

古典力学 (解析力学)

Physics Lab. 2021

数理物理学班

1 ニュートン力学とラグランジュ力学

1.1 ニュートン力学

ニュートン力学は、有名な $F = ma$ 、もう少し詳しく書くと

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$$

のように与えられます。 x の上の点は、時間 t に関する微分を表します。

力 \mathbf{F} は、物体が複数ある場合は他の物体との相互作用 (重力や摩擦力、垂直抗力など) から由来しますが、1 物体だけに着目し、その物体がポテンシャルの中に入っていると考える場合が多いです。

ポテンシャルは位置エネルギーとも呼ばれ、重力ポテンシャルや静電ポテンシャルなど、力を生み出す原因の総称です。もっとも簡単なポテンシャルは位置のみに依存する $U(\mathbf{x})$ の形で、力は

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{x})$$

と与えられます。この場合、 $F = ma$ の式を成分ごとに

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x^i} = m\ddot{x}_i$$

と書くことができます。

1.2 ラグランジュ力学: 作用と停留作用の原理

ニュートン力学では、各物体に働く力を求めて運動方程式を立てます。しかし、物体 1 つ 1 つではなく、相互作用する物体すべてがまとまった物理系の運動を求めることもできます。このようなニュートン力学の拡張を、解析力学と言います。

解析力学では、「物体の位置」ではなく、「系の状態を表す変数」の時間変化を求めます。以下のように一般化されます。

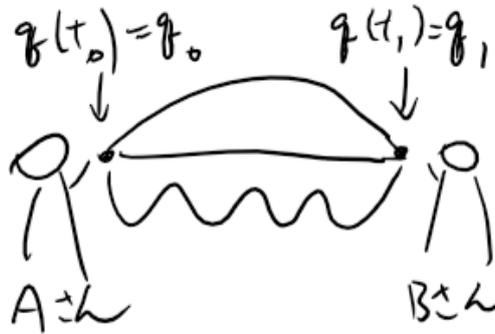
- 物体 → 物理系
- 位置 → 状態
- 位置座標 → 力学変数
- 速度 → 変化率
- 運動 → 変化 (motion, dynamics)
- 経路 → 変化履歴

(ところで、その対応性に着目して、「時間変化方程式」と呼ぶべきところを逆に「運動方程式」と呼んだり、「変化履歴」を「経路」と呼んだりもします。言葉には慣れておきましょう。)

解析力学は大きく分けて「ラグランジュ力学」と「ハミルトン力学」という 2 種類の記述 (formalism) があります。最初に紹介するラグランジュ力学は、「次の瞬間」を決めて経路を確定するのではなく、経路としてのいくつかの可能性の中で「最適解」となる経路を採択する、という方向で運動を定めます。

具体的な例を見ていきましょう。AさんがBさんにボールを投げるとします。回転はいったん無視すると、力学変数 q はボールの3つの位置座標 x と考えることができます。

一番先には、ラグランジュ力学を展開するために、最初・最終時間 $t_{(0)}, t_{(1)}$ 、最初・最終状態 (ここでは始・終点) $q_{(0)}, q_{(1)}$ を決めます。そして次に、決めた始点・終点条件に当てはまる経路、つまり時刻 $t_{(a)}$ で状態 $q_{(a)}$ ($a = 0, 1$) となる任意の経路を考えます。



少なくともこの段階では、経路は全く任意で良いです。放物線でなくても、直線でも、正弦型でも構わないです。また、「経路」は軌跡とは違い、各点をいつ通ったかでも区別されるので、放物線軌跡の中でも等速運動する経路を考えることもできます。

経路を想像するまでは、物理学とは言えません。そこでいよいよラグランジュ力学の番です。「停留作用の原理」によって、系が本当に取り得る経路を1つに絞り込みます。

作用 まず経路と言っていました、数学的には $q : t \in [t_{(0)}, t_{(1)}] \mapsto q(t)$ で、 $q(t_{(a)}) = q_{(a)}$ となるような関数 $q(t)$ を表現します。この経路 $q(t)$ に対して、次のような積分を考えます。

$$S[q] = \int_{t_{(0)}}^{t_{(1)}} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

この S は、**作用 (action)** という量です。¹ L という関数に関しては、すぐ後で説明します。作用の値自体は重要ではなく、肝心は**停留作用の原理**です。

停留作用の原理 停留作用の原理とは、

q が物理的な経路であれば、作用 $S[q]$ は停留値をとる。

つまり、物理的な経路は作用に対して停留点 (停留経路) である。

という解析力学の基本原則です。² 経路 q が作用の停留点ということは「 q を少しずらしたときに、作用の変化率がゼロ」ということを意味します。代表的に極大・極小点は停留点ですが、極点でない鞍点も停留点です。³

ラグランジアン q に対する任意の汎関数形式が作用になるとは限りません。上述しましたが、作用は

$$S[q] = \int_{t_{(0)}}^{t_{(1)}} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

のように、力学変数 y (後ほど q が入る) とその一階微分 v (後ほど \dot{q} が入る) に依存する関数 $L(y, v, t)$ の積分の形で与えられる必要があります。このとき、被積分関数 L を**ラグランジアン (Lagrangian)** と呼びます。

¹ 「力の作用」、「作用・反作用」の作用とは別物です。区別のために、 S を **作用汎関数 (action functional)** と呼ぶこともあります。汎関数とは関数 q をもらって数を返す、という意味です。

² 基本原理という点ではニュートン力学における運動の3法則の位置づけです。

³ 停留作用の原理は、しばしば「最小作用の原理」とも呼ばれますが、この名称はあくまでも慣例によるものです。

ラグランジュ力学が物理的な経路に要請することは停留点になることまでで、そうやって定まった停留点が最小点や極小点にならない場合があります。例えば、調和振動子の経路は鞍点になります。(詳細は益川『解析力学』§1.6を参照)

他には、停留作用の原理を提案者にちなんで「ハミルトンの原理」と呼ぶこともあります。

ラグランジアンは、その物理系の特性全般を記述する最も重要な関数です。典型的な力学系では、ラグランジアンは系の運動エネルギー K とポテンシャル U の差、

$$L(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t) = K(\mathbf{v}) - U(\mathbf{y}, t)$$

と与えられます。一般的に、物理的にラグランジアンと呼ばれるものはエネルギーの次元を持ち、作用は「エネルギー × 時間」= 「長さ × 運動量」= 「角運動量」と同じ単位を持ちます。

1.3 変分法と Euler-Lagrange 方程式

経路 $\mathbf{q}(t)$ が停留経路であることを定式化してみましょう。始点と終点を共有する別の経路 $\mathbf{q}'(t)$ と、その経路との差分 $\delta\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}'(t) - \mathbf{q}(t)$ を考えます。 $\mathbf{q}'(t)$ が $\mathbf{q}(t)$ に「近い」、つまり $\max_{t \in [t_{(0)}, t_{(1)}]} (|\delta\mathbf{q}(t)|)$ が小さいとします。

始点と終点が等しいという条件から $\mathbf{q}'(t_a) = \mathbf{q}_a$, また $\delta\mathbf{q}(t_a) = 0$ でなければなりません。 ($a = 0, 1$)

停留作用の原理は、 $\mathbf{q}(t)$ に近い $\mathbf{q}'(t)$ に対して

$$\delta S = S[\mathbf{q}'] - S[\mathbf{q}] = \int_{t_{(0)}}^{t_{(1)}} (L(\mathbf{q}'(t), \dot{\mathbf{q}}'(t), t) - L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)) dt$$

がゼロになると言っています。これが具体的にどのような条件となるかを確かめてみましょう。 $\mathbf{q}'(t)$ が $\mathbf{q}(t)$ に近いので、1次近似すると

$$L(\mathbf{q}'(t), \dot{\mathbf{q}}'(t), t) - L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = \left. \frac{\partial L(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t)}{\partial y^i} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t), \mathbf{v}=\dot{\mathbf{q}}(t)} \delta q^i(t) + \left. \frac{\partial L(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t)}{\partial v^i} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t), \mathbf{v}=\dot{\mathbf{q}}(t)} \delta \dot{q}^i(t) \quad (1)$$

ここで

$$\delta \dot{q}^i(t) = \frac{d}{dt}(\delta q^i(t)) = \frac{d}{dt}(\mathbf{q}'(t) - \mathbf{q}(t)) = \dot{\mathbf{q}}'(t) - \dot{\mathbf{q}}(t)$$

を用いました。また、部分積分の感覚で、式(1)の右辺は

$$\left. \frac{\partial L(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t)}{\partial y^i} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t), \mathbf{v}=\dot{\mathbf{q}}(t)} \delta q^i(t) - \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{\partial L(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t)}{\partial v^i} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t), \mathbf{v}=\dot{\mathbf{q}}(t)} \right) \delta q^i(t) + \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{\partial L(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t)}{\partial v^i} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t), \mathbf{v}=\dot{\mathbf{q}}(t)} \delta q^i(t) \right)$$

になります。これを積分すると

$$\delta S = \int_{t_{(0)}}^{t_{(1)}} \left(\left. \frac{\partial L(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t)}{\partial y^i} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t), \mathbf{v}=\dot{\mathbf{q}}(t)} - \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{\partial L(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t)}{\partial v^i} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t), \mathbf{v}=\dot{\mathbf{q}}(t)} \right) \right) \delta q^i(t) dt + \left[\left. \frac{\partial L(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t)}{\partial v^i} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t), \mathbf{v}=\dot{\mathbf{q}}(t)} \delta q^i(t) \right]_{t_{(0)}}^{t_{(1)}}$$

で、これがゼロであることが要請されます。

最後の境界項は、 $\delta\mathbf{q}(t_{(0)}) = \delta\mathbf{q}(t_{(1)}) = 0$ という条件で消えます。ここで、

$$\Delta_i(t) = \left. \frac{\partial L(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t)}{\partial y^i} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t), \mathbf{v}=\dot{\mathbf{q}}(t)} - \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{\partial L(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t)}{\partial v^i} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t), \mathbf{v}=\dot{\mathbf{q}}(t)} \right)$$

とすると何をしているかがはっきり見えます。

$$0 = \int_{t_{(0)}}^{t_{(1)}} \Delta_i(t) \delta q^i(t) dt$$

が要求条件です。この $\Delta_i(t)$ は δq^i に依存しないものですが、 $\delta q^i(t)$ は自由に取れる関数なので、積分値が $\delta q^i(t)$ の選択によらないためには、 $\Delta_i(t)$ が全ての $t \in [t_{(0)}, t_{(1)}]$ でゼロでなければなりません。

従って、運動を決定する条件は方程式 $\Delta_i(t) = 0$, つまり

$$\frac{\partial L(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t)}{\partial y^i} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t), \mathbf{v}=\dot{\mathbf{q}}(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t)}{\partial v^i} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t), \mathbf{v}=\dot{\mathbf{q}}(t)} \right) = 0 \quad (2)$$

となる。この方程式を **Euler-Lagrange 方程式 (EL 方程式)** と呼びます。

変数表記の簡略化 力学変数とその微分を表す変数は慣例的に、 \mathbf{y}, \mathbf{v} という新しい変数名を付けるより、 $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ だけで表すことが多いです。例えば、EL 方程式もしばしば

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0$$

と書かれます。

一見、微分した結果である \dot{q}^i に関して微分するということが訳が分かりませんが、中身は式(2)であることを忘れないようにしましょう。

このような表記をするとき、どの段階で \mathbf{q} と $\dot{\mathbf{q}}, t$ が独立変数と扱われ、どの段階で $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ に関数 $q(t)$ とその微分が代入されるかを見極める必要があります。大まかなルールは以下の通りです。

- q^i, \dot{q}^i による偏微分をするときには独立変数として扱う
- 時間の全微分 d/dt を行う前には関数が代入される
- 最後の式は必ず関数が代入されていて、 t (と $q(t)$) のみに依存する形になる

1.4 運動方程式としての EL 方程式

ラグランジュ力学では、ほぼ任意の始点と終点に対して停留作用経路が求まります。ここで終点を勝手に取っても、例えば「東京からボールを投げて沖縄まで送る」ようなことを考えてもいい、ということで違和感を感じるかもしれません。

空気抵抗などを無視すれば、確かにラグランジュ力学はその場合も可能と言っています。しかし、実は停留作用の原理によって「その終点にたどり着くために、始点で持つべき速度」まで決まってしまうので、逆に始点でその速度を与えない限り東京から投げたボールが沖縄に着くことはありません。人の腕力では無理ということは簡単に想像できるでしょう。

結局、運動経路が作用を停留値にするという原理は **事後の記述** になっていて、初期条件だけを持って運動を記述するためには EL 方程式を運動方程式にして次の瞬間を決定しなければなりません。

このように、経路は以下のいずれかの条件で決まります。EL 方程式はどちらでも適用されるが、それぞれに対して EL 方程式の意味合いが少し変わります。

- 最初時間 $t_{(0)}$ の状態 $\mathbf{q}_{(0)}$, 最終時間 $t_{(1)}$ の状態 $\mathbf{q}_{(1)}$ が与えられる: EL 方程式は、その最初・最終状態に対する停留経路を決定します。
- 最初時間 $t_{(0)}$ の状態 $\mathbf{q}_{(0)}$ および変化率 $\dot{\mathbf{q}}_{(0)}$ が与えられる: EL 方程式は、力学変数の変化を示す運動方程式として使われます。

1.5 ラグランジアンと作用の不定性

ある物理系に対して、ラグランジアンや作用 (の停留値) は一意的に定まりません。実際、ラグランジアンを

$$L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \rightarrow L'(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) + \frac{d}{dt} Y(\mathbf{q}(t), t)$$

のように置き換えれば、作用は

$$S[\mathbf{q}] \rightarrow S'[\mathbf{q}] = S[\mathbf{q}] + Y(\mathbf{q}(t), t) \Big|_{t_{(0)}}^{t_{(1)}} = S[\mathbf{q}] + (Y(\mathbf{q}_{(1)}, t_{(1)}) - Y(\mathbf{q}_{(0)}, t_{(0)}))$$

のように、 \mathbf{q} の選択に依らない項が加わるので、停留経路は変わりません。(作用の値自体は重要ではないと言ったのは、まさにこういう理由です、)

その帰結として、EL 方程式も変わりません。直接確認してみましょう。

$$\frac{d}{dt}Y(\mathbf{q}(t), t) = \left. \frac{\partial Y(\mathbf{y}, t)}{\partial y^i} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t)} \dot{q}^i(t) + \left. \frac{\partial Y(\mathbf{y}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t)}$$

なので、ラグランジアンへの追加項は

$$M(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t) = L'(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t) - L(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t) = \frac{\partial Y(\mathbf{y}, t)}{\partial y^i} v^i + \frac{\partial Y(\mathbf{y}, t)}{\partial t}$$

という関数になります。EL 方程式への追加項は

$$\frac{\partial M}{\partial q^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial^2 Y}{\partial y^j \partial y^i} v^i + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^j \partial t} \bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t), \mathbf{v}=\dot{\mathbf{q}}(t)} - \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{\partial Y}{\partial y^j} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t)} \right) = 0$$

のように消えるので、EL 方程式が変わらないことが示されました。

2 色々な系

2.1 1 粒子系: ニュートン力学への帰結

系がポテンシャル $U(\mathbf{x})$ の影響下の 1 つの粒子となっているとき、その系のラグランジアンは

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = K - U = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - U(\mathbf{x})$$

として与えられます。各座標に関する EL 方程式は

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = -\frac{\partial U}{\partial x^i} - \frac{d(m\dot{x}_i)}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x^i} - m\ddot{x}_i$$

つまりニュートンの運動第 2 法則になりました。このように、ニュートン力学はラグランジュ力学に含まれます。

わざわざ「粒子」と言ったのは、ボールを投げる場合はボールの回転角なども力学変数に入るからです。詳しくは触れませんが、回転自由度がある系 (剛体など) では、その角度変数がみだす EL 方程式が、ちょうど回転運動に関するニュートンの第 2 法則になります。

2.2 電磁場中の 1 粒子

電磁場は電磁ポテンシャル (ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 、スカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{x})$) で表されます。

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

この中で電荷 q を持つ粒子があるとしします。非相対論的な範囲で、系のラグランジアンは次のように与えられます。

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - q\phi(\mathbf{x}) + q\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

2 個目の項は先ほどのポテンシャル $U = q\phi(\mathbf{x})$ の場合に対応しますが、3 個目の項はいわば「速度に依存するポテンシャル」になっています。

さて、EL 方程式は

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = -q \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + q\dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} (m\dot{x}_i + qA_i(\mathbf{x}, t))$$

ここで言う \mathbf{x} は粒子の位置 $\mathbf{x}(t)$ で、時間に依存することに注意して全微分すると

$$0 = -m\ddot{x}_i - q \frac{\partial \phi}{\partial x^i} - q\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla A_i + q\dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^i} - q \frac{\partial A_i}{\partial t}$$

ここで、

$$-\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = E_i, \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^i} - \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla A_i = \dot{x}^j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \right) = \varepsilon_{ijk} \dot{x}^j B^k = (\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})_i$$

です。まとめると、

$$m\ddot{\mathbf{x}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})$$

というローレンツ力の式が得られます。

ゲージ変換とラグランジアンの変動性 ある電磁場を表す電磁ポテンシャルは一意的ではありません。実際、ゲージ変換と呼ばれる次の置き換え

$$\phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \phi'(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(\mathbf{x}, t) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \nabla \Lambda(\mathbf{x}, t)$$

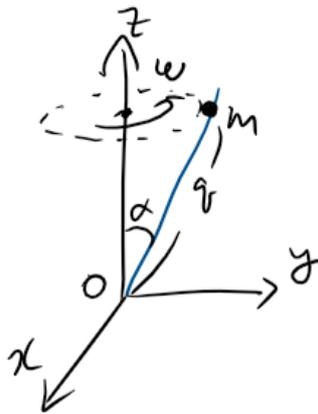
を行っても電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{B} は変わりません。

そのゲージ変換によって、ラグランジアンは

$$L \rightarrow L' = L + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla \Lambda = L + \frac{d\Lambda}{dt}$$

のように変わりますが、先ほど見たように全微分の追加項は作用および EL 方程式に影響を及ぼさない項であり、ゲージ変換が系の運動に関与しないことが分かります。

2.3 回転するワイヤー上の物体



図のように、玉に斜めに針金(ワイヤー)を通し、一定の角速度で回すおもちゃを考えます。摩擦は無視します。水平方向の角度は ωt と決まっているので、唯一の力学変数は原点から玉との距離 q です。ラグランジアンは

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{m}{2} (q^2 \omega^2 \sin^2 \alpha + \dot{q}^2) - mgq \cos \alpha$$

EL 方程式は

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m q \omega^2 \sin^2 \alpha - m g \cos \alpha + m \ddot{q}$$

つまり

$$\ddot{q} = g \cos \alpha - q \omega^2 \sin^2 \alpha$$

が得られます。

このように、力学変数が必ずしも x, y, z といった座標変数にする必要はありません。もっと言いますと、力学変数が必ずしも長さである必要もなく、角度や場の強さ(後述)などのものも力学変数になり得ます。⁴

⁴座標ではなくても座標と同様な扱いができるという意味で、力学変数とその微分 q, \dot{q} は「一般化座標」「一般化速度」と呼ばれることもあります。

3 対称性と保存量

3.1 対称性と連続的対称性

「対称性」というと普段「点対称」「鏡像対称」のような、離散的な対称性を浮かべることが多いですが、ここで言う対称とは一般的に**連続的な対称性**を意味します。

連続的な対称性を議論する前に、対称性をまず定義しておきます。例えば、

- 正方形は、 90° 回しても形が変わりません。一方で、 45° 回すと形が変わります。
- 円は、 90° 回しても、 45° 回しても、 1° や 0.00001° 回しても、任意の角度で回しても形が変わりません。

このように、何か「特定の操作に対して変わらないもの」があれば、それがその操作に対して対称性がある、と言います。例えば上の例では、

- 正方形 (の形) は、「 90° 回転変換」に対して対称性を持つ
- 円 (の形) は、「任意の角度の回転変換」に対して対称性を持つ

と言えます。正方形の対称性は、その対称性を生み出す操作 (90° 回転) をより細かく分解できませんが、円の対称性は好きだけ細かく分解でき、角度という連続的なパラメーターで表現できますので、連続的対称性と言えます。

また、通常の対称のイメージからは少し離れますが、以下も連続的対称性の一つです。

- x 方向に無限に長い棒 (の形) は、 x 方向の平行移動に対して対称性を持つ
- 定規の目盛りの長さは、任意方向の平行移動や回転に対して対称性を持つ

物理学では、対称性というと主にラグランジアンの対称性を指します。

3.2 ネーターの定理: 対称性に対して保存量が存在する

系に対称性があるということは、力学変数 $q(t)$ をパラメーター s に対して $Q(t, s)$ に変えたとき (ただし $Q(t, 0) = q(t)$)、ラグランジアンが (時間全微分を除き) 変化を受けない、ということの意味します。

物理学で最も重要な対称性は、以下のようにパラメーターで表されます。

- 時間並進: $Q(t, s) = q(t + s) = (\exp(s \frac{\partial}{\partial t}) q)(t)$. 系の初期位置と初期速度を同じく、初期時間だけずらして運動させたとき、同じ運動になる。
- 空間並進: $Q(t, s) = q(t) + se$. 系の初期位置と初期速度を同じく、位置の基準点だけずらして運動させたとき、同じ運動になる。
- 回転: $Q(t, s) = \exp(sJ)q(t)$. ここで、 $\exp(sJ)$ は回転行列。系の初期位置と初期速度を同じく、その方向だけ別方向にして運動させたとき、同じ運動になる。

このような変換に対してラグランジアンが (時間全微分を除き) 変わらないということは、小さい s に対して

$$L(Q(t, s), \dot{Q}(t, s), t) - L(Q(t, 0), \dot{Q}(t, 0), t) = \frac{\partial \mathcal{Y}(t, s)}{\partial t}$$

のように表せることを意味します。 $\mathcal{Y}(t, 0) = 0$ なので、小さい s に関しては $\mathcal{Y}(t, s) \simeq sY(t)$ のはず。言い換えると

$$\left. \frac{\partial L(Q(t, s), \dot{Q}(t, s), t)}{\partial s} \right|_{s=0} = \frac{dY}{dt}$$

のような $Y(t)$ があることが、対称性の意味になります。(ここでは例外的に \dot{Q} の点が全微分を意味しません。 $\dot{Q}(t, s) = \partial Q(t, s) / \partial t$)

愚直に左辺を計算します。簡単のために、

$$G(t) = \left. \frac{\partial Q(t, s)}{\partial s} \right|_{s=0}$$

としておきます。⁵

連鎖法則により

$$\left. \frac{\partial L(\mathbf{Q}(t, s), \dot{\mathbf{Q}}(t, s), t)}{\partial s} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial L(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t)}{\partial y^i} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t), \mathbf{v}=\dot{\mathbf{q}}(t)} G^i(t) + \left. \frac{\partial L(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t)}{\partial v^i} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t), \mathbf{v}=\dot{\mathbf{q}}(t)} \frac{dG^i}{dt}$$

右辺は EL 方程式を適用すると

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} G^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{dG^i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i} G^i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) G^i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} G^i \right)$$

となります。対称性条件と比べると、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} G^i - Y \right) = 0$$

従って、次の量は保存量 (時間進行に対して不変な量)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} G^i - Y$$

となります。このように、対称性に対して必ず保存量が存在するという定理がネーターの定理であり、ある対称性に対応する保存量をネーター保存量と言います。

3.3 代表的な保存量: エネルギー (ハミルトニアン)、運動量、角運動量

3.3.1 時間並進 - ハミルトニアン

まず、時間並進 $\mathbf{Q}(t, s) = \mathbf{q}(t + s)$ について調べます。この変換に対して対称性を持つためには、

$$\left. \frac{\partial L(\mathbf{Q}(t, s), \dot{\mathbf{Q}}(t, s), t)}{\partial s} \right|_{s=0} = \frac{dL(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)}{dt} - \left. \frac{\partial L(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}(t), \mathbf{v}=\dot{\mathbf{q}}(t)}$$

(簡単に、右辺は $dL/dt - \partial L/\partial t$ と書きます) が時間全微分でなければなりません。

つまり、 L 自身が時間にあらわに依存しなければラグランジアンは時間並進に対して対称性を持ち、そのとき $Y = L$ の全微分が追加されます。また時間並進の生成子は $\dot{\mathbf{q}}(t)$ なので、次の式

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L$$

がネーター保存量となります。この H はハミルトニアン (Hamiltonian) と言う、もう 1 つの解析力学であるハミルトン力学の主要概念となっています。ラグランジアンが時間にあらわに依存する場合には一般的にハミルトニアンは保存されませんが、その場合もハミルトニアンは上式のように定義します。

ハミルトニアンはラフに「全エネルギー」として解釈され、ハミルトニアンの保存はエネルギー保存を意味すると理解するとだいたい間違いではありません。⁶ しかし、厳密にはハミルトニアンと全エネルギーは区別されます。

ラグランジアンが

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 - U(\mathbf{q}, t)$$

のように、運動エネルギーが速度だけの 2 次式で、ポテンシャルが速度に依存しない場合、ハミルトニアンは

$$H = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 + U(\mathbf{q}, t) = E$$

と、全エネルギーに一致しますが、しかし、回転するワイヤー上の物体問題のように、運動エネルギーが位置に依存するなどの場合ではこの等式が成り立たなくなります。

⁵ G をこの変換の生成子 (generator) と呼びます。正確には $\mathbf{Q}(t, s)$ 自体の微分ではなく、 $\mathbf{q}(t)$ を $\mathbf{Q}(t, s)$ にするために施す「操作」の微分を生成子と呼びますが、ここでは区別せず使います。

⁶ ある意味で、ハミルトニアンが「全エネルギー」の代替概念とも言えます。

3.3.2 空間並進 - 正準運動量

例えば、2 粒子系で、それぞれの位置が $\mathbf{x} = (x, y, z)$ および $\mathbf{x}' = (x', y', z')$ だとします。力学変数を

$$\mathbf{q} = (x, y, z, x', y', z')$$

と表すと、系全体を y 方向に s だけずらすことは力学変数に

$$(x, y + s, z, x', y' + s, z') = \mathbf{q} + s(0, 1, 0, 0, 1, 0)$$

というように表され、片方の粒子だけを y 方向にずらすことは

$$(x, y + s, z, x', y', z') = \mathbf{q} + s(0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

のように表されます。もし系のポテンシャルが粒子間の距離のみに依存するとすれば

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{m'}{2} \dot{\mathbf{x}}'^2 - U(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$$

のようになり、前者の空間並進に対しては対称性を持ちますが、後者に対しては対称性はありません。

上記の例を踏まえて、空間並進を $\mathbf{Q}(t, s) = \mathbf{q}(t) + s\mathbf{e}$ と書くとしましょう。 \mathbf{e} 方向の空間並進に対してラグランジアンが対称性を持つならば、 $G^i = e^i$ です。⁷ ネーター保存量は $\frac{\partial L}{\partial q^i} e^i$ となります。ここで

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

を、力学変数 q^i に対応する**正準運動量 (canonical momentum)**、または q^i の**共役正準運動量**と呼びます。

今回も、正準運動量が保存されない場合でも正準運動量 $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$ と定義できます。この正準運動量は、ラグランジュ力学で「位置と位置の時間微分の組」が基本であったように、ハミルトン力学では「位置と正準運動量の組」が基本とされるほど重要な役割を果たします。特に、

- q^i がある粒子の x (同じく y, z) 座標のとき、その座標に対応する正準運動量 p_i をその粒子の x (同じく y, z) 方向の正準運動量と呼び、
- n 粒子系でそれらの x 軸座標が $q^{i_1}, q^{i_2}, \dots, q^{i_n}$ となっているとき、対応する正準運動量の和 $p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_n}$ をその系の x 方向の正準運動量と呼びます。⁸

先ほどのネーター保存量は、正準運動量を用いて $p_i G^i - Y$ と表せます。特に、ハミルトニアンは

$$H = p_i \dot{q}^i - L$$

のような式になります。

正準運動量と力学的運動量 1 粒子系のラグランジアン

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - U(\mathbf{q}, t)$$

のとき、 x^i の並進に関する正準運動量は丁度 $p_i = m\dot{x}_i$ となります。お馴染みの「運動量」の起源ですね。2 粒子系に関してもそれぞれの粒子の正準運動量を求めると同じ運動量を得ます。

しかし、正準運動量は $m\dot{\mathbf{x}}$ と一致しない場合が多いです。電磁場中の粒子の例を思い出してみましょう。

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - q\phi(\mathbf{x}, t) + q\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$$

⁷空間並進対称性を議論するときは、ラグランジアンが厳密に変わらない ($Y = 0$) を前提する場合があります。

⁸後者は、 e^i が $i = i_1, \dots, i_n$ の場合は 1 で、他には 0 の場合に対応しています。

ここで正準運動量は $\mathbf{p}(t) = m\dot{\mathbf{x}}(t) + q\mathbf{A}(\mathbf{x}(t), t)$ という量になり、お馴染みの運動量と違う量なのはもちろん、ゲージ不変でもありません。区別のために、 $\mathbf{P} = m\dot{\mathbf{x}}$ の方の運動量を **力学的運動量** (mechanical/kinetic momentum) と呼ぶ場合もあります。

なお、電磁場中の粒子のハミルトニアンは

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + q\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2m} \underbrace{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{x}, t))^2}_{\mathbf{P}} + q\phi(\mathbf{x}, t)$$

のように定まります。

3.3.3 回転 - 正準角運動量

1つの粒子の力学変数を位置 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ とおき、それを z 軸周りで角度 s だけ回したとします。回転後の座標は

$$\begin{pmatrix} x \cos s - y \sin s \\ x \sin s + y \cos s \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

です。一般的に、回転は

$$Q^i(t, s) = T^i_j(s) q^j(t)$$

というふうに線形変換で表せます。今回の z 軸回りの回転では、

$$\mathbf{T}(s) = \begin{pmatrix} T^1_1(s) & T^1_2(s) & T^1_3(s) \\ T^2_1(s) & T^2_2(s) & T^2_3(s) \\ T^3_1(s) & T^3_2(s) & T^3_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

です。生成子はこれを s で微分したもの、つまり

$$G^i(t) = \left. \frac{\partial Q^i(t, s)}{\partial s} \right|_{s=0} = J^i_j q^j(t)$$

とします。ネーター保存量 (系がこの回転に対して対称性があればそうなる量) は $p_i J^i_j q^j$ になります。今回の場合は

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \end{pmatrix}}_J \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xp_y - yp_x$$

ですね。これを z 軸周りに関する **正準角運動量** と言います。同様に、 x, y 軸周りに関する正準角運動量も定義でき、任意の回転変換に対応する **正準角運動量** は

$$l^{ij} = q^i p^j - q^j p^i$$

と定義されます。このように、正準角運動量は位置と正準運動量の積で表される 2 階反対称テンソル ($l^{ji} = -l^{ij}$) です。3次元の場合は、この角運動量を $l_x = l_{12}$, $l_y = l_{23}$, $l_z = l_{31}$ のように角運動量ベクトルにして、外積 $\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ 扱う場合が多いですが、4次元時空などでは 2 階テンソルとして表します。

複数の粒子からなる系では全体角運動量は各粒子の角運動量の和で定義され、もし任意方向の回転変換に関して系が対称性があるならば、各粒子の正準角運動量が保存されます。

角度座標の共役正準運動量としての正準角運動量 系を表す座標は (x, y, z) だけではありません。球面座標系 (r, θ, φ) や円筒座標系 (ρ, φ, z) など、長さではなく角度で表す座標もあるわけです。

特に φ のように周期を持つ角度座標を考えると、その座標の平行移動はつまり系の回転に相当します。よって角度座標の共役正準運動量を求めると、それが正準角運動量になります。

3.3.4 ガリレイ変換 - 「重心の等速度運動」

最後に見ておくべき対称性はガリレイ対称性です。ガリレイ対称性は、ある V に対するガリレイ変換

$$Q(t, s) = q(t) - tsV$$

に対して、運動が変わらないことを意味します。

例として、また 2 粒子系を考えます。ラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{m'}{2} \dot{\mathbf{x}}'^2 - U(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$$

で、ガリレイ変換としては $V = (v, v) = (v_x, v_y, v_z, v_x, v_y, v_z)$ とします。このとき、 $G = tV$ で、ラグランジアンは

$$-(m\dot{\mathbf{x}} + m'\dot{\mathbf{x}}') \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \underbrace{-(m\mathbf{x} + m'\mathbf{x}') \cdot \mathbf{v}}_Y$$

なので、ネーター保存量は各粒子の運動量

$$((m\mathbf{x} + m'\mathbf{x}') - (\mathbf{p} + \mathbf{p}')t) \cdot \mathbf{v}$$

になります。 v が任意ならば、一般的に

$$(m\mathbf{x} + m'\mathbf{x}') - (\mathbf{p} + \mathbf{p}')t$$

が保存量であると言えます。これはつまり、全体質量 $M = m + m'$ である系の重心 $(m\mathbf{x} + m'\mathbf{x}')/M$ の速度が $(\mathbf{p} + \mathbf{p}')/M$ と保存されることを意味します。

ここで、この系では既に空間並進対称性が成り立っているため、全運動量

$$\mathbf{p} + \mathbf{p}' = m\mathbf{v} + m'\mathbf{v}'$$

が保存されることを使いました。

よく考えると、ガリレイ対称性に対応する保存量は新たな情報はくれていません。しかし相対論では、並進対称性だけでは重心の速度が全運動量に比例することは導けません。実は、ガリレイ変換の相対論版が回転変換 (ローレンツ変換) だったように、今回求めたガリレイ変換のネーター保存量の相対論版は、4 元の正準角運動量の成分 (M_{01}, M_{02}, M_{03}) です。その保存性は時空の回転対称性 (ローレンツ対称性) を必要とします。

3.4 その他の保存量

最もベーシックな保存量は以上になりますが、それ以外にも対称性があればネーター保存量を考えることができます。

例えば、重力ポテンシャル $U(z) = mgz$ に置かれている物体、つまりラグランジアン

$$L(z, \dot{z}, t) = \frac{m}{2} \dot{z}^2 - mgz$$

を考えます。

空間並進 $Z(t, s) = Z(t) + s$ (すなわち $G = 1$) に対して、今回はラグランジアンは不変ではないため運動量保存は得られません。しかし、ラグランジアンは $Y = -mgt$ の時間微分だけ変化しますので、ネーター保存量

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} + mgt = m(\dot{z} + gt)$$

が存在します。この保存量は、 $\dot{z}(t)$ が常に $\dot{z}(t) = \dot{z}(0) - gt$ をみたすことを意味します。

あまり日常的な「保存量」には見えないかもしれませんが、保存量の定義には合致しています。

4 ハミルトン力学

4.1 ラグランジュ力学とハミルトン力学

ラグランジュ力学は、中心となるラグランジアン $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ を含め、すべての物理量を $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ の関数として記述します。それに対し、本節で紹介するハミルトン力学は、「対称性と保存量」パートで見てきた正準運動量 \mathbf{p} を用いて、すべての物理量を $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ の関数として記述し、またラグランジアン代わりにハミルトニアン $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ を中心として記述する力学です。

結論から言いますが、ラグランジュ力学では EL 方程式が運動方程式だったように、ハミルトン力学では運動方程式が

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

のように与えられます。つまり、ハミルトニアンは位置や運動量で偏微分するとその反対側の時間変化が出てきます。(シンプレクティック構造)

ハミルトン力学からニュートン力学への帰結 ハミルトン力学は、時間発展を与える記述という点でニュートン力学と似ています。

実際、ニュートン力学では運動方程式が 2 階微分方程式 $F = m\ddot{x}$ ですが、これを

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ F(x, t)/m \end{pmatrix}$$

という連立 1 階微分方程式に置き換えることができます。そして運動量 $p = mv$ と、ハミルトニアン = 全エネルギー $H = \frac{1}{2m}p^2 + U(x)$ を代入すると、ちょうどハミルトン力学の運動方程式になっているわけです。

4.2 ラグランジュ力学からのハミルトン力学の導出

ハミルトニアンの形はラグランジュ力学から導出されます。

この 2 種類の座標は、**ラプラス変換**と呼ばれる手法で相互変換できる。ラグランジュ力学では、正準運動量 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ と表現されていましたが、その「逆関数」を取って $\dot{\mathbf{q}}$ を $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ という関数として扱います。

この $\dot{\mathbf{q}}$ に対して、ハミルトニアンを

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum p_i \dot{q}^i - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t)$$

のように定義します。ラグランジュ力学とそっくりですが、 $\dot{\mathbf{q}}$ が予め $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ の関数として表されている必要があります。

ハミルトンの運動方程式は、EL 方程式を用いて導出されます。

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial q^i} &= \frac{\partial}{\partial q^i} (p_j \dot{q}^j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t)) \\ &= p_j \frac{\partial \dot{q}^j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial q^i} + \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial \dot{q}^j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial q^i} \right) \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = -\dot{p}_i \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial p_i} &= \frac{\partial}{\partial p_i} (p_j \dot{q}^j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t)) \\ &= \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \dot{q}^j + p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} = \dot{q}^i \end{aligned}$$

簡単な計算によって、ハミルトニアンを全微分すると以下の関係が成り立つことが分かります。

$$\frac{d}{dt} H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = \frac{\partial}{\partial t} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t)$$

4.3 ポアソン括弧

位置と運動量の時間変化を考えてきましたが、ハミルトン力学では状態を表すすべての物理量が $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ で表されますので、その物理量 f の時間変化も考えられます。

$$\dot{f}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = \frac{\partial f}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$$

ここでハミルトンの運動方程式を適用すると

$$\dot{f}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

が得られます。ここで、**ポアソン括弧 (Poisson bracket)** を次のように定義します。 f, g が $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t)$ の関数であるとき

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}$$

ここでは g に H を代入する。 f の運動方程式は

$$\dot{f} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

のように簡潔に書けます。

量子論とのつながり この運動方程式は、量子力学の「**エーレンフェスト定理**」

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{f} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{f}, \hat{H}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \right\rangle$$

と非常に似ています。

ここで $[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$ は交換子と呼ばれる演算子間の 2 項演算ですが、ポアソン括弧の交代性

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

と密接な関係があります。

実際、量子論は古典論とまるで別世界にあるわけではありません。古典力学の数理的記述に対して、量子力学的構造を与えることができます。このプロセスを**量子化 (quantization)**と言います。

量子化の代表例は、ハミルトン力学に基づく**正準量子化 (canonical quantization)**です。

- 時刻 t に対して、古典的な系の状態は (\mathbf{q}, \mathbf{p}) という 1 点ですが、量子的な系の状態は無数の (\mathbf{q}, \mathbf{p}) が重ね合わさっています。この重ね合わせ状態が量子状態、よく波動関数と呼ばれるものです。⁹ 量子状態はさらに、ヒルベルト空間というベクトル空間の要素として表されます。
- 古典的な系の物理量は $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ という関数 f でしたが、量子的な系では様々な f 値を持つ無数の状態が重ね合わさっていますので、物理量はヒルベルト空間上に作用する線形演算子 \hat{f} として定義され、ある状態に対して \hat{f} の表す物理量の期待値を $\langle \hat{f} \rangle$ として表します。

つまり正準量子化は $f \mapsto \hat{f}$ の対応関係を定める作業と言えます。ここでは、以下の要請をします。¹⁰

- 線形性。 $\widehat{af + bg} = a\hat{f} + b\hat{g}$
- ポアソン括弧は交換子に移る。つまり

$$\widehat{\{f, g\}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{g}]$$

- 特に、基本ポアソン括弧 $\{q^i, p_j\} = \delta_j^i$ は、正準交換関係 $[q^i, p_j] = i\hbar\delta_j^i$ に移る。

⁹ 厳密には「波動関数」と「量子状態」は別物ですが、ここでは区別しません。

¹⁰ しかしながら、これらの要請を矛盾なくすべて反映することはできません。(Groenewold の定理)。その原因は、数と違って演算子が持つ非可換性です。このため、列挙した要請を少し弱めるしかなく、正準量子化の中でも弱め方によって様々な量子化方法があり得ます。代表的な方法は Weyl(deformation) quantization, Geometric quantization, BRST quantization などがあります。

- r が多項式のとき、 $\widehat{r(f)} = r(\hat{f})$

このように、ハミルトン力学は量子力学と直接的な関係があります。

本場の量子化の発表では、正準量子化、およびその派生である光円錐量子化を主に扱いますが、量子化の方法に関しても様々な理論があり、ラグランジュ力学を基本とするファインマンの経路積分や、ループ量子重力に使われるループ量子化などがあります。

5 相対論的ラグランジアン

ラグランジュ力学に戻ります。今までは非相対論的で、任意に与えられた「力学的な」ラグランジアンに対する系を見てきましたが、実はこのラグランジュ力学は古典的物理基礎の全般のパラダイムとして採択され、電磁気学を含め基本相互作用の説明にまで使われます。¹¹ それを確認するために、第1歩として

- ラグランジュ力学で相対論的運動を考えることができ、またローレンツ共変性 (ローレンツ変換しても形が変わらない) を表している
- 物体・物質のみならず、相互作用、例えば電磁場すらも停留作用の原理に支配され、ラグランジュ力学で説明できる

ということを確認していきましょう。

5.1 世界線の作用

簡単のため、光速 $c = 1$ とします。^{12 13} まず自由粒子を考えます。質量 m の自由粒子の作用は、相対論的には

$$S = -m \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{\gamma} = -m \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2}$$

と与えられます。非相対論の範囲 ($|\dot{\mathbf{x}}| \ll 1$) の場合、 $-m\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2} \simeq -m + \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2$ の近似により、(運動に影響しない) 定数項以外は非相対論的な自由粒子のラグランジアンに一致します。

この作用は、

$$S = -m \int_{t_0}^{t_1} ds$$

という形で書けます。ここで ds は微少な固有時間、

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

と与えられるローレンツ不変な微少線分であり、作用は4次元時空上の世界線の長さ (固有時間) に比例して定まります。固有時間はローレンツ共変ですから、明らかにこの作用は共変性を持ちます。よく考えると、ここで t は世界線のパラメーター以上の意味を持ちません。もはや任意のパラメーター τ に対して、

$$S = -m \int_{\tau(0)}^{\tau(1)} d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}$$

と書くことができます。

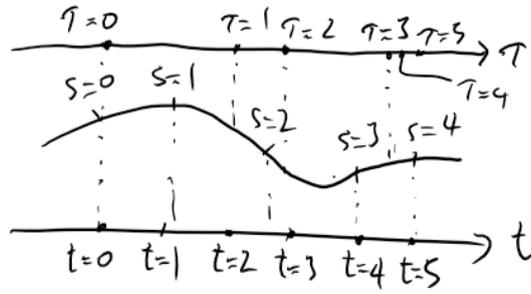
停留作用の原理は、パラメーター区間の端点 $\tau(0), \tau(1)$ に対して位置 $x_{(a)}^\mu = (t_{(a)}, \mathbf{x}_{(a)}) = x^\mu(\tau_{(a)})$ が定まったとき、自由粒子の世界線は $x_{(0)}$ から $x_{(1)}$ に到達するまでの固有時間を停留化 (この場合、最大化) する、と書き直せます。

¹¹物理学で「古典的」という言葉は、「非量子論的」「決定論的」を意味します。この意味では、特殊・一般相対論も立派な古典論です。

¹²もちろん $c = 299792458$ [m/s] には変わりありません。これはただの単位変換、例えば長さの単位を m でなく光秒 (299792458 [m]) で測るという単位変換に過ぎません。 c, h のように自然定数の値を 1 にした単位系を自然単位系と言います。

¹³ローレンツ変換によって時間と空間が混ざり合うことは、時間がパラメーターではなく空間と同様な座標であることを示唆し、その考え方を反映すると、時間も距離として測るべきであり、単位換算定数 c は 1 にした方が最も自然です。

それ以外の単位を採用することは、水平座標 (x, y) はメートルで測り、 z 座標だけは重力の方向だからという理屈でインチで測ることに例えられるでしょう。そうすると、振り子の分析でもメートル・インチ間の換算定数がたくさんついてしまいますよね。



時間パラメーター t と同じ区間で世界線を表す任意パラメーター τ

パラメーター τ に対して、「ラグランジアン」は

$$L\left(x, \frac{dx}{d\tau}, \tau\right) = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} = \frac{ds}{d\tau}$$

として与えられます。EL 方程式は次のように書くことができます。

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial (dx^\mu/d\tau)} = 0$$

ここで L が x に依存しないため、

$$\frac{\partial L}{\partial (dx^\mu/d\tau)} = \text{const.}$$

実際に微分してみましょう。 τ に依存しない定数 u_ν があって、

$$-\frac{1}{ds/d\tau} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} = -u_\nu$$

と書けます。世界線が確定しましたので、任意パラメーター τ の代わりに s を用いて表現できます。

$$\frac{dx^\mu}{ds} = u^\mu = \text{const.}$$

もしくは、もう 1 回微分して運動方程式 $d^2x^\mu/ds^2 = 0$ と書くこともできます。これは慣性の法則の相対論版です。

EL 方程式は、最終的には τ の設定には依りません。 τ を $[\tau_{(0)}, \tau_{(1)}]$ の間でどうやってパラメーター化するかは全く任意で、その上で両端点 $x_{(0)}, x_{(1)}$ さえ等しければ $\tau_{(0)}, \tau_{(1)}$ も勝手に設定できます。

パラメーターを t に設定したときは、パラメーターが空間座標に紐づいているので任意性が現れなかっただけで、世界線の作用は **再パラメーター化不変性 (reparametrization invariant)** があります。世界線の作用が世界線の **幾何学的量 (長さ)** に依存することから、当然の結果です。共変性や再パラメーター化不変性は、幾何学的量・性質と呼ばれるものの必要条件のでもあります。

一般相対論での作用 一般相対論で扱う「曲がった時空」上でも、粒子の作用は「世界線の長さ」(の $-m$ 倍)として定義されます。唯一な相違点は、計量が $\eta_{\mu\nu}$ ではなく、位置に依存する $g_{\mu\nu}$ で与えられ、微少固有時間が $ds^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ となる点です。

この場合でも、自由粒子は停留(最長)の固有時間をもつ世界線をとります。計算は省略しますが、根気よく EL 方程式を解くと粒子の世界線が **測地線方程式** に従うことが分かります。詳細は一般相対論パートをご参照ください。

弦の場合 粒子が時空上の曲線(1次元、世界線)として表されるように、弦は時空上の曲面(2次元、世界面)として表されます。自由弦の作用として受け入れられている **南部 = 後藤作用** は、「世界面の面積」(の定数倍)で定義される作用です。

5.2 電磁場中の相対論的作用

粒子が電荷 q を持ち、電磁場中で運動していると、作用は

$$S = -m \int ds + q \int A_\mu dx^\mu$$

のように与えられます。電磁場との相互作用によって2つ目の項が加わりましたね。この項を**相互作用 (項)**と呼びます。ここで電磁ポテンシャル $A_\mu = (-\phi, \mathbf{A})$ は背景で、粒子の運動とは独立とします。本当は電荷の運動によって電磁ポテンシャルも変化しますが、その説明は少し後にしておきます。

パラメーター τ を用いて書き下すと

$$S = \int_{\tau(0)}^{\tau(1)} d\tau \left(-m \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} + q A_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} \right)$$

です。パラメーター $\tau = t$ を取って、非相対論近似 $-m \int ds \simeq \int \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 dt$ を考えると、前に見た電磁場中の非相対論的な荷電粒子の作用と一致することが分かります。

また、この作用の EL 方程式を解きますと、運動方程式として相対論的 (4 元) ローレンツ力公式が得られます。

$$m \frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} = q \frac{dx^\mu}{ds} F_{\mu\nu} \eta^{\nu\lambda}$$

作用の合成 この式からうかがえるように、粒子が電磁場と相互作用 (結合) しているとき、粒子に関係する作用は

- その粒子自体の作用
- 粒子と場との相互作用

の和で表されます。粒子同士は必ず場を媒介にして相互作用していて、他粒子との直接相互作用はありません。

粒子自体の作用や相互作用は、他の相互作用が加わっても形が変わらず、系全体の作用は考慮すべき作用の和として表せるというメリットがあります。(ある意味、力の合成と似ていますね。)

上では電磁場を背景場として捉えていましたが、粒子は複数個あっても構いません。それに、実はこの系では物理的対象は粒子だけでなく、電磁場も場自体の作用項を持ちます。これを踏まえて、全体系の作用はそれぞれの作用の和として

$$S = \sum_k (S_{\text{par}(k)} + S_{\text{par}(k)+\text{EM}}) + S_{\text{EM}}$$

と書けます。 k は各粒子の番号で、電磁場と関係している項には EM を付けました。

ここで力学変数は各粒子の (パラメーター化した) 位置 $x_{(k)}^\mu(\tau)$ と、電磁ポテンシャル A_μ があり、各粒子に関する作用は

$$S_{\text{par}(k)} = -m_{(k)} \int ds_{(k)}$$

$$S_{\text{par}(k)+\text{EM}} = q_{(k)} \int A_\mu dx_{(k)}^\mu$$

です。電磁ポテンシャルの力学変数としての扱いおよび場自体の作用 S_{EM} に関しては、続く場の解析力学セクションで説明します。

ただ、 k 番粒子の経路 $x_{(k)}^\mu$ を求めたければ、変分法で停留作用となる経路を求めることになりますが、その場合 S_{EM} や他の粒子の $S_{\text{par}(k')} + S_{\text{par}(k')+\text{EM}}$ は、 $x_{(k)}^\mu$ 変分法に関与しない項なので、無視して結構です。この理由で、粒子の経路を調べるために作用は

$$S_{\text{par}(k)} + S_{\text{par}(k)+\text{EM}}$$

の項だけ考えても充分です。また A_μ を変分しているわけではないので、背景としています。¹⁴

¹⁴より詳しく説明すると、電磁ポテンシャル A_μ と粒子経路 $x_{(k)}^\mu$ を同時に停留化する場合、 A_μ を固定して $x_{(k)}^\mu$ だけを見たとき停留点でなければならぬし、逆に $x_{(k)}^\mu$ を固定して A_μ だけを見ても停留点でなければなりません。ここでは前者を確認しているのです。

6 場の解析力学

ここまでは、力学変数が有限個で、ある意味離散的の場合だけを扱ってきました。最後に、連続的な力学変数のある系を扱い方を説明します。

6.1 導入

身近な例は、ギターやドラムヘッド(膜)などがあります。ここでは弦を考える。弦を無数のバネの集まりとして近似し、それぞれのバネは隣のバネと繋がっているとします。



すべてのバネは質量が m 、バネ定数が k 、隣のバネとの距離は l です。各バネは左から順番に番号がついていて、 n 番目のバネの変位を q_n とします。

このとき、バネ全体のラグランジアンは

$$L = \sum \left(\frac{1}{2} m (\dot{q}_n)^2 - \frac{1}{2} k (q_{n+1} - q_n)^2 \right)$$

と書けます。ここで、 $l \rightarrow 0$ の極限を取ります。このとき、バネの線密度 $\mu = m/l$ と、弦の張力 $\kappa = kl$ は保たれます。すると

$$L = \sum l \left(\frac{1}{2} \mu (\dot{q}_n)^2 - \frac{1}{2} \kappa \left(\frac{q_{n+1} - q_n}{l} \right)^2 \right)$$

バネの変位はラベル n に対して q_n と対応させてきましたが、位置 x に対して $q(x)$ と対応させます。ラグランジアンが積分式となっていることが分かります。

$$L = \int dx \left(\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \kappa \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right)$$

つまり、この弦は単位長あたりのラグランジアンが

$$\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \kappa \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2$$

であると言えます。

6.2 場のラグランジュ力学

今まで説明したラグランジュ力学では、パラメーターが1つ (t) しかなく、作用はラグランジアン関数 L をパラメーター積分したものとして定義され、このラグランジアンの入力変数は

- 力学変数 q
- 力学変数のパラメーター1階微分 \dot{q}
- パラメーター t

となっていました。

力学変数 q はパラメーター t に対して値を持つ関数でした。これに対して、時間のパラメーター以外の独立したパラメーター(主に空間座標)を持つ力学変数を考えることができます。その力学変数を場(field)と呼びます。

場のラグランジュ力学では、作用は**ラグランジアン密度**と呼ばれる関数 \mathcal{L} をすべてのパラメーターに関して多重積分したものと定義されます。

$$S[\varphi] = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, x^\mu) d^n x$$

積分範囲は、時間的には観察したい時間範囲、空間的には場が定義される範囲を取ります。ラグランジアン密度の入力変数は、

- 場変数 φ (※ 場が複数ある場合も可能です)
- 場変数のパラメーター 1 階微分の組 $\partial_\mu \varphi = (\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nabla \cdot \varphi)$
- パラメーターの組 x^μ

となります。

6.3 場の EL 方程式

1 パラメーターに対する EL 方程式の導出と同じ手順を進めます。小さい変分 $\delta\varphi$ を取り、部分積分します。

$$\begin{aligned} \delta S &= S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi] = \int \{ \mathcal{L}(\varphi + \delta\varphi, \partial_\mu \varphi + \partial_\mu(\delta\varphi), x^\mu) - \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, x^\mu) \} d^n x \\ &= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu(\delta\varphi) \right\} d^n x \\ &= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right\} \delta\varphi d^n x + \int \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi \right) d^n x \end{aligned}$$

最後の行の第 2 項は、発散定理によって積分領域の境界面での積分に置き換えられます。

$$\int \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi \right) d^n x = \oint_{\text{境界}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi da_\mu$$

ここで、 da_μ は積分領域の境界の法線ベクトルです。ほとんどの場合、境界では

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi = 0$$

となるように境界条件が上手く与えられます。そこから境界積分項を無視すると、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = 0$$

でなければなりません。これが**場の Euler-Lagrange 方程式**です。

ラグランジアン密度に $\partial_\mu K^\mu$ の形を足した変換をしても、場の EL 方程式が変わりません。このことから、通常のラグランジアンとまったく同様に、同じ場の EL 方程式を生み出すラグランジアン密度は一意的ではないことが分かります。

弦の場合 先ほどの弦のラグランジアン密度に関しては、EL 方程式は

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

という弦の波動方程式を得ます。ここで波動の伝播速度 $v = \sqrt{\kappa/\mu}$ が得られます。

相対論的弦 (世界面) になると、作用は南部 = 後藤作用というものを使う必要がありますが、非相対論的に近似するとこの弦の波動方程式と一致します。

6.4 電磁場の作用

驚くべきことに、ギター弦やドラム膜のような力学的な場だけではなく、まったく別の原理に支配されているような**電磁場**についても、停留作用の原理は成り立ちます。(媒質中の波動方程式が、)

電磁場自体の作用は

$$S_{\text{EM}} = -\frac{1}{4\mu_0} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

と与えられます。つまりラグランジアン密度が

$$\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2$$

ということです。ここで ε_0, μ_0 はそれぞれ真空の誘電率と透磁率ですが、簡単のため $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ とおきます。¹⁵ 私たちは A_μ そのものではなく \mathbf{E} と \mathbf{B} を測定していますので、 \mathbf{E} や \mathbf{B} が力学変数と考えがちですが、力学変数は A_μ とするのが正しく、 \mathbf{E} と \mathbf{B} (つまり $F_{\mu\nu}$) はその1階微分の組み合わせに過ぎません。¹⁶

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

ラグランジュ力学で基本相互作用の場を扱うことのもう1つのメリットは、場の時間パラメーターでの微分と空間パラメーターでの微分との区別が無く、作用の共変性を確認しやすいことです。ハミルトン力学で場を扱うと、共変性は見えにくくなります。

6.4.1 マックスウェル方程式

電磁場に関する作用項が揃いましたので、作用全体を書いてみましょう。

$$S = \sum_k \left(-m_{(k)} \int ds_{(k)} + q_{(k)} \int A_\mu dx_{(k)}^\mu \right) - \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

この作用は、 $x_{(k)}^\mu$ と A_μ を力学変数として持ちます。粒子の運動を求めたときと同様に、それぞれの力学変数の運動が知りたければその変数に関する作用項だけ取り出し、他の力学変数は定数と見なせば充分です。

今回は A_μ の方程式が知りたいので、粒子自体の作用は落とし、相互作用項の和を以下のように書き直します。

$$S_{\text{par+EM}} = \int d^4x A_\mu J^\mu$$

ここで、 J^μ は次のように定義される4元電流密度です。 A_μ とは関係ないので、今回は固定されたと見なします。

$$J^\mu(x) = \sum_k q_{(k)} \int d\tau \frac{dx_{(k)}^\mu}{d\tau} \delta^4(x - x_{(k)}(\tau))$$

(τ は k 番粒子の世界線のパラメーター、 $\delta^4(x)$ は4次元のディラックデルタ関数)

とにかくこうすると、考慮すべき作用は

$$S = \int d^4x \left(A_\mu J^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)$$

です。すなわちラグランジアン密度が

$$\mathcal{L} = A_\mu J^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = A_\mu J^\mu - \frac{1}{4} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)$$

ということです。EL方程式を書くと

$$J^\mu + \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0 \quad \therefore \partial_\nu F^{\nu\mu} = -J^\mu$$

となります。ちょうどマックスウェル方程式が得られました。

¹⁵これも自然単位系(ローレンツ=ヘビサイド単位系)です。 $c=1$ のもとで電荷量の単位を調整して $1/\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ に合わせるのです。なお、文献によって $1/\varepsilon_0 = \mu_0 = 4\pi$ (ガウス単位系)とする場合もあります。

¹⁶この理由で、 A_μ のことを「電磁場」と呼ぶ文献もあります。 $F_{\mu\nu}$ には「電磁場強度」という別の名称を付けます。

6.5 場の保存量: 流れ (current)

1パラメーターのラグランジュ力学では、力学変数に対称性があれば、ネーター保存量が存在します。 N が保存量ということは、以下の式で表されます。

$$\frac{dN}{dt} = 0$$

場のラグランジュ力学においても、ネーターの定理が成り立ちます、場はパラメーターを複数もちますので、

$$\partial_\mu N^\mu = 0$$

が成り立つ物理量の組 N^μ を保存量と言います。

場変数に関するネーターの定理は、場変数に対称性があれば、その対称性に対応して保存量 N^μ が存在するという定理で、この N^μ を**ネーターカレント (Noether current)**と言います。特にその時間成分 N^0 は**ネーターチャージ (Noether charge)**と呼ばれます。

具体的に、対称性の生成子が G で、その変換に対応してラグランジアン密度の変化率が $\partial_\mu Y^\mu$ である (この形の変化は全体作用に境界値しか影響しない) とすると、ネーターカレントは

$$N^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} G - Y^\mu$$

と与えられます。

カレントの語源 カレント (流れ) という言葉は、時間パラメーターと空間パラメーターを分離して考えると

$$\frac{\partial N^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{N} = 0$$

というように、連続の式が出ることから由来しました。各 $j = 1, 2, 3$ に対して、 $\partial_j N^j$ は単位時間辺りに単位体積を j 軸の量方向に通り抜ける流れで、 $\partial_0 N^0$ は単位体積に残る量の時間変化率と考えると、「通り抜けた分だけ減る」という当たり前のことになります。

チャージとカレントという単語は、それぞれ「電荷」「電流」を意味する言葉でもあります。その名の通り、実は電荷や電流もゲージ変換に関するネーターチャージ、ネーターカレントとして見ることができます。しかしその説明には本格的なゲージ理論が必要ですので、ここでは省略します。

6.5.1 並進対称性 - エネルギー・運動量テンソル

場変数に対して (時空) 並進対称性に対応するネーターカレントを考えます。

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x + s\epsilon)$$

なので、生成子は $G = \epsilon^\nu \partial_\nu \varphi$ です。また、ラグランジアン密度の変化は当たり前に $\epsilon^\nu \partial_\nu \mathcal{L} = \partial_\mu (\delta_\nu^\mu \epsilon^\nu \mathcal{L})$. 従って、ネーターカレントは

$$\epsilon^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right)$$

となります。時空の全方向に対して並進対称性があるとしたら、次のテンソル

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}$$

が保存量となります。 ($\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0$) このテンソルを**ネーターのエネルギー・運動量テンソル**と呼びます。

エネルギー・運動量テンソルは、添え字の上下をそろえて $T^{\mu\nu}$ や $T_{\mu\nu}$ と書く場合が多く、また、対称テンソルであることが要求されます。ここでネーターカレントとして求めた $T^{\mu\nu}$ は対称テンソルではありません ($T^{\mu\nu} \neq T^{\nu\mu}$) が、適切な補正

$$T^{\mu\nu} \rightarrow T^{\mu\nu} + \partial_\lambda \chi^{\lambda\mu\nu}, \quad (\chi^{\lambda\mu\nu} = -\chi^{\lambda\nu\mu})$$

をすれば対称にできます。このように補正したテンソルも、並進対称性に紐づいた保存量になっています。対称にする理由や、適切な $\chi^{\lambda\mu\nu}$ の存在なども、ここでは省略します。普段、**エネルギー・運動量テンソル**というものは、先ほどのネーターのエネルギー・運動量テンソルに補正を済ませたものを指していて、一般相対論のアインシュタイン方程式で使われるのもこちらです。

テンソルの各成分は、テンソルの対称性から

- T^{00} : エネルギー密度
- T^{01}, T^{02}, T^{03} : 運動量密度、およびエネルギーフラックス (flux, 流れ密度)
- T^{i1}, T^{i2}, T^{i3} ($i = 1, 2, 3$) : i 方向への運動量フラックス。 T^{ij} は ij 平面に対する応力

のように、エネルギー、運動量、応力が一つのテンソルにまとまった形で与えられます。^{17 18}

例えば、電磁場に対するエネルギー・運動量テンソルは、対称化を含めて

$$T^{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

のように与えられます。各成分は以下の通りです。

- $T^{00} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$ は電磁場のエネルギー密度
- $\mathbf{S} = (T^{01}, T^{02}, T^{03}) = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ はポインティングのベクトル (Poynting vector) と呼ばれる、電磁場の運動量密度兼エネルギーフラックス
- T^{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) からなる 3×3 対称行列は、マックスウェルの応力テンソルと呼ばれる、電磁場の運動量フラックスおよび単位面積当たりの力

ある時刻、空間領域 D での電磁場の 4 元運動量は、このテンソルを体積積分 (dV は体積要素) して

$$p_{\text{EM}}^\mu = \int_D T^{0\mu} dV$$

として与えられます。荷電粒子がある場合は、場のエネルギーと粒子のハミルトニアン、場の運動量・粒子の正準運動量の和が保存されます。

6.5.2 回転対称性 - 角運動量テンソル

場に並進変換のネーターカレントとして運動量密度があるように、回転変換のネーターカレントとして角運動量密度が定義されます。粒子の正準角運動量が正準運動量と位置を使って $l_{ij} = q_i p_j - q_j p_i$ と表せたように、場の角運動量密度も運動量密度と位置を使って以下のように表せます。

$$M^{\alpha\mu\nu} = x^\mu T^{\nu\alpha} - x^\nu T^{\mu\alpha}$$

参考文献

- EMAN の物理学: 解析力学 <https://eman-physics.net/analytic/contents.html>
- 益川敏英、植松恒夫、青山秀明、畑浩之『解析力学』(東京図書)
- 川村嘉春『基礎物理から理解するゲージ理論』(サイエンス社)
- 中嶋慧、松尾衛『一般ゲージ理論と共変解析力学』(現代数学社)
- L.D.Landau, *The classical theory of fields*(Vol.2.). 3rd edition. Pergamon Press.

¹⁷よってこのテンソルをフルネーム(?)は「エネルギー・運動量・応力テンソル」ですが、2つだけ取って「応力・エネルギーテンソル」や「エネルギー・運動量テンソル」と呼ぶことが多いです。

¹⁸粒子ではエネルギーとハミルトニアンが区別され、また力学的運動量と正準運動量が区別されましたが、場に関してはその区別はありません。