高校生のための量子力学入門

量子情報班 (文責：白石航暉)

September 18, 2020

本ノートは第93回五月祭にて、東京大学理学部物理学科学生有志による学術企画 Physics Lab. 2020 の量子情報班が配信する高校生向けの小講義の資料です。9/20配信の講義動画と合わせてご覧ください。

1　はじめに

1.1　本講義の目的

本講義の目的はタイトルの通り、高校生でもわかるように量子力学を解説するというものです。 (なんらかの量子力学の重要性を伝える文)

しかしながら、現代における量子力学の重要性に比して、高校物理のカリキュラムでは量子力学をまともに学ぶことはできないのが現状です。「もし自分が高校生の時に量子力学に触れることができていたら...?」という考えのもと、我々 Physics Lab. 2020 量子情報班は大学入学レベルの知識を仮定しない形で量子力学の基本に触れられるような講義を作ることに挑戦しました。

1.2　本ノートを読む上での注意

量子力学を理解するには、線形代数と呼ばれる数学の知識が欠かせません。しかし、現在の高校生のカリキュラムでは、高校のうちに普通に勉強していては線形代数に触れることができません。このノートは線形代数の言葉で書かれるべきところを、ただの計算のルール、パズルのルールとして紹介することで線形代数に時間を割くことなく量子力学の基本的な性質に触れることができるように書かれています。

ただ、残念なことに一般的な量子力学の教科書や講義ノートに比べて少々言葉たらずなところも多く、また数学的に厳密な記述を避けたこともあり、このノートだけで量子力学の原理を十分に理解することはほとんど不可能だと思います。数学の知識を必要とせずに読むことのできる "入門の入門" と思ってざっくり読んでいただければと思います。

また、ここでは簡単のため**量子ビット** (キュービット, qubit) と呼ばれる簡単な対象に限って量子力学を紹介していきます。本ノートで解説される量子力学を一般の対象についての量子力学に拡大するのは決して難しくはありませんが、興味のある方は量子力学の標準的な教科書を読んで欲しいと思います。

1.3　量子ビットとは？

本ノートでは一貫して量子ビットを扱っていくと宣言しました。ここでは、量子ビットについて説明するのですが、まず初めにビットとは何かを説明する必要があるでしょう。私たちの身の回りにあるコンピューターやスマートフォンなどは大量の情報を扱っています。この情報の基本単位となるものがビットであり、0か1の二つの値のうちどちらか一つを持ちます。物理的には、コインの表裏、電圧の高低、棒磁石の向きなど様々な実現方法がありますが、とにかく２通りの状態のうちどちらかの状態であるようなものであれば、何でもビットになります。

一言で言えば、量子ビットは量子力学的なビットです。量子ビットもビットと同じように0,1の二つの状態を取ることができます。量子ビットは、例えば電子のスピンの向きが上向きか、下向きかによって物理的に実現することができます。上向き、下向きがそれぞれビットの 0,1 に対応します。しかし、量子ビットにはビットと異なる性質があります。それは、0,1 の２通りの状態だけでなく、重ね合わせと呼ばれる状態も取ることができるというものです。すなわち、無限通りの状態を取ることができます。量子ビットとはどのようなものか、重ね合わせというものがどのようなものかをシンプルに説明するのは難しいので、以降の章を通して伝えていきたいと思います。

2　ブラ・ケット記法と量子力学のルール

この章では、量子力学における記法や、計算ルールを導入します。ここでは数式の意味については深く考えすぎず、パズルを解くようなものだと思っていただきたいです。

2.1　ケットの導入

量子力学において、状態はベクトルによって表現されます。この状態を表すベクトルを書くとき**ケット**というものを使って書くのが主流です。本ノートでは量子ビットの $0, 1$ という状態をそれぞれ次のようなケットで表します。

$$|0\rangle\,,\ \ |1\rangle \tag{1}$$

このように、ケットは "|" と "⟩" で状態を説明する記号や文章を挟んだ形で書きます。

1.3 節で、量子ビットには**状態の重ね合わせ**が考えられると述べました。量子ビットに限らず、状態の重ね合わせというのは量子力学の基本的な性質です。この重ね合わせは状態を表すベクトル、すなわちケットの足し算によって表現することができます。これを、以下のようなルール 1. としてまとめました。

ルール 1. 状態の重ね合わせ: 量子力学において、状態の重ね合わせもまた状態になる。例えば、量子ビットにおける0と1との重ね合わせ状態は、(複素)数 a, b を用いて

$$a\,|0\rangle + b\,|1\rangle \tag{2}$$

と表される。ただし、$|a|^2 + |b|^2 = 1$ である(この条件については2.5節にて後述)。

2.2　ブラの導入

ケットと対になるものとして**ブラ**というものがあります。ケット、$|0\rangle\,,\ |1\rangle$ と対になるブラをそれぞれ $\langle 0|\,,\ \langle 1|$ と書きます。また、$|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$ と対になるブラは、

$$\langle\psi| = a^*\,\langle 0| + b^*\,\langle 1| \tag{3}$$

となります。($*$は複素共役を表しますが、わからなくても大丈夫です。ここでは気にしなくて良いように議論を組み立てていきます。)

ブラはケットに作用させることができます。このとき、以下のルールがあります。

ルール 2. ブラとケットの作用①: ブラをケットに作用させると(複素)数になる。量子ビットに限れば、

$$\langle 0|0\rangle = 1,\ \ \langle 1|1\rangle = 1,\ \ \langle 0|1\rangle = 0,\ \ \langle 1|0\rangle = 0 \tag{4}$$

が成り立つ。

ルール 3. ブラとケットの作用②: a, b, c, d を(複素)数として、

$$\begin{aligned}(a\,\langle 0| + b\,\langle 1|)(c\,|0\rangle + d\,|1\rangle) &= ac\,\langle 0|0\rangle + ad\,\langle 0|1\rangle + bc\,\langle 1|0\rangle + bd\,\langle 1|1\rangle && (5)\\ &= ac + bd && (6)\end{aligned}$$

ルール3については少々複雑に感じるかもしれません。そこで、ここまでのルールの確認としていくつか練習問題を用意しました

例題 1. $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle),\ \ |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ とする。また、$\langle +| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|),\ \ \langle -| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| - \langle 1|)$ とする。このとき、

1. $\langle 0|+\rangle$ を計算しなさい。
2. $\langle +|-\rangle$ を計算しなさい。

2.3 状態の変換

皆さんよくご存知の通り、状態は変化するものです。ここでは量子力学において状態の変化がどのように表されるかを考えます。まず、一つ考えられるのは**(ユニタリ)変換**による表現です。ユニタリ変換 U によって状態を表すケット $|\psi\rangle$ は $U|\psi\rangle$ と表されるケットに変換されるとします。$|0\rangle, |1\rangle$ が U によってそれぞれ $U|0\rangle$, $U|1\rangle$ に変換されるとしましょう。このとき、以下のルールがあります。

ルール 4. ケットの変換(線型性): $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ はユニタリ変換 U によって次のように変換される。

$$U|\psi\rangle = U(a|0\rangle + b|1\rangle) = a(U|0\rangle) + b(U|1\rangle) \tag{7}$$

ルール4. は線型性ともいわれる性質です。

例として、回路型量子コンピュータにも使われる X ゲートというものを考えてみましょう。X ゲートは $|0\rangle$ を $|1\rangle$ に,$|1\rangle$ を $|0\rangle$に変えます。すなわち、

$$X|0\rangle = |1\rangle \tag{8}$$

$$X|1\rangle = |0\rangle \tag{9}$$

です。このとき、$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ というケットは、X によって

$$X|\psi\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle \tag{10}$$

というように変換されます。もっと具体的には、$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ というケットが X によってどのように変換されるか見てみましょう。すると、

$$X|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(X|0\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(X|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |0\rangle) = |+\rangle \tag{11}$$

となって、何と全く変わらないということがわかります。

2.4 測定

状態が変化するのは上に述べたユニタリ変換によってだけではありません。ここで紹介する**測定**によっても状態は変化します。

ここでは量子ビットについての測定を考えることにしましょう。まずは量子ビットが0か1かの測定を考えることにします。例えば量子ビットが電子のスピンの向きで実現されている場合、スピンが上向きか下向きかのどちらであるかを測定するということです。0と1の重ね合わせの状態について0か1かの測定をすると"0である"という結果と、"1である" という結果が確率的に出てきます。そして、その確率は以下のルールに従います。

ルール 5. $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$というケットで表される状態について、0であるか1であるかの測定をすることを考える。

このとき、$|\langle 0|\psi\rangle|^2 = |a|^2$ の確率で0という結果を得て、状態は $|0\rangle$ に変化する。同様に、$|\langle 1|\psi\rangle|^2 = |b|^2$ の確率で1という結果を得て、状態は $|1\rangle$ に変化する。

それでは、具体的に計算をしてみましょう。

例題 2. $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ で表される状態について 0 か 1 かの測定を行うとする。このとき、それぞれの結果が出る確率を計算せよ。

量子ビットについての測定はこれだけではありません。次は、$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ と $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ のどちらであるのかの測定を考えましょう。これは例えば電子のスピンの向きで実現された量子ビットであれば、スピンが右向きか左向きかの測定になります。このときも $+$ であるか $-$ であるかの結果が確率的に出てきて、その確率は以下のルールに従います。

ルール 5'. $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$というケットで表される状態について、$+$ であるか $-$ であるかの測定をすることを考える。

このとき、$|\langle +|\psi\rangle|^2 = |\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)|^2$ の確率で $+$ という結果を得て、状態は $|+\rangle$ に変化する。同様に、$|\langle -|\psi\rangle|^2 = |\frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)|^2$ の確率で $-$ という結果を得て、状態は $|-\rangle$ に変化する。

さらに一般の量子ビットに対する測定を考えてみます。量子ビットについての測定は文字通り無限に考えることができ流のです。本講義ノートではこれ以降使いませんが、量子ビットについての理想測定(あるいは射影測定)と呼ばれる一般的な測定のルールを紹介しておきましょう。

ルール 5". $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$というケットで表される状態について、$A$ という状態であるか B という状態であるかの測定を行うとする。ただし、この 2 つの状態を表すケット $|A\rangle$, $|B\rangle$ に対して,

$$\langle A|B\rangle = 0 \tag{12}$$

が成り立っている必要がある。

このとき、$|\langle A|\psi\rangle|^2$ の確率で A という結果を得て、状態は $|A\rangle$ に変化する。同様に、$|\langle B|\psi\rangle|^2$ の確率で B という結果を得て、状態は $|B\rangle$ に変化する。

2.5 確率の保存*

前節で量子力学において測定の結果が確率に従うことを見ました。量子ビットに対するそれぞれの測定の結果が出る確率を全て足すと当然 1 になります。例として、$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ という状態についての 0 か 1 かの測定を考えることにしましょう。この時、2 つの測定結果が出る確率はそれぞれ $|a|^2$, $|b|^2$ となります。この 2 つの確率を足すと 1 になっていなければならないので $|a|^2 + |b|^2 = 1$ という条件が課されます。これがルール 1. で状態について課された条件の物理的な意味です。

また、状態の変換がユニタリ変換で表されるのも、確率の和が常に1にならなければならないという条件によるものです。詳しくは量子力学の教科書を読んでみてください。

2.6 まとめ

以降の章ではこの章で述べた量子力学のルールに従って計算をしながら量子力学特有の性質について説明していきます。従って、この章で述べたルールをもう一度おさらいしておきましょう。

ルール 1. 状態の重ね合わせ: 量子力学において、状態の重ね合わせもまた状態の重ね合わせになる。例えば、量子ビットにおける0と1との重ね合わせ状態は、(複素)数 a, b を用いて

$$a|0\rangle + b|1\rangle \tag{13}$$

と表される。ただし、$|a|^2 + |b|^2 = 1$ である。

ルール 2. ブラとケットの作用①: ブラをケットに作用させると(複素)数になる。量子ビットに限れば、

$$\langle 0|0\rangle = 1,\ \langle 1|1\rangle = 1,\ \langle 0|1\rangle = 0,\ \langle 1|0\rangle = 0 \tag{14}$$

が成り立つ。

ルール 3. ブラとケットの作用②: a, b, c, d を(複素)数として、

$$(a\langle 0| + b\langle 1|)(c|0\rangle + d|1\rangle) = ac\langle 0|0\rangle + ad\langle 0|1\rangle + bc\langle 1|0\rangle + bd\langle 1|1\rangle \tag{15}$$
$$= ac + bd \tag{16}$$

ルール 4. ケットの変換(線型性): $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ はユニタリ変換 U によって次のように変換される。

$$U|\psi\rangle = U(a|0\rangle + b|1\rangle) = a(U|0\rangle) + b(U|1\rangle) \tag{17}$$

ルール 5. $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$というケットで表される状態について、0であるか1であるかの測定をすることを考える。

このとき、$|\langle 0|\psi\rangle|^2 = |a|^2$ の確率で0という結果を得る。同様に、$|\langle 1|\psi\rangle|^2 = |b|^2$ の確率で1という結果を得る。

最後に確認のため、次の応用問題を解いてみます。

応用問題.

アダマールゲート H は $|0\rangle$, $|1\rangle$ をそれぞれ $|+\rangle$, $|-\rangle$ に変換する。このとき、

$$|\psi\rangle = \frac{4}{5}|0\rangle + \frac{3}{5}|1\rangle \tag{18}$$

というケットで表される状態の量子ビットをアダマールゲートによって変換させた後に、0 か 1 かの測定を行うことを考える。0, 1 の測定結果はそれぞれどんな確率で出てくるかを計算せよ。

3 シュテルン・ゲルラッハの実験

3.1 シュテルン・ゲルラッハの実験とは

2 章では 0 か 1 か, あるいは + か − かという測定を考えてきました。この章ではこの 2 つの測定を組み合わせて繰り返し行ってみましょう。すると、興味深い現象が起こります。

ケース①

まず、$|+\rangle$に対して 0 か1 かの測定を二回繰り返し行うことを考えてみましょう。$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ について1回目の0か1かの測定を行うとそれぞれ1/2の確率で0か1かの測定結果を得ます。まずは1回目の測定で0 の結果が出たとしましょう。すると、2回目の0か1かの測定を行うと、$|\langle 0|0\rangle|^2 = 1$, $|\langle 1|0\rangle|^2 = 0$ より、確率1で0という結果が出て、0という結果が出ることはあり得ません。

ケース②

次に、$|+\rangle$に対して 0 か 1 かの測定を行なった後に + か − かの測定を行うことを考えてみましょう。1回目の測定までは①と同様です。1回目の測定で0 の結果が出たとしましょう。この測定によって得られた $|0\rangle$ で表される状態に対して、+ か − かの測定を行うと、

$$|\langle +|0\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|0\rangle\right|^2 = \frac{1}{2} \tag{19}$$

$$|\langle -|0\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|0\rangle\right|^2 = \frac{1}{2} \tag{20}$$

より、それぞれ1/2の確率で + か − かの測定結果を得ます。1回目の測定の結果が1だったとしてもそれぞれ1/2の確率で + か − かの測定結果を得ますが、これは自分で計算して確かめてみてください。

ここで面白いのは、初めは + の状態を用意していたのに、2回の測定を行なった後は + だけではなく $\frac{1}{2}$ の確率で − の状態もできるということです。もし仮に + の状態について1回目に + か − かの測定を行なったとしても確率1で+ という測定結果を得て、− という測定結果を得ることはあり得ません。しかし、+ か − かの測定の前に 0 か 1 かの測定を行うと突然 + だけでなく − の測定結果を得る可能性も出てきます。

ケース③

②の 2 回の測定を行なった後、さらに 0 か 1 かの測定を行うとしましょう。すると、1回目の 0 か 1 かの測定結果によらず、またここでも 1/2 の確率で 0 か 1 かの測定結果を得ます。(余力があれば計算してみてください。)

3.2 シュテルン・ゲルラッハの実験から何がわかるのか？

シュテルン・ゲルラッハの実験からまずわかるのは、量子力学において必ず確率が付いて回るということ、そしてその確率の表し方が単純なものではないということです。というのも、$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ という重ね合わせの状態について 0 か 1 かの測定を行うとそれぞれ1/2の確率で 0 か 1 かの測定結果を得ます。だからと言って、単に100個量子ビットを用意したら50個が $|0\rangle$, 50 個が $|1\rangle$ になっているのとは全く訳が違います。この 2 つが違うのは, + か − かの測定をすれば明らかです。重ね合わせの状態が単にいくつかの異なる状態の量子ビットを混ぜ合わせて、その中から 1 つを取り出したものという形では表せないということがわかります。「$|+\rangle$ の状態の量子ビットが100個ある」のと、「$|0\rangle$が50個, $|1\rangle$が50個ある」のとでは全く違うのです。

そしてこの実験からわかる最も重要なことは、「0 か 1 か」と「+ か − か」とは両立しないということです。1回目の測定ではそれぞれ 1/2 の確率で $|0\rangle$ という必ず 0 と測定される状態、あるいは $|1\rangle$ とい

う必ず 1 と測定される状態になりますが、2回目の測定によってどちらの場合も $|+\rangle$ か $|-\rangle$ となり、再び0か1かの測定によってそれぞれ 1/2 の確率で 0 もしくは 1 という測定結果が出るようになります。

もし、「0 か 1 か」と「+ か − か」の 2 つが両立するのであれば、状態は 0+, 0−, 1+ そして 1− の4つに分けられるはずです。すると、1回目の 0 か 1 かの測定によって 0 という結果を得た時 0+, 0− の 2 つの状態のみが選び出され、2回目の + か − かの測定によって + という結果を得たとすると 0+ という状態のみが選び出されるはずです。そして、3回目に 0 か 1 かの測定を行えば必ず 0 という結果を得るはずです。しかし、量子力学の効果が大きいミクロなものである電子について、電子のスピンの「上向きか下向きか」と「右向きか左向きか」のような 2 つは実際に両立しません。ケース③でみたように 1 という結果を得ることもあります。これを確かめたのがシュテルン・ゲルラッハの実験なのです。

4　量子テレポーテーション

4.1　複数の量子ビットの状態をどうやって表すか？

2 章では、一つの量子ビットだけを考えてきました。しかし、量子テレポーテーションを考えるためには複数の量子ビットを考える必要があります。ここでは、複数の量子ビットを考えるときのルールを紹介します。

量子ビットについて考える前に、まずは複数のビットについて考えましょう。例えば A, B 2 つのビットがあるとき、2 つのビットの状態は、

1. A も B も 0
2. A は 0, B は 1
3. A は 1, B は 0
4. A も B も 1

の4種類が考えられます。これらの状態をそれぞれ 00, 01, 10, 11 と表すことにしましょう。

2 つのビットについて上のような 4 つの状態があるのだから、量子ビットも以下のケットで表されるような 4 つの状態を取ることができます。

$$|00\rangle\,,\ \ |01\rangle\,,\ \ |10\rangle\,,\ \ |11\rangle \tag{21}$$

2 において、量子力学では状態の重ね合わせを考えることができると述べました。従って、A, B 2 つの量子ビットについても、次のような 00, 01, 10, 11 の重ね合わせを考えることができます。

$$a\,|00\rangle + b\,|01\rangle + c\,|10\rangle + d\,|11\rangle \tag{22}$$

ただし、ここでも全ての確率を足すと1になるという条件から $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ が成り立ちます。これはルール 1. を 2 量子ビットに拡張したものになっています。

また、1 量子ビットの時と同様に、2 量子ビットを表すケットについても対になるブラが存在し、ルール2, 3 を拡張すれば、以下のルールを得ます。

ルール2'. i, j, k, l はどちらも 0 または 1 の値をとるとする。このとき、

$$\langle ij|kl\rangle = \begin{cases} 1 & (i = k \text{かつ} j = l) \\ 0 & (i \neq k \text{または} j \neq l) \end{cases} \tag{23}$$

が成り立つ。

ルール3'. a, b, c, d を(複素)数、$|\psi\rangle$を任意のケットとして、以下が成り立つ。

$$\langle\psi|\,(a\,|00\rangle + b\,|01\rangle + c\,|10\rangle + d\,|11\rangle) = a\,\langle\psi|00\rangle + b\,\langle\psi|01\rangle + c\,\langle\psi|10\rangle + d\,\langle\psi|11\rangle \tag{24}$$

$$(a\,\langle 00| + b\,\langle 01| + c\,\langle 10| + d\,|11\rangle)\,|\psi\rangle = a\,\langle 00|\psi\rangle + b\,\langle 01|\psi\rangle + c\,\langle 10|\psi\rangle + d\,\langle 11|\psi\rangle \tag{25}$$

このルールを繰り返し用いれば全ての 2 量子ビットのブラケットの計算ができる。

以上では 2 つの量子ビットについて考えましたが、3 つ、4 つになってもまずは 3 つ、4 つのビットの状態を考えて、それらの重ね合わせを考えれば同様のルールが成り立ちます。

4.2 複数の量子ビットの状態の変化はどうやって表されるか？

前節で複数の量子ビットの状態の表し方を確認しました。それでは、複数の量子ビットに対する変換や測定はどのように表されるのでしょうか？

ここでは、1番目の量子ビットと2番目の量子ビットを分けて考えられるように $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ といった状態を、$|0\rangle_1 |0\rangle_2, |0\rangle_1 |1\rangle_2, |1\rangle_1 |0\rangle_2, |1\rangle_1 |1\rangle_2$ と表すことにします。1番目の量子ビットの状態が $(a|0\rangle + b|1\rangle)$、2番目の量子ビットの状態が $(c|0\rangle + d|1\rangle)$ と表されるとき、2つの量子ビットの状態は

$$(a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1)(c|0\rangle_2 + d|1\rangle_2) = ac|0\rangle_1|0\rangle_2 + ad|0\rangle_1|1\rangle_2 + bc|1\rangle_1|0\rangle_2 + bd|1\rangle_1|1\rangle_2 \tag{26}$$

と表されます。

このとき、まずは1番目の量子ビットにユニタリ変換 U を作用させると、変換される前の状態が

$$|\psi\rangle = a|0\rangle_1|0\rangle_2 + b|0\rangle_1|1\rangle_2 + c|1\rangle_1|0\rangle_2 + d|1\rangle_1|1\rangle_2 \tag{27}$$

と表されるとき、変換された後の状態は

$$a(U|0\rangle_1)|0\rangle_2 + b(U|0\rangle_1)|1\rangle_2 + c(U|1\rangle_1)|0\rangle_2 + d(U|1\rangle_1)|1\rangle_2 \tag{28}$$

と書くことができます。例えば、アダマールゲート H を作用させる場合を考えましょう。このとき、変換後の状態は

$$a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_1\right)|0\rangle_2 + b\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_1\right)|1\rangle_2 + c\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_1\right)|0\rangle_2 + d\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_1\right)|1\rangle_2 \tag{29}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(a+c)|0\rangle_1|0\rangle_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(b+d)|0\rangle_1|1\rangle_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(a-c)|1\rangle_1|0\rangle_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(b-d)|1\rangle_1|1\rangle_2 \tag{30}$$

と表すことができます。

次に、2つの量子ビットをいっぺんに変換させることを考えてみましょう。このとき、1量子ビットの変換と同じようなルールが成り立ちます。

ルール 4'. $|\psi\rangle = a|0\rangle_1|0\rangle_2 + b|0\rangle_1|1\rangle_2 + c|1\rangle_1|0\rangle_2 + d|1\rangle_1|1\rangle_2$ はユニタリ変換 V によって次のように変換される。

$$V|\psi\rangle = a(V|0\rangle_1|0\rangle_2) + b(V|0\rangle_1|1\rangle_2) + c(V|1\rangle_1|0\rangle_2) + d(V|1\rangle_1|1\rangle_2) \tag{31}$$

例えば、

$$V|0\rangle_1|0\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2) \tag{32}$$

$$V|0\rangle_1|1\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2) \tag{33}$$

$$V|1\rangle_1|0\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|1\rangle_2 - |1\rangle_1|0\rangle_2) \tag{34}$$

$$V|1\rangle_1|1\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|0\rangle_2 - |1\rangle_1|1\rangle_2) \tag{35}$$

というような変換を考えてみましょう。このとき、

$$|\psi\rangle = |+\rangle_1|+\rangle_2 = \frac{1}{2}(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2) \tag{36}$$

を V で変換させると、

$$V|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|1\rangle_2) \tag{37}$$

となります。

最初に触れた１番目の量子ビットのみを変換させる操作も、例えば、

$$
\begin{aligned}
V\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2 &= (U\left|0\right\rangle_1)\left|0\right\rangle_1 && (38)\\
V\left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2 &= (U\left|0\right\rangle_1)\left|1\right\rangle_1 && (39)\\
V\left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2 &= (U\left|1\right\rangle_1)\left|0\right\rangle_1 && (40)\\
V\left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2 &= (U\left|1\right\rangle_1)\left|1\right\rangle_1 && (41)\\
& && (42)
\end{aligned}
$$

というユニタリ変換と考えれば良いです。

ここまでユニタリ変換で表される状態の変換について考えてきました。次に、測定について考えてみましょう。ここではユニタリ変換を考えた時とは反対に、２つの量子ビットをいっぺんに測定する方から考えてみます。このとき、ルール5を拡張したものが成り立ちます。

ルール 5"'. $\left|\psi\right\rangle$というケットで表される状態について、$A, B, C, ...$ のうちどの状態であるかの測定を行うとする。ただし、これらの状態を表すケット $\left|A\right\rangle$, $\left|B\right\rangle, ...$ に対して,

$$\left\langle X|Y\right\rangle = \begin{cases} 1 & (X, Y \text{ が同じアルファベット}) \\ 0 & (X, Y \text{ が異なるアルファベット}) \end{cases} \tag{43}$$

が成り立っている必要がある。

このとき、測定によって$|\left\langle X|\psi\right\rangle|^2$ の確率で X という結果を得て、ケットは $\left|X\right\rangle$ に変化する。(X は $A, B, C...$ のどれでも良い。)

例えば、

$$\left|A\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2 + \left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2) \tag{44}$$

$$\left|B\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2 + \left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2) \tag{45}$$

$$\left|C\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2 - \left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2) \tag{46}$$

$$\left|D\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2 - \left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2) \tag{47}$$

の場合を考えてみましょう。このとき、

$$\left|\psi\right\rangle = \left|+\right\rangle_1\left|+\right\rangle_2 = \frac{1}{2}(\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2 + \left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2 + \left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2 + \left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2) \tag{48}$$

で表される状態について A, B, C, D のどの状態であるかの測定を行うと、A という結果が出る確率は

$$
\begin{aligned}
|\left\langle A|\psi\right\rangle|^2 &= \left|\frac{1}{2}(\left\langle A|00\right\rangle + \left\langle A|01\right\rangle + \left\langle A|10\right\rangle + \left\langle A|11\right\rangle)\right|^2 && (49)\\
&= \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\{(\left\langle 00|00\right\rangle + \left\langle 11|00\right\rangle) + (\left\langle 00|01\right\rangle + \left\langle 11|01\right\rangle) + (\left\langle 00|10\right\rangle + \left\langle 11|10\right\rangle) + (\left\langle 00|11\right\rangle + \left\langle 11|11\right\rangle)\}\right|^2 = \frac{1}{2} && (50)
\end{aligned}
$$

と計算できます。他も同じように計算できて、確率の和が１になるのを確認できるはずです。

２量子ビットをいっぺんに測定する際はルール5 を拡張したルールが成り立っています。それでは、２つのうち片方の量子ビットを測定する場合はどのようなルールが成り立つのでしょうか？それは、以下のように表されます。

ルール6. ２量子ビットの状態が、$\left\langle A|A\right\rangle = 1, \left\langle B|B\right\rangle = 1, \left\langle A|B\right\rangle = 0, \left\langle B|A\right\rangle = 0$ を満たすケットと $|a|^2 + |b|^2 = 1$ となる２つの(複素)数 a, b を用いて、

$$\left|\psi\right\rangle = a\left|A\right\rangle_1\left|\psi_A\right\rangle_2 + b\left|B\right\rangle_1\left|\psi_B\right\rangle_2 \tag{51}$$

と表されるとき、1番目の量子ビットにおけるA か B かの測定によって、$|a|^2$ の確率で A という結果を得て、ケットは $|A\rangle_1 |\psi_A\rangle_2$に変換し、$|b|^2$ の確率で B という結果を得て、ケットは $|B\rangle |\psi_b\rangle$に変換する。

このルール 6. も量子ビットの数を増やした時に拡張することができます。ここでは次の節で紹介する量子テレポーテーションに用いる、3量子ビットの場合のルールを書いておきましょう。

ルール6'. 3つの量子ビットのうち1番目と2番目の量子ビットをまとめて、A, B, C, D のうちどの状態であるかの測定を行うとする。ただし、これらの状態を表すケット $|A\rangle$, $|B\rangle, \ldots$ に対して,

$$\langle X|Y\rangle = \begin{cases} 1 & (X, Y \text{ が同じアルファベット}) \\ 0 & (X, Y \text{ が異なるアルファベット}) \end{cases} \tag{52}$$

が成り立っている必要がある。3量子ビットの状態が、$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$ を満たす(複素)数を用いて

$$|\psi\rangle = a\,|A\rangle_{12} |\psi_A\rangle_3 + b\,|A\rangle_{12} |\psi_B\rangle_3 + c\,|C\rangle_{12} |\psi_C\rangle_3 + d\,|D\rangle_{12} |\psi_D\rangle_3 \tag{53}$$

と表されるとき、1番目と2番目の量子ビットにおける A, B, C, D かの測定によって、$|a|^2$ の確率で A という結果を得て、ケットは $|A\rangle_{12} |\psi_A\rangle_3$に変換する。$B, C, D$ の結果についても同様のことが成り立つ。

4.3 量子テレポーテーション

以上のルールから量子テレポーテーションが一体どのようなものなのかを考えることができます。量子テレポーテーションは、一言で言うと量子情報を遠く離れた相手に伝える手段ですが、量子テレポーテーションとは何かを詳しく説明する前にまずは次の応用問題を解いてみましょう。

応用問題. $|\psi\rangle_1 = a\,|0\rangle_1 + b\,|1\rangle_1$ というケットで1量子ビットの状態が表されるとする。

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_2 |0\rangle_3 + |1\rangle_2 |1\rangle_3 \right) \tag{54}$$

というケットで表される状態にある3量子ビットの1番目の量子ビットと2番目の量子ビットに対して、まずは

$$V\,|0\rangle_1 |0\rangle_2 = |0\rangle_1 |0\rangle_2 \tag{55}$$
$$V\,|0\rangle_1 |1\rangle_2 = |0\rangle_1 |1\rangle_2 \tag{56}$$
$$V\,|1\rangle_1 |0\rangle_2 = |1\rangle_1 |1\rangle_2 \tag{57}$$
$$V\,|1\rangle_1 |1\rangle_2 = |1\rangle_1 |0\rangle_2 \tag{58}$$

という変換を行なった後、さらに1番目の量子ビットにアダマールゲート H による変換を行う。

その後、1番目の量子ビットと2番目の量子ビットについて、

$$|0\rangle_1 |0\rangle_2\,,\ |0\rangle_1 |1\rangle_2\,,\ |1\rangle_1 |0\rangle_2\,,\ |1\rangle_1 |1\rangle_2 \tag{59}$$

で表される $00, 01, 10, 11$ の状態のうちどれかという測定をする。この時、00 という結果が出る確率とその時の測定後の状態、01 という結果が出る確率とその時の測定後の状態を求めよ。

解答.

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a\,|0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 + a\,|0\rangle_1 |1\rangle_2 |1\rangle_3 + b\,|1\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 + b\,|1\rangle_1 |1\rangle_2 |1\rangle_3) \tag{60}$$

の1番目の量子ビットと2番目の量子ビットに対して V を作用させると、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(a(V\,|0\rangle_1 |0\rangle_2)\,|0\rangle_3 + a(V\,|0\rangle_1 |1\rangle_2)\,|1\rangle_3 + b(V\,|1\rangle_1 |0\rangle_2)\,|0\rangle_3 + b(V\,|1\rangle_1 |1\rangle_2)\,|1\rangle_3) \tag{61}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(a\,|0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 + a\,|0\rangle_1 |1\rangle_2 |1\rangle_3 + b\,|1\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_3 + b\,|1\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_3) \tag{62}$$

とケットは変化する. 次に、 1 番目の量子ビットにアダマールゲート H による変換を行うと、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(a(H|0\rangle_1)|0\rangle_2|0\rangle_3 + a(H|0\rangle_1)|1\rangle_2|1\rangle_3 + b(H|1\rangle_1)|1\rangle_2|0\rangle_3 + b(H|1\rangle_1)|0\rangle_2|1\rangle_3) \tag{63}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(a|+\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + a|+\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 + b|-\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3 + b|-\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3) \tag{64}$$

$$= \frac{1}{2}\{|0\rangle_1|0\rangle_2(a|0\rangle_3 + b|1\rangle_3) + |0\rangle_1|1\rangle_2(a|1\rangle_3 + b|0\rangle_3) + |1\rangle_1|0\rangle_2(a|0\rangle_3 - b|1\rangle_3) + |1\rangle_1|1\rangle_2(a|1\rangle_3 - b|0\rangle_3)\} \tag{65}$$

というケットで表される状態に変化する。この状態に対して、$00, 01, 10, 11$ の状態のうちどれかという測定をすると、ルール6' の A, B, C, D を $00, 01, 10, 11$ に置き換えてやればこれらの測定結果はそれぞれ確率 $1/4$ で出てきて、 00 という結果が出た時は

$$|0\rangle_1|0\rangle_2(a|0\rangle_3 + b|1\rangle_3) \tag{66}$$

01 という結果が出た時は

$$|0\rangle_1|0\rangle_2(a|1\rangle_3 + b|0\rangle_3) \tag{67}$$

という状態に変化する。他の結果が出てきた時も同様に計算できる。

実は、この応用問題で行なった計算が物理的には量子テレポーテーションと言われる操作になります。まず、Aさんが問題における 2 番目の量子ビットを、Bさんが 3 番目の量子ビットを持っているとしましょう。お互いに、自分が持っている量子ビットについてはどんな操作もできるが、相手が持っている量子ビットは操作できないとします。そこに、Dさん(Dealer のD) が $|\psi\rangle$ で表される状態の 1 番目の量子ビットをAさんに渡すとします。AさんもBさんもこの量子ビットの状態は全くわからないとき、Bさんにこの量子ビットが持つ量子情報をBさんに伝えるにはどうすれば良いでしょうか。

量子ビットに対する測定では測定するたびに量子ビットの状態が変化してしまうため、測定によって量子ビットの状態を知ることはできません。したがって、考えうる 1 つの方法としては Aさんがこの量子ビットを直接Bさんの元に持っていくという方法が考えられます。

しかし、応用問題の結果を使うことでも量子情報を伝えることができます。応用問題において、00 という測定結果を得た後の状態は、

$$|0\rangle_1|0\rangle_2(a|0\rangle_3 + b|1\rangle_3) \tag{68}$$

と表されていました。この状態の 3 番目の量子ビットに注目すると、 3 番目の量子ビットは$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ という状態になっていることに気づきます。では、01 という結果が出たときはどうでしょう？このとき、 3 番目の量子ビットは$a|1\rangle + b|0\rangle$ という状態になっていることに気づきます。これはもともとAさんが送りたかった量子ビットとは違う状態になっています。そこで、AさんがBさんに測定の結果を伝えてあげることにします。すると、今度はBさんが 3 番目の量子ビットに X ゲートを作用させることで $X(a|1\rangle + b|0\rangle) = |\psi\rangle$ と、もともとAさんが送りたかった量子ビットの状態を復元することができます。他の測定結果が出たときも測定結果に応じた操作をBさんが行うことでAさんが送りたかった量子ビットの状態を復元することができます。

このように、以上の一連の操作によってAさんは測定結果という古典的な情報を伝えるだけでBさんに量子情報を送ることができます。この操作のことを量子テレポーテーションと呼び、量子情報科において非常に重要な役割を果たします。詳しくは量子情報班ポスター「エンタングルメント」とその解説PDFをご覧ください。

5 さいごに

この講義ノートでは、ブラケット記法の計算ルールを導入し、シュテルン・ゲルラッハの実験や量子テレポーテーションといった量子力学ならではの性質を見てきました。量子力学の確率論的な考え方や、測定が状態を変えてしまうといったことは高校物理の感覚からは不思議に思うことでしょう。(少なくとも私たちはそうでした...) 量子力学の興味深い性質はまだまだこれだけではありません。是非、量子情報班が作った他のポスターや解説記事も読んでみてください。そして、量子力学に興味を持ったなら、しっかりとした量子力学の教科書を読んでみてください。今すぐ読めるものは少ないと思いますが難し目の本を読むことは良い目標になるので、以下にはいくつか教科書を挙げておきます。

- R. P. ファインマン, 「ファインマン物理学 V 量子力学」岩波書店 (1986). この本で初めて量子力学を勉強しました。最初の 3 章を読めばこのノートに書かれていること $+\alpha$ が学べると思います。また、ここではきちんと述べられなかった量子力学の波動的な性質もわかりやすく書かれています。英語版で良ければインターネット上で無料公開されています。`https://www.feynmanlectures.caltech.edu/`
- 清水明, 「新版量子論の基礎その本質とやさしい理解のために」サイエンス社 (2004). 初学者にわかりやすく、また量子論にある程度馴染みのある読者も学ぶことの多い本だと思う。伝統的な量子力学の講義の構成と一線を画した、量子力学の本質を理解しやすいように工夫された構成であり、さらに説明が特に分かりやすいと自分は感じた。
- 宮野健次郎, 古澤明, 「量子コンピュータ入門(第2版)」日本評論社 (2016). 大学1,2年生向けの講義 "量子コンピュータ入門" の参考書。量子テレポーテーションだけでなくその他の量子アルゴリズムについてもわかりやすい解説がある。
- J. J. サクライ, 「現代の量子力学上・下 (第2版)」吉岡書店 (1989). 大学4年生になってもずっと使える。高校生で読むのは厳しいが大学でも物理をやるならいつか読むことになるのでは？
- M. ニールセン, I. チャン, 「量子コンピュータと量子通信 I,II,III」オーム社 (2004). 量子情報の基本的な教科書。例年、量子情報班に入りたての大学 2 年生が半年間この本の一部を読むゼミをやります。