係は以下の３種類に分けることができます。

1. 異なる２つの物理量の量子ゆらぎの間のトレードオフ。状態を変えて一方の量子ゆらぎを小さくしようとすると必ずもう一方の量子ゆらぎが大きくなってします。

2. 異なる２つの物理量の測定誤差の間のトレードオフ。測定方法を変えて一方の測定誤差を小さくしようとすると必ずもう一方の測定誤差が大きくなってしまう。

3. ある物理量の測定誤差とその測定が引き起こす別の物理量に対する擾乱の間にあるトレードオフ。測定誤差を小さくしようとすると必ず別の物理量に対する擾乱を大きくしてしまう。

それぞれの種類の不確定性関係にどのようなものがあるかについては次の章で詳しく解説していきます。また、ここでは紹介しませんが、測定によって得られる情報と測定によって起きる擾乱の間にあるトレードオフも研究されています。

2 様々な不確定性関係

2.1 はじめに

不確定性関係には大きく分けて,

1. 物理量の本質的な不確定性を表すもの

2. 量子系の測定における限界を表すもの

の二つが存在する. 標語的な言い方が許されるのであれば, 前者は自然について, 後者は人間についての不確定性関係であると言えるだろう. ハイゼンベルグが最初に提唱した不確定性関係[1]は, 例えば電子の位置を測定する光子顕微鏡の思考実験から考察された. 電子に光子を当てて跳ね返ってきた光子を観測することで電子の位置を観測するものだが, 電子の質量が小さいため電子の運動量は必ず変化してしまう. ハイゼンベルグは, この電子の位置の誤差 Δq と運動量の変動 Δp との間には,

$$\Delta p \Delta q \sim h \tag{1}$$

の関係があるとした. この不確定性関係は, 明らかに量子系の測定における限界を表す不確定性関係であったことがわかる. 一方で, あとの章でも述べるように Kennard-Robertson の不等式[2, 3]は物理量の本質的な不確定性を表すものである.

本質的な不確定性は状態と物理量に対して一意に決まるので、純粋に数学的に不確定性関係を導出することができる. しかし, 人間が行う操作である測定に起因する不確かさや測定によって得られる情報などはどのように定義するかがまず問題になる. 実際のところ以下に紹介する不等式の違いは, それぞれ測定誤差や擾乱の定義や物理的に妥当な測定とは何かという仮定が異なることによるものであり, 当然それぞれの仮定・定義のもとでは厳密に正しいものである.しかし、仮定や定義が妥当であるかどうかは物理学の問題として議論する必要がある.

以下では, 不確定性関係の論文の Introduction で必ず引用されるような重要な不確定性関係である, Kennard-Robertson の不等式[2, 3], Arthurs-Goodman [5]の不等式, 小澤の不等式[6, 7, 8]をそれぞれ導出した後, 簡単にではあるが, 操作的な定式化として非常に優れた渡辺-沙川-上田の不等式[9, 10, 11, 12], 操作

的意味にはほんの少し疑問が残るものの数学的な定式化としては非常に優れていて, KR不等式・AKG不等式・小澤の不等式を全て含み, かつよりタイトなものにした李-筒井の不等式[13, 14]を紹介する.

なお, 以下の渡辺-沙川-上田の不等式までの説明はほとんど Ref. [12] に沿って書かれており, 当然内容の新規性もさることながら, 解説としての新規性もこの解説PDFにはないことを明記しておく. 興味のある方はぜひ Ref. [12] を読んで欲しい.

以後、詳細な導出等は五月祭後に追記する予定です。(時間が足りませんでした...)

2.2 記法の確認

2.3 Kennard-Robertson 不等式, Schrödinger 不等式

任意の状態についての 2 つの非可換な物理量 A, B の分散が満たす関係を表した式.

$$\sigma(A)\sigma B \geq \frac{1}{2}\left|\langle[A,B]\rangle\right| \tag{2}$$

$$\sigma(A)^2\sigma B^2 - \mathcal{C}_S(A,B)^2 \geq \frac{1}{4}\left|\langle[A,B]\rangle\right|^2 \tag{3}$$

$$\mathcal{C}_S(A,B) \coloneqq \frac{1}{2}\langle\{A,B\}\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle \tag{4}$$

2.4 Arthurs-Goodman 不等式

2 つの非可換な物理量 A, B を間接測定によって同時に測定することを考える. 密度演算子 ρ で表される状態にある注目系について, 注目系と ρ_R で表される状態の補助系との合成系をユニタリ演算子 U で記述されるユニタリ発展をさせた後, 補助系のみに対して 2 つの可換な物理量 A', B' の同時測定を行う。このとき, 任意の注目系の状態 ρ について以下の普遍性条件が成り立っているとする.

$$\mathrm{Tr}(A\rho) = \mathrm{Tr}\big(I\otimes A'U\rho\otimes\rho_R U^\dagger\big) \tag{5}$$
$$\mathrm{Tr}(B\rho) = \mathrm{Tr}\big(I\otimes B'U\rho\otimes\rho_R U^\dagger\big) \tag{6}$$

このとき, A', B' の測定結果を持って A, B を測定して得られた値とする. このような測定において, 測定結果の分散は以下の $\sigma'(A'), \sigma'(B')$ になる.

$$\sigma'(A') \coloneqq \mathrm{Tr}\big[I\otimes A'^2U\rho\otimes\rho_R U^\dagger\big] - \mathrm{Tr}\big(I\otimes A'U\rho\otimes\rho_R U^\dagger\big)^2 \tag{7}$$
$$= \mathrm{Tr}\big[I\otimes A'^2U\rho\otimes\rho_R U^\dagger\big] - \langle A\rangle^2 \tag{8}$$
$$\sigma'(B') \coloneqq \mathrm{Tr}\big[I\otimes B'^2U\rho\otimes\rho_R U^\dagger\big] - \mathrm{Tr}\big(I\otimes B'U\rho\otimes\rho_R U^\dagger\big)^2 \tag{9}$$
$$= \mathrm{Tr}\big[I\otimes B'^2U\rho\otimes\rho_R U^\dagger\big] - \langle B\rangle^2 \tag{10}$$

この測定結果の分散は理想的な測定ではなく間接測定をしている分だけ大きくなっていると考えられる. この増えた分を測定誤差と定義すると, 誤差演算子 $N_X \coloneqq UX'U^\dagger - X$ $(X = A, B)$ を用いて測定誤差は以下のように定義できる.

$$\epsilon(A) \coloneqq \mathrm{Tr}\big[(\rho\otimes\rho_R)N_A^2\big] \tag{11}$$

$$\epsilon(B) \coloneqq \mathrm{Tr}\big[(\rho\otimes\rho_R)N_B^2\big] \tag{12}$$

実際, これらは $\sigma'(A')^2 = \epsilon(A) + \sigma(A)^2$, $\sigma'(B')^2 = \epsilon(B) + \sigma(B)^2$ を満たしている. このように定義された測定誤差について以下の不確定性関係が成り立つ.

$$\epsilon(A)\epsilon(B) \geq \frac{1}{2}\left|\langle[A,B]\rangle\right| \tag{13}$$

2.5 小澤の不等式

小澤の不等式は 2 つの非可換な物理量について間接測定によって同時測定を行った時の測定誤差同士の不確定性関係を表すものと、一方を測定した時の測定誤差と測定がもう一方の物理量に与える擾乱との不確定性関係を表すものの 2 つがある. 同時測定については AG不等式において課されていた普遍性条件を仮定しない形になっており, 他はAG不等式と同様である. このとき, 同時測定について以下が成り立つ.

$$\epsilon(A)\epsilon(B) + \epsilon(A)\sigma(B) + \sigma(A)\epsilon(B) \geq \frac{1}{2}\left|\langle[A,B]\rangle\right|. \tag{14}$$

また, A の間接測定を行う時の全系のユニタリ発展を記述するユニタリ演算子を U とすれば, B に与える擾乱についても誤差演算子と同様に反作用演算子 $D_B \coloneqq U^\dagger BU - B$ を用いて

$$\eta(B)^2 \coloneqq \mathrm{Tr}\left[(\rho\otimes\rho_R)D_B^2\right] \tag{15}$$

と定義することができ, 以下の不等式が成り立つ.

$$\epsilon(A)\eta(B) + \epsilon(A)\sigma(B) + \sigma(A)\eta(B) \geq \frac{1}{2}\left|\langle[A,B]\rangle\right|. \tag{16}$$

これらの不等式は, 不偏性条件を課さなかったことにより, 任意の状態に対して一定の測定結果しか出さないがたまたまその結果が正しいときや, A' の測定によって得られる測定結果がちょうど G 倍になっている場合などで変な結果を与えてしまう. ここに挙げた例で言えば前者は全く測定として意味がないし, 後者は適切に処理してやれば正しい測定結果を与えるのにも関わらずこの定式化のもとでは誤差が大きくなってしまう. すなわち, 「妥当な測定とは何か?」の定義に問題があるのではないかと考えられている.

2.6 渡辺-沙川-上田の不等式

測定を考える上で得られた生の測定結果から, 測定したかった真の値を推定するという操作を考えることで物理的な測定とその測定による誤差や擾乱を定式化するのが渡辺-沙川-上田の不等式である. その定式化は以下の通りである. まず, 真の値の推定値の分散は以下のように分解できると考えられる.

$$(\text{真の値の推定値の分散}) = (\text{推定誤差}) + (\text{測定誤差}) + (\text{量子ゆらぎ}) \tag{17}$$

したがって, 推定誤差が0になる極限での推定値の分散から量子ゆらぎを引いたものを測定誤差として定義するのが自然だ. また, 物理量 A を測定した後に物理量 B を測定するとすると,

$$(B\ \text{の真の値の推定値の分散}) = (\text{推定誤差}) + (\text{測定誤差}) + (A\ \text{を測定した後の状態の量子ゆらぎ}) \tag{18}$$

と表される. 擾乱とは A の測定によって生じた B の誤差であるから, B の測定による誤差を0 にしても残ってしまう誤差のうち量子ゆらぎ由来ではないものと定義することができるだろう. したがって, 以下のように擾乱を定義することができる.

$$(B\ \text{の真の値の推定値の分散}) = (\text{推定誤差}) + (\text{測定誤差}) + (A\ \text{の測定ga}B\text{に与えた擾乱}) + (A\ \text{の量子ゆらぎ}) \tag{19}$$

このようにして定義された誤差はフィッシャー情報量, 量子フィッシャー情報量と密接に関わっており, フィッシャー情報量が満たすクラメール・ラオの不等式から測定誤差や擾乱の不確定性関係を導くことができる.

2.7 李-筒井の不等式

李-筒井の不等式は, 測定を密度演算子によって表される量子論的な確率分布から測定結果が満たす古典的な確率分布への写像とみなしたときに, その写像の幾何学的な性質から導かれる不確定性関係である. (説明は今後追記していく予定)

References

[1] W. Heisenberg, Zeitschrift fr Physik A Hadrons and Nuclei 43, 172 (1927).

[2] E.H. Kennard, Zeitschrift fr Physik A Hadrons and Nuclei 44, 326 (1927).

[3] H.P. Robertson, Phys. Rev. 34, 163 (1929).

[4] E. Schrödinger, Proc. Prussian Acad. Sci. Phys. Math. Sect. XIX, 293 (1930).

[5] E. Arthurs, M.S. Goodman, Phys. Rev. Lett. 60, 2447 (1988).

[6] M. Ozawa, Phys. Rev. A 67, 042105 (2003).

[7] M. Ozawa, Phys. Lett. A 320, 367 (2004).

[8] M. Ozawa, Ann. Phys. 311, 350 (2004).

[9] Y. Watanabe, T. Sagawa, M. Ueda, Phys. Rev. Lett. 104, 020401 (2010)

[10] Y. Watanabe, T. Sagawa, M. Ueda, Phys. Rev. A 84, 042121 (2011)

[11] Y. Watanabe, M. Ueda, arXiv:1106.2526 (2011)

[12] Y. Watanabe, ” Formulation of Uncertainty Relation Between Error and Disturbance in Quantum Measurement by Using Quantum Estimation Theory” Springer Science & Business Media (2013).

[13] J. Lee and I. Tsutsui, arXiv:2002.04008 (2020).

[14] J. Lee and I. Tsutsui, arXiv:2004.06099 (2020).