

一般相対論

Physics Lab. 2021 数理物理学班

川澄 昂太郎 顧 豪

1 テンソル解析の気持ち

一般相対論で使うテンソル解析について、簡単な「気持ち」と規則を説明しましょう。

物理とは 4 次元の時空上の幾何学であるというのが、相対性原理が言おうとすることです。数学的には、どんな座標系を取っても、座標系同士の上に適切な変換があり、その変換に従う限り物理法則の形が変わらないということです。この変換などを取り扱うのが、テンソル解析です。

幾何学的実体が不変というのは、ある 4 次元時空のベクトル $\mathbf{A}$ が、

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A^1 \mathbf{e}_0 + A^1 \mathbf{e}_1 + A^2 \mathbf{e}_2 + A^3 \mathbf{e}_3 \\ &= A'^0 \mathbf{e}'_0 + A'^1 \mathbf{e}'_1 + A'^2 \mathbf{e}'_2 + A'^3 \mathbf{e}'_3 \\ &= \dots\end{aligned}\tag{1}$$

と、座標の基底の取り方が様々でも、表すものが一緒ということを意味します。基底の取り方としては、 $\mathbf{e}$ として正規直交基底をとり、 $\mathbf{e}'$ として何かしらの回転操作を加えた基底とすることなどができます。

ここで、簡単な略記法を説明しようと思います。アインシュタインの略記法と呼ばれるもので、上の (1)(2) 式を簡単にするための書き方です。その 2 式では、上添字と下添字が同じものを掛け合わせ、0 から 3 まで和を取りました。これを簡単に、

$$\mathbf{A} = A^\mu \mathbf{e}_\mu = A'^\mu \mathbf{e}'_\mu$$

と表します。ルールとしては、式中の同じ掛け算の項に属する添字で、上下の添字が一致するものは 0 から 3 まで足し合わせるというものです。あくまでも式を見やすくするための書き方に過ぎないことに注意してください。

それではいよいよベクトルの成分の座標変換をしてみましょう。 $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ という形 (0,1,2,3 は添字です! 冪乗ではありません) に従っていた座標系 (x 系) から、 $x' = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ という座標系 (x' 系) に変えたとき、位置の微小な変位の座標表示 dx^μ と dx'^μ はどのような関係にあるのでしょうか。

答えは、

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

です。ここで dx^μ や dx'^μ はベクトルの成分であることに注意しましょう。これらはベクトル空間の同じ元を違う基底によって表したものに過ぎません。つまり、 x 系、 x' 系での基底をそれぞれ $\mathbf{e}_\mu$ 、 $\mathbf{e}'_\mu$ とすると、

$$dx^\mu \mathbf{e}_\mu = dx'^\mu \mathbf{e}'_\mu$$

となります。したがって基底の変換は成分の変換を打ち消すようなものになるので、

$$\mathbf{e}'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \mathbf{e}_\nu$$

となります。

実は上の例に限らずこの変換則に従うものを、ベクトルと言います。つまり、成分が

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} \quad (3)$$

$$A'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A_{\nu} \quad (4)$$

という変換に従う $\mathbf{A}$ をベクトルと言います。ここで、2 種類の変換に従うものがありました。添字が上についているベクトル、下についているベクトルのことを、それぞれ反変ベクトル、共変ベクトルと言います。

実は、成分の添字は 1 つとは限りません。例えば以下のような 2 つの添字を持つテンソルだと

$$A'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} A^{\lambda\sigma}$$

$$A'^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} A^{\lambda}_{\sigma}$$

という風に変換されます。一般に成分が複数の添字を持ち、同じような変換則を満たす量をテンソルと呼びます。また、成分のことを指して単にベクトルやテンソルと呼んでしまうことが多いです。

また、特殊相対論でもベクトルやテンソルがでてきたと思いますが、特殊相対論ではベクトルやテンソルをローレンツ変換に関する変換性で定義しています。一方、一般相対論でのベクトルやテンソルは任意の座標変換に関する変換性で定義しています。ローレンツ変換も座標変換の一種なので、一般相対論の意味でのベクトルやテンソルは特殊相対論の文脈でもベクトルやテンソルになりますが、逆は一般には成り立たないことに注意しましょう。

言葉の定義をもう一度言いますが、ベクトルやテンソルと呼ばれるものは成分が上の変換則を満たすもののことを指します。実はこれらのベクトルやテンソルは、物理的な意味を含んでくるのです。

もう一つ、重要な量である計量テンソルと、平行移動について述べたいと思います。

不変距離とよばれる以下で定義される量を考えます。

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

これは三平方の定理の一般相対論バージョンだと思ってください。この量は「距離」のようなものであり、どの系に移っても同じ値をとるように $g_{\mu\nu}$ を座標系ごとに調整します。 $g_{\mu\nu}$ を計量の成分と言います。超大事です。後で出てきます。計量の成分には、座標依存性があります。つまり、場所が変わると計量の成分も変わります。

ところでベクトルやテンソルの添字の上下はその添字についての座標変換のもとでの変換性を表しています。上だったら式 (3) のように、下だったら式 (4) のように変換します。しかし、添字の上下は成分の計算の上ではそこまで重要ではありません。

実際、 A^{μ} に対して $g_{\mu\nu} A^{\nu}$ は式 (4) のように変換するのでこれを A_{μ} と書きます。反対に B_{μ} に対して $g^{\mu\nu} B_{\nu}$ は式 (3) のように変換するのでこれを B^{μ} と書きます。ここで $g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} := \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases}$$

を満たす量で、常に存在します。

このようにベクトルの添字の上下は $g_{\mu\nu}$ や $g^{\mu\nu}$ によって上げたり下げたりできます。添字が 2 個以上あるテンソルに対しても同様のことができます。

続いて、数学の準備としては最後になる平行移動を定義したいと思います。一般相対論では曲面を扱うことがあるので、「平行移動」はそう単純ではありません。接続係数 $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ をこれから導入します。

気持ちとしては、ベクトルを無限小に動かしたときに、元のベクトルとどのくらいの差を生じるかということが疑問な訳です。もともと点 P から生えていたベクトル $A^{\mu}(P)$ は、位置に依存します。無限小にずれた点を Q とすると、 $A^{\mu}(Q)$ という値を取ります。

ここで単純に $dA^{\mu} = A^{\mu}(Q) - A^{\mu}(P)$ をすることはできません。なぜなら、異なる点におけるベクトルは異なるベクトル空間の元だからです。曲面座標では、同一点でのベクトルの比較のみができます。

じゃあ $A^{\mu}(P)$ の付け根を Q へ「平行移動」しましょう。このとき、平行移動の仕方としては、 P 、 Q を含む平面 (曲面) を考えて、私たちが普段イメージする通り (お気持ちです) の平行移動をしてやりましょう。具体的には、ベクトルの大きさと、2つのベクトルの成す角が変わらないように移動することを指します。そのとき、平行移動した後の成分の値はきっと変化しているでしょう。 P の座標を x^{μ} 、 Q の座標を $x^{\mu} + dx^{\mu}$ として、 P におけるベクトル $A^{\mu}(x)$ を Q に平行移動したベクトルの成分 $A^{\mu}(x + dx)_{\parallel}$ を

$$A^{\mu}(x + dx)_{\parallel} = A^{\mu}(x) - \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} A^{\lambda}(x) dx^{\nu} \quad (5)$$

という風に定義します。

これによって、曲がった座標でも本当に P におけるベクトル A^{μ} の微分が定義できます。 x^{ν} 方向の微分を $\nabla_{\nu} A^{\mu}$ と書き、

$$\nabla_{\nu} A^{\mu} = \frac{A^{\mu}(x + dx) - A^{\mu}(x)_{\parallel}}{dx^{\nu}} \quad (6)$$

と定義します。ここで、右辺分子第1項の $A^{\mu}(x + dx)$ はもともと点 Q に定まっていたベクトルの成分であり、右辺分子第2項は点 P に定まっていたベクトルを点 Q に平行移動したベクトルの成分であることに注意してください。式 (6) の右辺に式 (5) を代入して、

$$\nabla_{\nu} A^{\mu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} A^{\lambda} \quad (7)$$

となります。

ここで、 $\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}$ の正体について少し説明します。式 (5) や式 (7) から分かる通り、 $\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}$ はベクトルの平行移動や微分のやり方を決めているだけの量です。そのため一般にはある条件さえ守っていればどんなものでもいいです。そのある条件とは、「ベクトルを平行移動した後のものもベクトルである」というものと「平行移動のしかたは座標系によらない」というものです。何を言っているのかちょっと分からないと思うので、 x 系と x' 系という二つの座標系を用意して説明します。「ベクトルを平行移動した後のものもベクトルである」というのは $A^{\mu}(x + dx)_{\parallel}$ が x 系から x' 系への座標変換のもとで式 (3) のように変換するという意味です。「平行移動のしかたは座標系によらない」というのは x 系で平行移動した $A^{\mu}(x + dx)_{\parallel}$ を x' 系に変換して得られる $(A(x' + dx'))'^{\mu}$ というベクトルと、初めから x' 系で平行移動した $A'^{\mu}(x' + dx')_{\parallel}$ が等しい:

$$(A(x' + dx'))'^{\mu} = A'^{\mu}(x' + dx')_{\parallel}$$

という意味です。これらを式 (5) とベクトルであることの定義 (3) を使って式で表現してみましょう。ここから接続係数の座標変換のもとでの変換の式を得ることができます。

まず「ベクトルを平行移動した後のものもベクトルである」ことを式にしましょう。 $A^{\mu}(x + dx)_{\parallel}$ がベクトル

ルの成分ならば、これを x' 系に座標変換した $(A^\mu(x' + dx'))'_\parallel{}^\mu$ は式 (3) より、

$$\begin{aligned} (A(x' + dx'))'_\parallel{}^\mu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \Big|_{x+dx} A^\nu(x + dx)_\parallel \\ &= \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \Big|_x + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} dx^\sigma \right) (A^\nu(x) - \Gamma^\nu_{\lambda\rho} A^\lambda(x) dx^\rho) \end{aligned} \quad (8)$$

となるはずですが、式 (8) を dx の 1 次までで展開すると、

$$\begin{aligned} (A(x' + dx'))'_\parallel{}^\mu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} A^\nu(x) dx^\sigma - \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\lambda\rho} A^\lambda(x) dx^\rho \\ &= A'^\mu(x') + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} A^\nu(x) dx^\sigma - \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\lambda\rho} A^\lambda(x) dx^\rho \end{aligned}$$

となりますが、

$$A^\mu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A'^\alpha(x'), \quad dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} dx'^\beta$$

より、

$$\begin{aligned} (A(x' + dx'))'_\parallel{}^\mu &= A'^\mu(x') + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta} A'^\alpha(x') dx'^\beta - \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\lambda\rho} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\beta} A'^\alpha(x') dx'^\beta \\ &= A'^\mu(x') - \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\beta} \Gamma^\nu_{\lambda\rho} - \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \right) A'^\alpha(x') dx'^\beta \\ &= A'^\mu(x') - \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\beta} \Gamma^\nu_{\lambda\rho} - \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x'^\beta \partial x^\nu} \right) A'^\alpha(x') dx'^\beta \end{aligned} \quad (9)$$

となります。

次に「ベクトルの平行移動のしかたは座標系によらない」ことを式にしましょう。さきほどは x 系で表された量を使って平行移動を計算しましたが、今回は x' 系で表された量を使って平行移動を計算します。 $A'^\mu(x' + dx')_\parallel$ は x' 系での接続係数 $\Gamma'^\mu_{\alpha\beta}$ を用いて、

$$A'^\mu(x' + dx')_\parallel = A'^\mu(x') - \Gamma'^\mu_{\alpha\beta} A'^\alpha(x') dx'^\beta$$

と表せます。これが式 (9) の右辺と等しい、というのが「ベクトルの平行移動のしかたは座標系によらない」ことの意味です。右辺と右辺を比較して、

$$\Gamma'^\mu_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\beta} \Gamma^\nu_{\lambda\rho} - \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x'^\beta \partial x^\nu} \quad (10)$$

を得ます。ここで、

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x'^\beta \partial x^\nu} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x'^\beta} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial x'^\beta} \delta^\mu_\alpha = 0$$

より式 (10) は、

$$\Gamma'^\mu_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\beta} \Gamma^\nu_{\lambda\rho} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha} \quad (11)$$

とも書けます。これが求めたかった接続係数の座標変換のもとでの変換の式です。

接続係数は式 (11) を満たしていれば基本的にはなんでもいいですが、一般相対論では次のような特別な接続係数を用いています：

$$\Gamma^\mu_{\lambda\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\alpha} \right). \quad (12)$$

接続係数をこのように定義したとき、クリストッフェル記号という名前呼びます。接続係数をなぜ式 (12) で定めるかは等価原理と関係しています。式 (12) を採用すると、時空の任意の 1 点 P において、

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(P) &= \eta_{\mu\nu} \\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= 0 \\ \Gamma^\mu_{\lambda\nu}(P) &= 0 \end{aligned}$$

となるような座標系をとることができます。このような座標系を局所ローレンツ系とよびます。
なぜこれが等価原理と関係してくるか、以下で見ていきましょう。

2 重力と計量の関係

まずは計量が重力場と密接に関係する理由を考えてみます。以下では次の仮定を用います。

等価原理

任意の重力場、時空内の任意の点に対してある座標系が存在して、その点の近傍で無重力となるようにできる。

仮定その 2

無重力下では特殊相対論が成り立つ。

等価原理で言っているような無重力系は、自由落下する人から見ることによって実現できます。重力場が存在する時空の領域の中のある点を P とします。 x 系を P の近くの任意の座標系とします。 X 系を P で質点とともに自由落下するような系とします。 X 系では無重力系なので、特殊相対論が成り立ちます。したがって計量は

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu = 1, 2, 3) \\ -1 & (\mu = \nu = 0) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases}$$

です。特殊相対論でてきた不変距離 ds は X 系の量を用いて

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu$$

と表せます。右辺を一般の座標系 x 系の量で表すと、

$$dX^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

より、

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

となります。左辺は

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

と表されるので、 x 系の計量と X 系の計量の関係として、

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\beta} \quad (13)$$

を得ます。

ここで、 X 系は自由落下させることによって実現できることを考えると、自由落下のしかたの情報は式 (13) の $\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\beta}$ の部分に入っていると考えられます。このことから式 (13) より、自由落下のしかた、すなわち重力場の分布の様子が一般の座標系の計量 $g_{\alpha\beta}$ と密接に関係することが分かりました。 $g_{\mu\nu}$ を Einstein の重力ポテンシャルとよぶことがあります。

ところで、局所ローレンツ系ではある 1 点において計量は特殊相対論のものと等しく微分もゼロとなりました。計量は重力と関係しているので、このことから局所ローレンツ系では局所的に無重力であることが分かります。

任意の 1 点において局所的に無重力である系を選べる、という等価原理を、接続係数を式 (12) で定義すると局所ローレンツ系を選べる、ということによって表現しています。

3 質点の運動方程式

ここでは計量 $g_{\mu\nu}$ が与えられているときの自由落下する質点が従う運動方程式を求めたいと思います。

自由落下する質点の位置を、 τ を質点の固有時として一般の座標系 x 系で表したものを $x^\mu(\tau)$ とします。また、ある瞬間の質点の近傍には局所 Lorentz 系が存在するので、それを X 系として質点の位置を $X^\mu(\tau)$ とします。仮定その 2 から X 系から見た質点の運動は特殊相対論の運動方程式に従い、今の場合質点に力は働かないので、

$$\frac{d^2 X^\mu(\tau)}{d\tau^2} = 0$$

が成り立ちます。これを x 系の量で表すと、

$$\frac{d^2 X^\mu(\tau)}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

より、運動方程式は

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (14)$$

となります。両辺に $\frac{\partial x^\rho}{\partial X^\mu}$ をかけると、

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial X^\mu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\rho_\nu$$

より、

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\mu} \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

を得ます。ここで、 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ の座標変換の式は

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x) + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}$$

でした。 X 系が点 $X(\tau_0)$ における局所 Lorentz 系であることから

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(X(\tau_0)) = 0$$

となるので、上の座標変換の式を用いて、

$$\Gamma^\rho_{\lambda\nu}(x(\tau_0)) = \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\sigma} \frac{\partial^2 X^\sigma}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}$$

となります。これを式 (14) に代入して、

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (15)$$

を得ます。これが一般の座標系から見た自由落下する質点の運動方程式です。左辺第 2 項が質点にはたらく重力を表します。 $\Gamma^\rho_{\lambda\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ から定まる幾何学的な量です。したがって、式 (15) から、重力は時空の幾何学的な構造から生じる力だと言うことができます。

4 重力場の方程式

ここでは計量 $g_{\mu\nu}$ が従う方程式について考えたいと思います。これは Newton 力学での重力ポテンシャル $\varphi(x)$ が従う方程式

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho(x) \quad (16)$$

に対応するものです。 G は万有引力定数で、 ρ は質量密度です。

一般相対論では次の原理を念頭においています。

Mach の原理

時空の構造は時空に存在する物質の分布の様子によって決まる。

ここでいう時空の構造は計量 $g_{\mu\nu}$ のことです。一般相対論では計量から定まる量と物質の分布の様子を表す量を等式でつなぐことで Mach の原理を表現します。

$g_{\mu\nu}$ は μ と ν について対称なので 10 個の未知関数 $g_{\mu\nu}(x)$ がありますが、それらを決定するには 10 個の連立方程式が必要です。そのような方程式は一般相対性原理からテンソル方程式であるべきです。これらの事情は、次のような 2 階対称テンソルの方程式を考えると実現できます。

$$F^{\mu\nu} = \kappa T_{\text{GR}}^{\mu\nu} \quad (17)$$

ここで左辺の $F^{\mu\nu}$ は計量とその微分のみから決まるテンソルとしています。これは時空の何らかの歪みのようなものを表します。右辺は物質の分布を表すテンソルで、エネルギー運動量テンソルとよびます。この式は、右辺の物質分布が左辺の時空の歪みを生じさせるということを意味し、式 (16) と似ていることが分かります。 κ は定数であり、質点系の弱い重力場の場合に式 (17) が式 (16) に帰着するという要請から、

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

となります。

上でいきなりでてきたエネルギー運動量テンソルについて少し話します。

エネルギー運動量テンソルという名前のついたテンソルは別に一般相対論だけででてくるテンソルではありません。すでに古典力学の解説 PDF でもでてきました。そこでは、ラグランジアン密度 $\mathcal{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha)$ が与えられていて、時空並進に対応するカレントとして定義されました：

$$T_{\text{can}}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial^\nu \phi_\alpha - g^{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

これを正準エネルギー運動量テンソルと言います。

一方、一般相対論では以下の性質を持つエネルギー運動量テンソル $T_{\text{GR}}^{\mu\nu}$ の存在を仮定しています。

- 電磁場なども含む全ての物質はエネルギーを持つ。
- $T_{\text{GR}}^{\mu\nu}$ は以下の保存則を満たす:

$$\nabla_\mu T_{\text{GR}}^{\mu\nu} = 0. \quad (18)$$

一般相対論をラグランジアン形式で定式化すると、ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ は重力場に関するラグランジアン密度 $\mathcal{L}_g$ と広義の物質場に関するラグランジアン密度 $\mathcal{L}_M$ の和になっていると想像できます。方程式 (17) は $S = \int (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_M) dx^4$ の $g_{\mu\nu}$ による変分から得ることができるはずです。このとき方程式 (17) の右辺のエネルギー運動量テンソル $T_{\text{GR}}^{\mu\nu}$ は、

$$T_{\text{GR}}^{\mu\nu} = \frac{-2c}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}}$$

となります。これをヒルベルトエネルギー運動量テンソルと言います。

正準エネルギー運動量テンソルとヒルベルトエネルギー運動量テンソルは簡単な理論なら一致しますが、どの範囲まで一致するかは一般には分かっていないと思われます。難しいことを書いてしまいましたが、とりあえずエネルギー運動量テンソルは物質の分布のしかたを表している物理量だと思ってください。

方程式 (17) に戻しましょう。 $T_{\text{GR}}^{\mu\nu}$ は式 (18) を満たすので $F^{\mu\nu}$ も

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

を満たす必要があります。

また、このほかに、

- $F^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の 2 階微分までのみから定まる 2 階対称テンソルである。
- $F^{\mu\nu}$ は $\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ について 1 次式である。

という要請をします。このもとで Λ を任意定数として $F^{\mu\nu}$ は定数倍を除いて

$$F^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - \Lambda g^{\mu\nu}$$

と決定できることが知られています。

ここで、 $R^{\mu\nu}$ や R は時空の曲がり具合を表す量で、共変微分が可換でないことから生じる量です。実際、 $(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A^\lambda$ を計算してみると、

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A^\lambda = (\partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\lambda + \Gamma_{\tau\mu}^\lambda \Gamma_{\rho\nu}^\tau - \Gamma_{\tau\nu}^\lambda \Gamma_{\rho\mu}^\tau) A^\rho$$

となります。ここででてきた A^ρ の係数からテンソル $R_{\rho\mu\nu}^\lambda$ を

$$R_{\rho\mu\nu}^\lambda := \partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\lambda + \Gamma_{\tau\mu}^\lambda \Gamma_{\rho\nu}^\tau - \Gamma_{\tau\nu}^\lambda \Gamma_{\rho\mu}^\tau$$

と定義します。 $R_{\rho\mu\nu}^\lambda$ をリーマン・クリストッフエルの曲率テンソルと言います。4 階のテンソルです。ここから 2 階テンソル $R_{\mu\nu}$ とスカラー R を、

$$R_{\mu\nu} := R_{\mu\nu\lambda}^\lambda, \quad R := R^\mu_\mu$$

と定義します。

以上より、方程式 (17) は

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

となります。これが $g_{\mu\nu}$ が従う方程式で、アインシュタイン方程式とよびます。

これは 10 個の連立偏微分方程式なので、 $g_{\mu\nu}$ を完全に決定するためには物質の分布である $T^{\mu\nu}$ だけでは無理で、境界条件も必要になります。したがって、アインシュタイン方程式は Mach の原理をある程度再現したものであるといえます。

参考文献

- [1] 内山龍雄 (1978). 『一般相対性理論』 裳華房.
- [2] Hawking, S., & Ellis, G. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). Cambridge: Cambridge University Press.
doi:10.1017/CBO9780511524646
- [3] 須藤靖 (2019). 『一般相対論入門』 (改訂版). 日本評論社.