

アクティブマター物理学

Physics Lab. 2021 アクティブマター班
東京大学 理学部物理学科 3 年 田耕 健也

2021 年 5 月 12 日

目次

第 I 部	アクティブマター物理学とは	2
第 II 部	個体	2
第 III 部	集団	2
1	モデル: ドライなアプローチ	3
1.1	物理モデル	3
1.2	数学モデル	3
1.2.1	Boid	4
1.2.2	坂井モデル	4
1.2.3	Vicsek モデル	6
1.2.4	Toner-Tu モデル	8
2	実験: ウェットなアプローチ	10
2.1	遊泳バクテリア	10
3	自発的対称性の破れと自己駆動粒子の集団運動	11
3.1	自発的対称性の破れとは	12
3.2	Vicsek モデルにおける自発的対称性の破れ	13
3.2.1	相転移	13
3.2.2	巨大な粒子数ゆらぎ	13
3.2.3	異常拡散	14

第Ⅰ部

アクティブマター物理学とは

この世界には、運動するための仕組みを自身の内部に持つものがたくさんあります。例えば、微生物、魚、人間、自動車などです。ここで、「微生物が鞭毛の動きでシャーレ上を移動する^{*1}」だとか、「自動車がガソリンの燃焼で北海道を周遊する」といった、それぞれの動く仕組みやスケールの違いは無視してしましましょう^{*2}。すると、これらをまとめて「自分で速度を変えられるもの」だとみなすことができます。このような「自分で速度を変えられるもの」のことを自己駆動粒子といいます。自己駆動粒子を扱う物理学の分野こそが、アクティブマター物理学です。

第Ⅱ部

個体

自己駆動粒子を考えたときにまず気になるのは、それぞれの種類の自己駆動粒子はどのようなメカニズムで動いているのかということです。特に生物に関しては、運動の機構を解明するための研究が長い間おこなわれてきました [3]。しかし、この解説 PDF ではそれぞれの運動機構の特性よりも一般の集団運動に興味があるので、詳しくは論じません。

第Ⅲ部

集団

私たちの身の回りの自己駆動粒子を思い浮かべてみましょう。多くの場合、多数の自己駆動粒子が集まることで“群れ”をつくっていますね。マイワシのトルネードや蚊柱がすぐに浮かびます。夕方飛び回るムクドリの大群に恐怖を覚えたことも一度はあるのではないのでしょうか。動物に限らず、例えば車の渋滞も一種の“群れ”とみなすことができます。もちろん、私たち人間も“群れ”を構成し、例えば通勤・通学ラッシュ時には一人一人が群衆の構成員となります^{*3}。

これらの“群れ”の共通点は、「自ら動くものたちが数多く集まって、秩序的な運動をしている^{*4}状態」であることです。この状態を自己駆動粒子の集団運動といいます。

自己駆動粒子は自分で速度、すなわち運動エネルギーを変えます。平衡統計力学では各自勝手にエネルギーを変える(=平衡状態にない)粒子たちは扱えませんでした^{*5}。このことから、自己駆動粒子の集団運動の研究は非平衡統計力学に属します。

- 自己駆動粒子の集団運動はどのように形成されるのか

^{*1} これを swarming といいます。詳しくは[こちら](#)の記事をご覧ください。

^{*2} スケールや対象が異なる現象の共通点を引っ張り出して議論することは、物理学でよく行われます。

^{*3} し、群れずに生きることをすすめる本が自己啓発書コーナーに平積みになり、人々が群れています。

^{*4} 全体としてある方向に進んだり、あるパターンを形成しているということです。

^{*5} 平衡・非平衡については、[こちら](#)の記事をご覧ください。

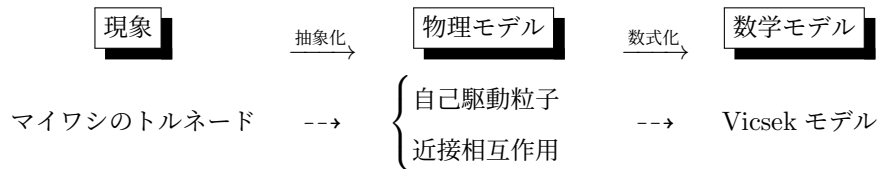
- 自己駆動粒子の集団運動に潜む普遍性は何か

といった疑問も、非平衡統計力学の問題として研究がおこなわれています。

1 モデル: ドライなアプローチ

それでは、これらの“群れ”はどのように形成されるのでしょうか。物理学で実際の現象を扱うには、二つのステップを踏みます。

まずは、現象を抽象化して**物理モデル**にします。これによって、様々な現象を一度にまとめて簡単な形で考えることが可能になり、共通した枠組みの発見にもつながります。次に、数式で記述した**数式モデル**にします。物理モデルではおおまかな性質の議論しかできませんでしたが、数式モデルでは具体的に計算をすることでより深く議論をすることが可能になります。ただし、現象からモデルを立てるにあたって多少なりとも性質を落としている (捨象がある) 点で、モデルは現象そのものとは異なることに注意しなければなりません [5]。



1.1 物理モデル

さて、「自己駆動粒子の集団運動」の物理モデルを考えてみましょう。動物の頭の中を想像するのは難しいので、私たち人間の作る“群れ”を考えてみることにします。

ラッシュアワーにおいては、「全員でまとまって登校するにはどうすればいいのだろう」「まわりの人にはいくらぶつかってもいいから、ジグザグに動いて出社しようかな」といったことは考えず、前方数人の背中に無心でついていきます。

現実世界での人間の動きだけでなく、仮想的な人間の動きでも同じです。客観的に全体をとらえた情報や合理的な考察を無視し、周囲の多数派になんとか追随する人間の傾向による現象を、行動経済学の言葉で「ハーディング現象」といいます [1]。俗にいう「集団心理」のようなものだと考えると理解しやすいかもしれません。バブル相場やサブプライムローン問題などはハーディング現象の例と言えそうですね。

このように、集団運動を構成する各自己駆動粒子は、それぞれの近くの様子だけでそれぞれの運動を決めているのではないかと予想できます*6。自己駆動粒子間の近接相互作用で全体の振る舞いが決まるというわけです。

1.2 数学モデル

それぞれの自己駆動粒子が周囲の限られた範囲の情報のみによって運動を決定することで、全体が“群れ”として統制の取れた状態をとることは、実際に可能なのでしょうか。ここではいくつかの数学モデルを紹介します。

*6 マクロな流れを扱う流体力学の基礎方程式が、各地点の密度や速度といったミクロな要素で書かれていることから予想できます。

1.2.1 Boid

コンピュータでアニメーションをつくる際、鳥の群れの自然な動きを再現するために考えられたモデルが**Boid**^{*7}です [9]。それぞれの鳥に、

- 分離: 他の鳥とぶつからないように距離をとる。
- 整列: 周囲の鳥と同じ方向を向くようにする。
- 結合: 他の鳥が集まっている方向を向く。

という 3 種の相互作用をバランスよく^{*8}適用するだけで、全体が鳥のように見える動きが得られるとわかりました。

1.2.2 坂井モデル

ゴンズイ^{*9}の群れのように、頭と尾の区別があり、前向きに進む性質のある個体が群れをつくって動きまわる状況を説明するために考えられたのが**坂井モデル**です [10]。一般に個体の運動は、

- m_j : j 番目の個体の質量
- $\mathbf{x}_j$: j 番目の個体の位置ベクトル
- ν : (速度に比例する抵抗の) 抵抗係数

として、運動方程式

$$m_j \frac{d^2 \mathbf{x}_j}{dt^2} + \nu \frac{d \mathbf{x}_j}{dt} = \mathbf{F}_j$$

で説明できます。この右辺の力 $\mathbf{F}$ として次の成分を考えます。

- 前向走性: 大きさが一定で、常に進行方向に働く力
 a を推進力係数として、

$$\mathbf{F}_{aj} = a \frac{d \mathbf{x}_j}{dt} \left/ \left| \frac{d \mathbf{x}_j}{dt} \right| \right.$$

- 接近運動: 自分以外の $N - 1$ 個の粒子それぞれとの間の力の平均
 R_{ij} を個体 i, j 間の距離, R_1, R_2, C_1, C_2 を定数として、

$$\mathbf{F}_{cj} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N C(R_{ij})(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$$
$$C(R_{ij}) = \begin{cases} \frac{C_1}{R_{ij}} & 0 < R_{ij} < R_1 \\ C_2 & R_1 \leq R_{ij} \leq R_2 \\ 0 & R_2 < R_{ij} \end{cases}$$

つまり、個体 i, j 間には距離 R_{ij} が近すぎると距離に反比例する斥力が、中くらいだと一定の引力が働き、遠すぎると力が働かない。

^{*7} “bird-oid”, すなわち, 「鳥のようなもの」という意味です。

^{*8} どの距離でどれくらいの力が働くかといったパラメータを調節するということです。

^{*9} ナマズの一種で、集団で行動する習性があります。特に幼魚の群れは巨大な団子状の「ゴンズい玉」となることが知られています。

- 整列運動: 近くの仲間と向きを含めて速度をそろえようとする力 n を $R_{ij} \leq R_3$ となる仲間 i の個数, h を速度調節力係数, R_3 を定数として,

$$\mathbf{F}_{hj} = \frac{1}{n} \sum_{i: R_{ij} \leq R_3} h \left(\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} - \frac{d\mathbf{x}_j}{dt} \right)$$

- 擾乱作用: ノイズ

$$\mathbf{F}_{bj} = \mathbf{b}_j(t)$$

まとめると,

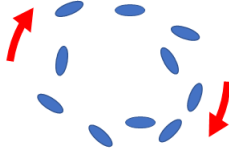
$$m_j \frac{d^2 \mathbf{x}_j}{dt^2} + \nu \frac{d\mathbf{x}_j}{dt} = a \frac{\frac{d\mathbf{x}_j}{dt}}{\left| \frac{d\mathbf{x}_j}{dt} \right|} + \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N C(R_{ij})(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + \frac{1}{n} \sum_{R_{ij} \leq R_3} h \left(\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} - \frac{d\mathbf{x}_j}{dt} \right) + \mathbf{b}_j(t)$$

なります. このとき, 各パラメータの組み合わせを変えながらシミュレーションを行うと, 群れのパターンが大きく 3 種類得られることがわかります^{*10}.

- アメーバ状運動: 推進力が小さく, ノイズが大きいと, 群れの位置は動かず, 形が変化していく.
- ドーナツ型運動: 推進力が大きいと, 重心の止まった環状の回転をつくる.
- 直進型運動: 整列作用が加わると, 小さなかたまりが直進運動をする.



アメーバ状運動



ドーナツ型運動



直進型運動

図 1: 3 パターンの群れ

^{*10} 時間がなく手元で確かめることはできなかったので, 興味のある方はぜひ実装してみてください.

1.2.3 Vicsek モデル

Vicsek(ヴィチェック) モデルは自己駆動粒子の集団運動を考えるうえで最も重要なモデルです。Vicsek モデルでは自己駆動粒子を向きを持つ矢印として考えます^{*11}。この矢印がたくさん集まり、ルールに従いながら運動します。ただし、各矢印の動き方のルールは次のとおりです：

- どの矢印も常に同じ速さで動き回る。
- それぞれの矢印は、自分からの距離が一定より近い矢印たちの平均に向きをそろえようとする。
- 向きをそろえようとする際に、一定のノイズが加わってしまう。

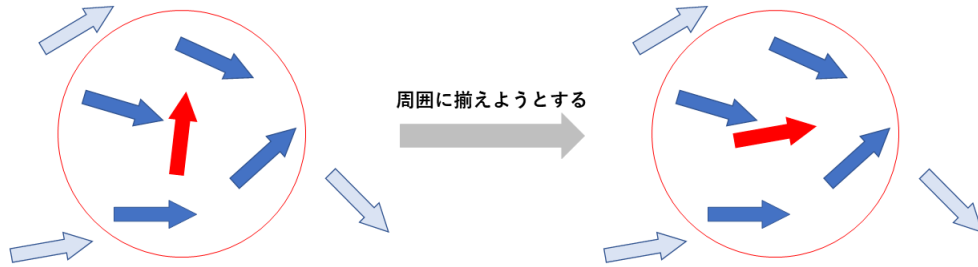


図 2: 矢印はまわりと向きをそろえようとする。

2 次元の Vicsek モデルを数式で書いてやると次のようになります：

時刻 t での j 番目の矢印の向きと位置を $\theta_j^t, \mathbf{r}_j^t$ として、

$$\theta_j^{t+1} = \arg \left[\sum_{k: |\mathbf{r}_k^t - \mathbf{r}_j^t| < R} e^{i\theta_k^t} \right] + \eta_j^t$$

$$\mathbf{r}_j^{t+1} = \mathbf{r}_j^t + v_0 \mathbf{e}_{\theta_j^{t+1}}$$

- 和 $\sum$ は、 j 番目の矢印中心に半径 R 内にある矢印全体についてとる。ただし j 番目の矢印自身も含める。
- η_j^t : 区間 $[-\eta/2, \eta/2]$ に一様分布するホワイトノイズ。(時間的にも矢印間にも相関がない.)

^{*11} これは電子スピンの集まりによる磁性を考えるときの XY モデルというものと非常によく似ています。違うのは矢印が固定されている (XY モデル) か、動き回る (Vicsek モデル) かという点です。

- $e_{\theta_j^{t+1}}$: 時刻 $t+1$ に矢印 j の向いている単位ベクトル.

日本語に訳せば,

(矢印の次の瞬間の向き) = (近くの矢印の今の向きの平均) + (ノイズ)

(矢印の次の瞬間の位置) = (矢印の今の位置) + (移動の速さ) $\times$ (矢印の次の瞬間の向き)

ということです. 全体としての動きを左右しているパラメータは,

- 時刻 0 での矢印の平均密度 ρ
- ノイズの大きさ η
- 矢印の速さ v_0
- 矢印の“視界”の広さ R

です.

■Vicsek モデルの実装 コンピュータプログラムで実際に矢印を動かしてみます. ここで, $v_0 > R$ とすると, すれ違いが一瞬で行われるため相互作用できない粒子が存在してしまい困ります. ですから $v_0 = R/2$ と置いてしまいましょう. 結局のところ, ρ, η の 2 つが実質的なパラメータとなるので, 実際にこれらを変化させながら振る舞いを見てみましょう. 計算するうえで,

- 動き回る範囲は 1×1 の正方形で, 周期境界条件^{*12}を課す.
- $\rho = 100, 1000, 10000$
- $\eta = 1, 2, 4, 6\text{rad}$
- $v_0 = 0.025, R = 0.05$

としたところ, $t = 100$ での様子は次のようになりました^{*13}:

^{*12} 例えば, 右の辺から出て行った矢印はすぐに左の辺の同じ高さから現れます. 本当は, 無限に広いところに一様に無限個の矢印が広がったときを考えたいのですが, 計算機実験では仕方なくこうします.

^{*13} 動画の一部は[こちら](#)から確認できます.

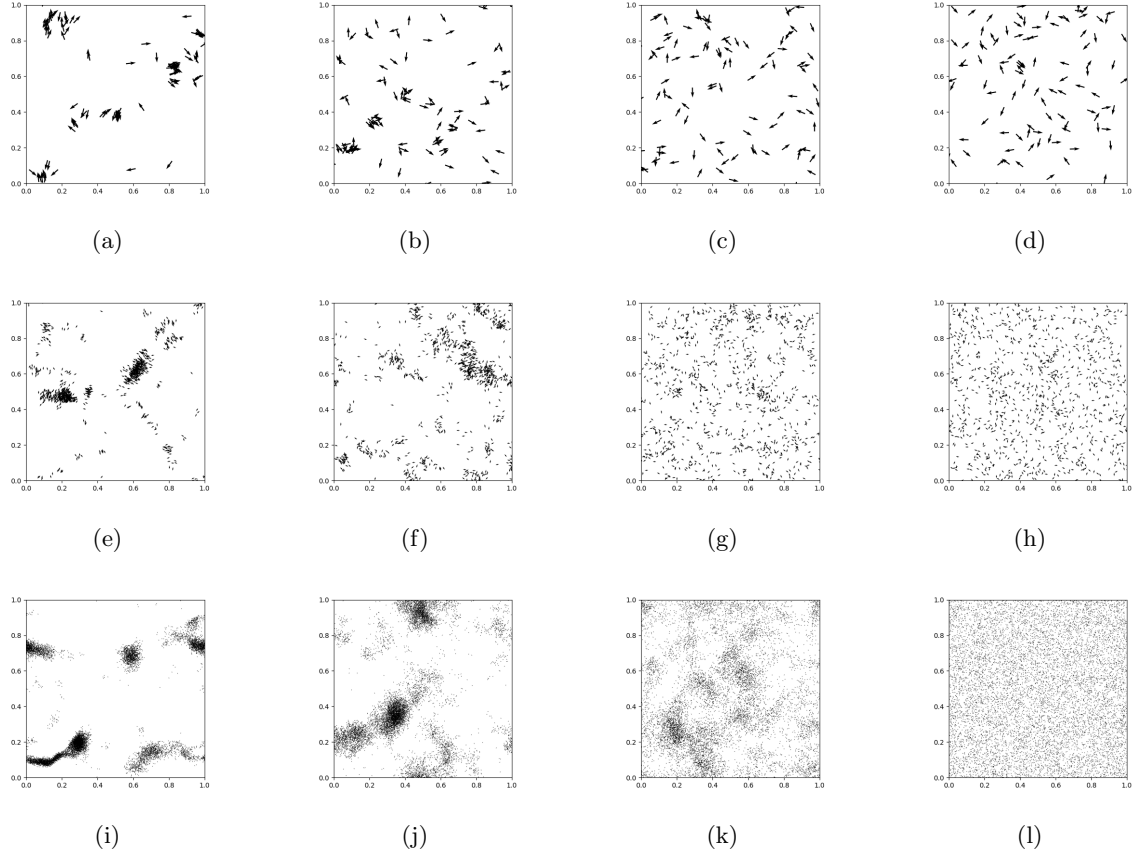


図 3: 次のパラメータ ρ, η に対する $t = 100$ の状態

- (a): $\rho = 100, \eta = 1$ (b): $\rho = 100, \eta = 2$ (c): $\rho = 100, \eta = 4$ (d): $\rho = 100, \eta = 6$
 (e): $\rho = 1000, \eta = 1$ (f): $\rho = 1000, \eta = 2$ (g): $\rho = 1000, \eta = 4$ (h): $\rho = 1000, \eta = 6$
 (i): $\rho = 10000, \eta = 1$ (j): $\rho = 10000, \eta = 2$ (k): $\rho = 10000, \eta = 4$ (l): $\rho = 10000, \eta = 6$

ノイズ強度 η が大きく矢印密度 ρ が小さいほど向きがそろわず無秩序的に、 η が小さく ρ が大きいほど向きがそろって秩序的になることが確認できます。それぞれの状態を無秩序相^{*14}、秩序相といい、ゆっくりノイズ強度や矢印密度を変化させていくと、ある特別な点でこれらの2つの相の移り変わり (相転移) が急激に起こることがより詳しい研究により分かっています。

1.2.4 Toner-Tu モデル

Vicsek モデルは、それぞれの矢印がどう動くかを計算しているので、例えば、矢印の位置による向きの違いを考えたいときに不便です。

実は、この問題の解決方法は流体力学にあります。通常、流体の運動を調べる際には、次の2通りの方法がとられます：

^{*14} 相とは、一様な性質を持つ状態のことです。マクロな物質を変化させても全体としての性質が変化しない状態にあるとき、変化の前後では相が同じとみなします。今回の場合は、多少ノイズの大きさや粒子密度を変化させても、矢印は群れを成したまま (あるいはバラバラなまま) というに当たります。

- **Lagrange(ラグランジュ)の方法**: 流体を無限に小さな塊に分け, それぞれの塊の動きを調べる.
つまり, ある塊の位置 $\mathbf{x}$ は, 塊の初期位置 $\mathbf{x}_0$ と時刻 t で決まる:

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0, t)$$

- **Euler(オイラー)の方法**: 流れを特徴づける速度, 密度などの様子を各瞬間, 各点で調べる.
つまり, 速度 $\mathbf{v}$ や密度 ρ が, どの場所 $\mathbf{x}$ と時刻 t を考えているかで決まる^{*15}:

$$\mathbf{v} = g(\mathbf{x}, t)$$

$$\rho = h(\mathbf{x}, t)$$

例えば川の流れを考えると, 水の詰まった小さな立方体に注目してそれぞれの動きを考えるのが Lagrange の方法, それぞれの場所と時間での水の密度や速度を俯瞰的に考えるのが Euler の方法というわけです.

Vicsek モデルは矢印の動きを調べていた Lagrange の方法に当たり, 流体力学風に連続場として記述した **Toner-Tu(トナー・トゥー) モデル**が対応するような Euler の方法です^{*16}. Toner-Tu モデルの式は次のようになります [12, 14]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \lambda_1(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \lambda_2(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + \lambda_3 \nabla(|\mathbf{v}|^2) \\ = \alpha \mathbf{v} - \beta |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} - \nabla P + D_B \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + D_T \nabla^2 \mathbf{v} + D_2(\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho) = 0$$

ただし,

- $\beta > 0$
- $D_B, D_T, D_2 > 0$: 拡散係数
- $\mathbf{f}$: 場所と時間について独立なノイズ
- 圧力は密度ゆらぎ $\rho - \rho_0$ で展開した式:

$$\begin{aligned} P &= P(\rho) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n (\rho - \rho_0)^n \end{aligned}$$

非常に難しそうな式ですが, それぞれの項を詳しくみていきます.

第 1 式の左辺は流体力学の基本方程式である **Navier-Stokes(ナヴィエ・ストークス) 方程式**とほぼ共通です. 異なるのは左辺第 2 項から第 4 項の移流項と呼ばれる部分で, Navier-Stokes 方程式では $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

^{*15} このように, 場所と時間を決めてやるとそこでの物理量が得られるようなものを **場**といいます. 速度場や密度場の他にも, 電場・磁場や重力場といったものが考えられます.

^{*16} ただし, 導出の過程で高次の項を無視しているので, 完全には記述できていません. Toner-Tu モデルの導出については「**自由エネルギーから見るアクティブマターの流体モデル**」をご覧ください.

となっています。Navier-Stokes 方程式を導出する際には、「どんな速さで走りながら流れを見ても物理法則は同じ」という Galilei(ガリレイ) 共変性を仮定していました。しかし、Toner-Tu モデルではこの Galilei 共変性を仮定していない^{*17}ため、Galilei 共変性を持つなら 0 でなければいけなかったり、係数が 1 でなければならぬはずの項が絞られずに残っているのです。

第 1 式の右辺第 1 項、第 2 項も同じように、Galilei 共変性を要請しないことから残っている項です。第 1 式をマクロな目で見ても、速度の空間平均をとったときにはこれら 2 項だけが残ります。また、 $\alpha > 0$ のとき、 $|\mathbf{v}| = \sqrt{\alpha/\beta}$ 、 $\alpha \leq 0$ のとき、 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ という解を持ちます。これらはそれぞれ、秩序相と無秩序相に対応しています。つまり、 α の符号変化が相転移を意味するのです^{*18}。

第 4 項から第 6 項は速度ゆらぎの拡散を示す項です。興味深いことに、これらの粘性項は、近接する魚の向きを平行にしようとする、群れの“弾力性”を担っています。

第 2 式はずっと簡単で、魚の数の保存を意味する式です。勝手に魚が出現したり消え去ったりしては困ってしまいますし、なにより魚がかわいそうです。

この Toner-Tu モデルについては様々な統計力学的手法によって解析が行われていますが、ここではこれ以上深入りしません。

2 実験: ウェットなアプローチ

ここまで、計算モデルによる自己駆動粒子の集団運動に見られる統計力学的振る舞いの一部を見てきました。当然、これらの性質が実在する自己駆動粒子の集団運動についても見られるのか気になります。しかし、実際にイワシやムクドリを使って実験しようとするとうまくいかなくて大変です。ですから、扱いが比較的楽なバクテリアや分子モーターなどで実験が行われています。

2.1 遊泳バクテリア

バクテリアは、鞭毛を回転させて流体を掻き出すことで、前から後ろに排出する流れを作り出します。このようなバクテリアが互いに近づくと、流れに沿うように進行方向をそろえようとするので、集団運動が期待できます。実際には、アクティブ乱流^{*19}と呼ばれる、不規則な動きと渦が見られます。ただの粘性流体の乱流ならば渦の大きさはバラバラのはずですが、解析の結果ある大きさの渦が支配的になっていることがわかり、自己駆動粒子の集団運動特有の現象だと考えられています [7]。

さて、当然この渦には時計回りと反時計回りの 2 種類が存在します。渦と渦は流路を介して相互作用しています^{*20}が、向きが揃うように作用するか、もしくは向きが逆になるように作用するかは条件によります。この状況はそれぞれ、電子スピンの向きをそろえる強磁性的な相互作用と、互いに逆向きが安定な反強磁性的な相互作用と全く同じになっています。実験の結果、渦の中心間距離と渦の大きさをそれぞれ D, R とし D/R を増加させていくと、 $D/R \simeq 1.4$ で強磁性的秩序から反強磁性的秩序に遷移することがわかりました。

^{*17} 誰も、走りながら魚の群れを眺めたりなんか、しません。

^{*18} これは、平均場理論を用いて相転移を考えた、Ginzburg-Landau 方程式 $\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})^2\psi = 0$ における係数 α の正負が相を分けていることに通じています [6]。

^{*19} 詳しくは、[こちらの](#)記事をご覧ください。

^{*20} 例えば 2 つの台風が干渉しあって通常とは異なる進路を取ることがあり、これを藤原効果といいます [4]。

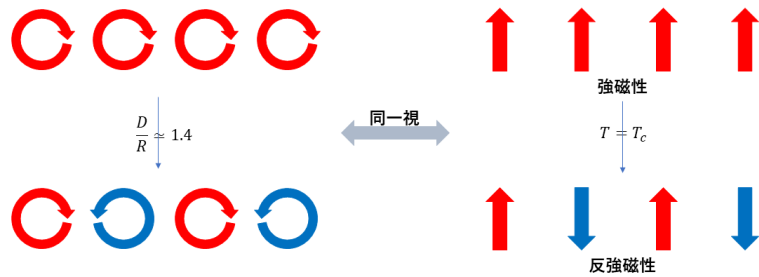


図 4: バクテリアの渦と電子スピンを同一視する

勘のいい読者は気づいたでしょうが、この遷移はほぼ $D/R = \sqrt{2}$ で起きています。 $D/R = \sqrt{2}$ となるとき、図 5 中のように流れどしは垂直に交わり、互いに力は加わりません。これより中心間距離が近い(遠い)と左(右)のようになり、同じ向き(反対向き)に回転するよう力が加わります。実は、このような幾何学的制約によってほぼこの値となっているのです。

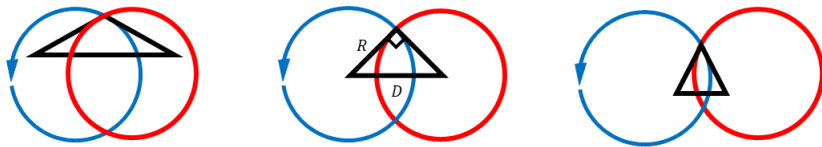


図 5: D/R により振る舞いが変わる

3 自発的対称性の破れと自己駆動粒子の集団運動

ここでは、自己駆動粒子の集団運動における様々な現象を、「自発的対称性の破れ」の観点から見てみます。

3.1 自発的対称性の破れとは

対称性は、物理学においてとても重要な概念です。たとえば、「世界は時間並進、空間並進、空間回転対称性を持つはずだ」という要請から、それぞれエネルギー、運動量、角運動量の保存則が導かれます。[15, 16, 17]

しかし、対称性が世界を完全に支配しているわけではありません。進化の結果、カレイの両目は体の右側に、ヒラメの両目は体の左側に偏っており、左右の対称性を失っています。尖った鉛筆を丸机の中心に立てると回転に対して対称ですが、すぐに倒れて鉛筆の指す特別な方向ができてしまい、回転対称性は失われます。液体の水には上下左右の別はなく連続的な回転対称性を持ちますが、水の結晶になると水素結合の向きが特別になり連続的な回転対称性を失います。

このように自然界には、もともと持っていた対称性が勝手に失われてしまう自発的対称性の破れ^{*21}という現象が多く存在します。この自発的対称性の破れによって、様々な興味深い現象が引き起こされることがわかっています。

ここで、自発的対称性の破れにまつわる 2 つの重要な定理をおおまかな形で紹介しておきましょう [11]:

(1) Mermin-Wagner の定理

短距離相互作用をする 2 次元以下の平衡系では、有限温度で連続対称性を自発的に破った長距離秩序相は存在しない。

(2) 南部-Goldstone 定理

系の連続対称性が自発的に破れると、質量を持たない南部-Goldstone 粒子があらわれる。

量子論では粒子を振動に、その質量をその振動に必要なエネルギーに置き換えて考えられるので、ここではエネルギーの不要な振動 (南部-Goldstone モード^{*22}) があらわれると考えます。

南部-Goldstone モードは身近に潜んでおり、例えば地震波が挙げられます。

2 次元の格子状に結合した粒子を考えましょう (a)。このシートは x, y 方向の並進対称性を持ちます。左から 2 番目の列をすこし右/上にずらしてみると、(b)/(c) のように x 方向の並進対称性が失われます。このとき、 x 方向の縦波 (横波) の発生を予想できます。この縦波は地震波という P 波 (S 波) に対応する南部-Goldstone モードです。

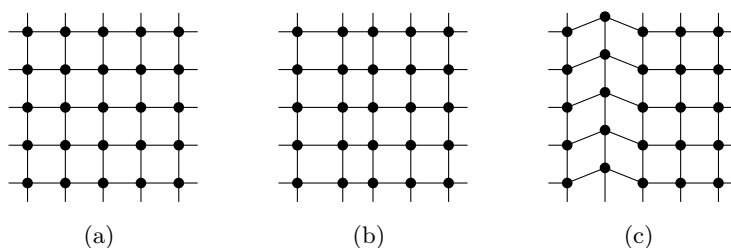


図 6: 南部-Goldstone モードとしての地震波

(a):格子状に並べる (b):右にずらす (c):上にずらす

^{*21} 南部陽一郎博士は、自発的対称性の破れを素粒子物理学で提唱し、破れた対称性に応じて波が現れることを指摘、後のヒッグス粒子の存在を示唆したことで 2008 年にノーベル物理学賞を受賞しました。

^{*22} 系の挙動を複数の振動子の合成としてみることができるとき、それぞれの振動子のことをモードといいます。

3.2 Vicsek モデルにおける自発的対称性の破れ

さて、Vicsek モデルの無秩序相には特別な向きはなく、回転対称性を持っています。しかし、秩序相では粒子の進行方向がそろうため、特別な方向ができてしまい回転対称性が失われます。つまり、Vicsek モデルにおいても自発的な対称性の破れが見られることがわかります。2つの定理は、Vicsek モデルにおいてどのように現れているのでしょうか。

3.2.1 相転移

2次元 Vicsek モデルにおける、秩序相と無秩序相の間の相転移^{*23}について考えてみましょう。

そもそも「これは秩序的」「これは無秩序的」といったことを感覚で判断しており曖昧だったので、きちんと“揃い具合”を数字で定義しておきます。ここで用いるのは、 N を全粒子数としたとき、次の式で定義される秩序変数です。

$$\varphi^t := \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j^t} \right|$$

この秩序変数は時間によって変動してしまうので、十分時間がたって落ち着いた定常状態での時間平均 $\langle \varphi^t \rangle$ だけを見てあげましょう。

ここで気になるのは、相転移の前後で秩序変数の値に不連続な段差が生じるのか、もしくは連続的に変化するか、という点です。 η を動かすとどのように $\langle \varphi^t \rangle$ が変化するかをグラフにすると、系を大きくするにつれて断崖絶壁が現れるようになることが計算によりわかりました [2]。これは、Vicsek モデルの秩序・無秩序転移は不連続転移であることを意味します。この転移点では2相が共存し、Vicsek waveと呼ばれるバンドが無秩序相の中を通過していく現象がみられます。

さて、2次元の Vicsek モデルは、

- 短距離相互作用をする
- 2次元以下
- 有限温度^{*24}

を満たします。ですから、もし平衡系だったならば、Mermin-Wagner の定理より、長距離秩序相は存在しないはずです。しかし、実際には長距離秩序を持つ秩序相が存在していました。このことから、2次元 Vicsek モデルの相転移は非平衡系であるがゆえのものだとわかります。

3.2.2 巨大な粒子数ゆらぎ

2次元 Vicsek モデルにおいて、ある正方形の視野を決め、時刻 t にこの中で観測される粒子の数 $n(t)$ を考えます。当然、正方形が大きいほど $n(t)$ の時間平均 $\langle n \rangle$ とゆらぎ $\Delta n = \sqrt{\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle}$ は大きくなります。

Δn と $\langle n \rangle$ が $\Delta n \propto \langle n \rangle^\alpha$ を保って大きくなるとしましょう。平衡状態や完全に乱雑な系では、大数の法則から $\alpha = 1/2$ となります。ところが、2次元 Vicsek モデルの秩序相では $\alpha = 4/5$ となることがわかってい

^{*23} 巨視的な振る舞いの急激な変化のことで、統計力学の守備範囲です。例えば水が凍って氷になるのも相転移です。

^{*24} 温度はここではノイズに対応します。無限温度は $\eta = 2\pi$ のことですね。

ます [13]. このように、大数の法則が成り立つ系での通常のゆらぎよりも大きなゆらぎが見られるという現象を巨大な粒子数ゆらぎといいます.

秩序相では回転対称性が自発的に破れていることから、南部-Goldstone 定理より、速度ゆらぎとして南部-Goldstone モードが現れます. 巨大な粒子数ゆらぎは南部-Goldstone モードによって形成されているのです.

3.2.3 異常拡散

今度はもっと目を近づけて、“群れ”を構成する個々の粒子のうごきに目を向けてみましょう. 群れをつくっている粒子たちの向きの平均に対して垂直な方向に、各粒子の時間 t での移動距離 $r_{\perp}(t)$ を測ります. “群れ”から進行方向に一直列で並んでいた粒子を選んで色を付け、時間が経ってから観察すると色のついた幅は広がるだろうと予想がつきますね.

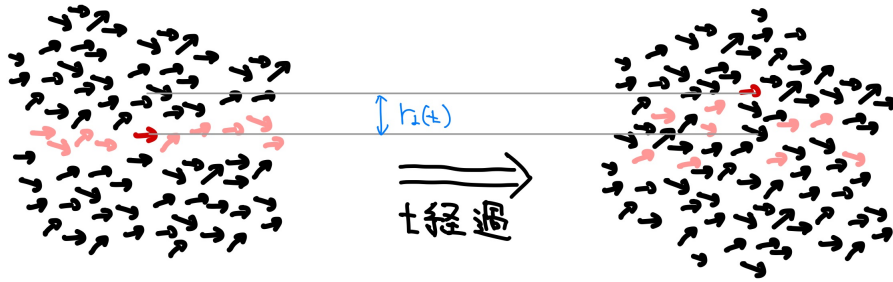


図 7: 一直列に並んでいた粒子は拡散していく

実際に、 $r_{\perp}(t)$ の平方を同じ群れの粒子すべてについて平均した、

$$\Delta r_{\perp}^2(t) := \langle [r_{\perp}(t)]^2 \rangle$$

は時間がたつにつれ大きくなり、 $\Delta r_{\perp}^2(t)$ の時間依存性を $\Delta r_{\perp}^2(t) \sim t^{\nu}$ とおけます. ここまではなにも特別なことは言っていません. 実は、Vicsek モデルでの拡散はブラウン運動などの通常拡散とは様子が異なります. 通常拡散の場合は $\nu = 1$ ですが、2 次元 Vicsek モデルでは $\nu = 4/3$ と大きい異常拡散となるのです [2]. この異常拡散も南部-Goldstone モードによって引き起こされています.

おわりに

この解説 PDF「アクティブマター物理学」ではできるだけ計算を省き、ざっとアクティブマター物理学の雰囲気さをさえるようにしました。というのは言い訳で、私の理解が甘いため数式を使った説明ができませんでした。アクティブマター班の解説 PDF「自由エネルギーから見るアクティブマターの流体モデル」では自由エネルギーの導入から、Toner-Tu モデルをきちんと導出しています。是非ご覧ください。私も読みます。

解説 PDF 作成には特に [8] を参考にしました。Toner-Tu モデル自体については [14] が、その独特の振る舞いについては [2] が詳しいと思います。[6] や [11] は第二種相転移と対称性について参考にしました。どちらも通読はできていない^{*25}ので夏休みに読みます。

参考文献

- [1] Abhijit V Banerjee. A simple model of herd behavior. *The quarterly journal of economics*, Vol. 107, No. 3, pp. 797–817, 1992.
- [2] Hugues Chaté, Francesco Ginelli, Guillaume Grégoire, and Franck Raynaud. Collective motion of self-propelled particles interacting without cohesion. *Physical Review E*, Vol. 77, No. 4, p. 046113, 2008.
- [3] Stephen Childress. *Mechanics of Swimming and Flying*. Cambridge Studies in Mathematical Biology. Cambridge University Press, 1981.
- [4] Sakuhei Fujiwhara. On the growth and decay of vortical systems. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, Vol. 49, No. 206, pp. 75–104, 1923.
- [5] 今井功. 物理モデルと数学モデル. 応用数理, Vol. 3, No. 4, p. 259, 1993.
- [6] ランダウ, リフシッツ. 統計物理学 第3版 上・下. 岩波書店, 1980. 小林秋男, 小川岩雄, 富永五郎, 浜田達二 共訳.
- [7] 前多裕介, 別府航早. 遊泳バクテリアで探るアクティブマターの秩序と制御. 生物物理, Vol. 60, No. 1, pp. 013–018, 2020.
- [8] 西口大貴, 佐野雅己. 自己駆動粒子の集団運動: 群れから始まる非平衡統計力学 (特集数理モデルと普遍性). 数理科学, Vol. 54, No. 1, pp. 39–44, 2016.
- [9] Craig W Reynolds. Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model. In *Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pp. 25–34, 1987.
- [10] 坂井澄子. 群れの構造のモデルとその行動. 生物物理, Vol. 13, No. 2, pp. 82–90, 1973.
- [11] 高橋和孝, 西森秀稔. 相転移・臨界現象とくりこみ群. 丸善出版, 2017.
- [12] John Toner and Yuhai Tu. Long-range order in a two-dimensional dynamical xy model: how birds fly together. *Physical review letters*, Vol. 75, No. 23, p. 4326, 1995.
- [13] John Toner and Yuhai Tu. Flocks, herds, and schools: A quantitative theory of flocking. *Physical review E*, Vol. 58, No. 4, p. 4828, 1998.

^{*25} 「本を積むと、持ち主が寝ているうちに特殊な周波数の電磁波を出して脳に内容が入ってくる」と聞きます。修行が足りないのか、私はまだ体験したことはありません。

- [14] John Toner, Yuhai Tu, and Sriram Ramaswamy. Hydrodynamics and phases of flocks. *Annals of Physics*, Vol. 318, No. 1, pp. 170–244, 2005. Special Issue.
- [15] 渡辺悠樹. 対称性の “破れ” (特集 対称性と物理学: 物理法則解明の”鍵” を捉える). 数理科学, Vol. 57, No. 3, pp. 48–53, 2019.
- [16] Haruki Watanabe and Hitoshi Murayama. Unified description of nambu-goldstone bosons without lorentz invariance. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 108, p. 251602, Jun 2012.
- [17] 渡辺悠樹, 村山斉. 南部・ゴールドストーンボソンの統一的理解 (交流). 日本物理学会誌, Vol. 68, No. 4, pp. 200–208, 2013.