

弦の量子化

Physics Lab. 2021 数理物理学班

荻野 恭輔 川澄 昂太郎

1 開弦の量子化

相対論的な量子開弦の量子化を行うにあたってシュレーディンガー演算子の組を $(X^I(\sigma), x_0^-, P^{\tau I}(\sigma), p^+)$ と選ぶと、弦における異なる点の測定が互いに干渉しあわないことから交換関係を以下のように置くことができます。

$$[X^I(\sigma), P^{\tau J}(\sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma') \quad (1)$$

この式のほかに

$$[X^I(\sigma), X^J(\sigma')] = [P^{\tau I}(\sigma), P^{\tau J}(\sigma')] = 0 \quad (2)$$

と

$$[x_0^-, p^+] = -i \quad (3)$$

の交換関係を仮定します。

x_0^- と p^+ は他の演算子と交換することも考えるとハイゼンベルク演算子の交換関係は

$$[X^I(\tau, \sigma), P^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma') \quad (4)$$

$$[X^I(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')] = [P^{\tau I}(\tau, \sigma), P^{\tau J}(\tau, \sigma')] = 0 \quad (5)$$

$$[x_0^-(\tau), X^I(\tau, \sigma)] = [x_0^-(\tau), P^{\tau I}(\tau, \sigma)] = 0 \quad (6)$$

$$[p^+(\tau), X^I(\tau, \sigma)] = [p^+(\tau), P^{\tau I}(\tau, \sigma)] = 0 \quad (7)$$

$$[x_0^-(\tau), p^+(\tau)] = -i \quad (8)$$

となります。開弦での光錐ゲージ $X^+ = 2\alpha' p^+ p^-$ を用いると

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial X^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = 2\alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial X^+} \quad (9)$$

よりハミルトニアンは

$$H = 2\alpha' p^+ p^- = 2\alpha' p^+ \int_0^\pi d\sigma P^{\tau -} \quad (10)$$

これは横方向のヴィラソロモードを用いれば $H = L_0^\perp$ であることが分かります。

これらの性質を踏まえて $X^I(\tau, \sigma)$ に関するハイゼンベルクの運動方程式を考えることで、

$$\ddot{X}^I - X^{I''} = 0 \quad (11)$$

が量子力学的な運動方程式であることを確認することができます。これで量子化を行うことができました。交換関係を用いると以下の特別な関係も見ることができます。

$$[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \pm X^{J'}) (\tau, \sigma')] = \pm 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (12)$$

2 ヴィラソロ演算子

つぎのような作用を考えます。

$$S = \int d\tau d\sigma \mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma (\dot{X}^I \dot{X}^I - X^{I'} X^{I'}) \quad (13)$$

これは南部後藤作用と古典的に一致している作用であることが計算によって分かります。この作用から波動関数と弦の境界条件を共に求めることができ、ハミルトニアンも先ほどの結果と一致します。この作用を用いて X^I を展開すると

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} \alpha_n^I \cos n\sigma \quad (14)$$

となります。 X^I や α_n^I を演算子で表現し、先のような交換関係を課すと α_n^I は以下のような交換関係を満たすことが計算によって分かります：

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\delta_{m+n,0} \eta^{IJ}. \quad (15)$$

ここで、 $n \geq 1$ に対し、

$$a_n^I := \frac{1}{\sqrt{n}} \alpha_n^I, \quad a_n^{I\dagger} := \frac{1}{\sqrt{n}} \alpha_{-n}^I \quad (16)$$

と定義すると、

$$[a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{mn} \eta^{IJ}. \quad (17)$$

という生成消滅演算子の交換関係を満たすことが分かります。

相対論的な光錐弦の話で見たように X^- はモード展開することができました。今回、 X^- を X^I と p^+, x_0 を用いて表すことにしていたので、光錐弦で見たようにヴィラソロモードを用いて書き直すことができます。

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp \quad (18)$$

$$L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \quad (19)$$

このうち $L_0^\perp$ は弦の状態の質量にも関わってくる物理量です。非可換な演算子の積の和で表されているため、量子化するときの積の順番によって得られる演算子が変わってしまいます。そのため、正規順序化と呼ばれる消滅演算子を常に右側に持ってくるようにする操作を行ってから量子化すると、

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p \quad (20)$$

となります。一番最後の項を a とするとゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (21)$$

を解析接続したものの $s = -1$ での値が $-1/12$ となることから

$$a = -\frac{1}{24} (D-2) \quad (22)$$

となることが期待されますが、実際、理論がローレンツ対称性を持っていることを要請すると $D = 26$, $a = -1$ となる必要があります。

振動子との交換関係は

$$[L_m^\perp, \alpha_n^J] = -n\alpha_{m+n}^J \quad (23)$$

となっています。そしてヴィラソロ演算子同士の交換関係は

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m - n)L_{m+n}^\perp + \frac{D-2}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \quad (24)$$

右辺第二項は中心拡大項と呼ばれます。ヴィラソロ演算子の弦座標に対する作用は世界面のパラメータの付け替えによって生じるような変更を生成することが計算によって分かります。

3 ローレンツ生成子

弦の作用のローレンツ不変性から保存するチャージは

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi (X^\mu \dot{X}^\nu - X^\nu \dot{X}^\mu) d\sigma \quad (25)$$

であり、モード展開から

$$M^{\mu\nu} = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \quad (26)$$

と表せます。光錐ゲージにおいては X^- 座標が非自明な関数なので M^{-I} が最も複雑なローレンツ生成子となります。

$M^{\mu\nu}$ の式から類推して

$$M^{-I} = x_0^- p^I - x_0^I p^- - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-) \quad (27)$$

となりますが、この式では右辺第二項がエルミートになっていないので書き直して

$$M^{-I} = x_0^- p^I - \frac{1}{2}(x_0^I p^- + p^- x_0^I) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-) \quad (28)$$

と取り直します。この式をヴィラソロ演算子を用いた表記に直すと

$$M^{-I} = x_0^- p^I - \frac{1}{4\alpha' p^+} (x_0^I (L_0^\perp + a) + (L_0^\perp + a) x_0^I) - \frac{i}{\sqrt{2\alpha'} p^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n^\perp) \quad (29)$$

となり、これで M^{-I} の候補を得たことになります。

交換関係を調べてみると

$$\begin{aligned} [M^{-I}, M^{-J}] &= -\frac{1}{\alpha' (p^+)^2} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \\ &\quad \times \left\{ m \left[1 - \frac{1}{24}(D-2) + \frac{1}{m} \left[\frac{1}{24}(D-2) + a \right] \right] \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

となります。この交換子が 0 になるには $\{\}$ 部分のそれぞれの $[]$ の中身が 0 になればよく、一つ目の $[]$ から時空次元 D が 26 であることが結論されます。そして二つ目の $[]$ からは $a = -1$ となります。このことからハミルトニアンは

$$H = L_0^\perp - 1 \quad (31)$$

と書けます。これは以前のハミルトニアンに比べて -1 だけずれた結果となりました。

4 状態空間の構築

ここでは量子弦の状態空間の構築を議論します。最初に基底状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ を考えます。これはすべての a_n^I に対して消滅し、基本状態は以下のようにして構築されます。

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (32)$$

励起の数演算子 $N^\perp$ を以下のように導入します。

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I \right) \\ &= \frac{1}{\alpha'} (-1 + N^\perp) \end{aligned} \quad (33)$$

この数演算子は生成・消滅演算子、基底状態に対してそれぞれ以下のような性質を持ちます。

$$[N^\perp, a_n^{I\dagger}] = n a_n^{I\dagger} \quad (34)$$

$$[N^\perp, a_n^I] = -n a_n^I \quad (35)$$

$$N^\perp |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0 \quad (36)$$

これらのことより数演算子の固有値 $N_\lambda^\perp$ は次のようになります。

$$N_\lambda^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I} \quad (37)$$

ここで具体的な状態について調べていきます。最初に基底状態に M^2 を作用させると

$$M^2 |p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'} (-1 + N^\perp) |p^+, \vec{p}_T\rangle = -\frac{1}{\alpha'} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (38)$$

となり、質量の二乗が負になるという不思議な結果となります。質量の二乗が負となるスカラー場をタキオンと呼び、このタキオン状態は不安定性を示します。

次に第一励起状態、つまり $N_\perp = 1$ となる状態を考えます。この時 M^2 の固有値は 0 を示し、一般的に以下のように表現されます。

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (39)$$

この時の状態の数は $D - 2$ であり、光子状態に対応します。開弦理論の量子状態は南部後藤作用からの出発であり、電磁的なゲージ不変性などを含んでいないにも関わらずです。

$N^\perp \geq 2$ の場合にも生成消滅演算子を用いることで状態を構築することができ、26 次元で考えると $N^\perp = 2$ の時は 324 個の状態、 $N^\perp = 3$ の時は 2600 個の状態が得られます。

5 タキオン状態

一般的なラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}|\Delta\phi|^2 - V(\phi) \quad (40)$$

であり、自由なスカラー場のポテンシャル $V(\phi) = \frac{1}{2}M^2\phi^2$ において場が時間依存のみを持つときの運動方程式は

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + M^2\phi(t) = 0 \quad (41)$$

となります。ここで質量の二乗が負であり

$$M^2 = -\beta^2 \quad (42)$$

で表されるとき解は

$$\phi(t) = A \cosh(\beta t) + B \sinh(\beta t) \quad (43)$$

です。このうち $\sinh$ の部分は $\phi = 0$ の地点が定常点ではあるが無限小の摂動でその場を離れてしまいます。これがタキオン状態の不安定性を生み出しています。

6 閉弦の古典論

さて、今度は閉弦の理論について解説したいと思います。以前の古典弦の運動のところでは開弦の運動を扱いました。そこでは、適切な世界面のパラメーターをとると運動方程式が波動方程式になり、また、境界条件からある種の周期性が要請されることを見ました。したがって弦の座標はフーリエ級数で表示できました。座標と運動量の交換関係を定めて正準量子化を行うと、各展開係数がボゾンの生成消滅演算子の交換関係を満たすことがわかり、開弦の状態空間を構築することができました。さらに、そこにはマクスウェル場の光子とみなせる状態があることを見ました。

今度は閉弦の運動を量子化し、状態空間にどのような粒子が現れるか見ていきましょう。ほとんどの過程は開弦で行った解析と同じです。

まずは閉弦の古典的な運動を考えます。古典弦の運動のところ導入したパラメータ付けが満たす条件は、次のようなものでした。

閉弦のパラメータ付けの定義

space-like でないベクトル n^μ をとる。このとき世界面のパラメータ $\tau \in \mathbb{R}, \sigma \in [0, 2\pi]$ を、

$$\begin{aligned} n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) &= \alpha' (n_\mu p^\mu) \tau \\ n_\mu p^\mu &= 2\pi n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu} \end{aligned}$$

を満たすようにとる。

パラメータ付けが座標や運動量密度に課す条件

$$\begin{aligned}(\dot{X} \pm X')^2 &= 0 \\ \mathcal{P}^{\tau\mu} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \\ \mathcal{P}^{\sigma\mu} &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^\mu\end{aligned}$$

もともとの運動方程式は $\partial_\tau \mathcal{P}^{\tau\mu} + \partial_\sigma \mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$ でしたが、以上の条件を用いると、

$$\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0 \quad (44)$$

という波動方程式になりました。

以前は全空間を満たす D-ブレーンに端点をもつ開弦を考えたので、これに加えてノイマン型境界条件を課して方程式を解きました。しかし今回は閉弦なので D-ブレーンに起因する境界条件はありません。その代わりに、閉弦を一周して元に戻ってきたときに弦の座標が元の値と同一であることを要請します。すなわち、

$$X^\mu(\tau, 0) = X^\mu(\tau, 2\pi)$$

となる必要があります。これを σ の範囲を実数全体に拡張させて

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) \quad (45)$$

という条件にします。^{*1}

ところで、運動方程式 (44) の一般解は

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma)$$

となります (ダランベール解)。 X_L, X_R はそれぞれ σ の負、正の向きに進む波を表します。 $u := \tau + \sigma$, $v := \tau - \sigma$ とすると、境界条件 (45) は

$$X_L^\mu(u + 2\pi) - X_L^\mu(u) = X_R^\mu(v) - X_R^\mu(v - 2\pi) \quad (46)$$

と書き換えられます。 u, v は独立な変数なので両辺は定数となります。したがって、両辺の導関数は周期 2π の周期関数となります。導関数をフーリエ級数展開して積分すると、

$$X_L^\mu(u) = \frac{1}{2}x_0^{L\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\bar{\alpha}_0^\mu u + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n \neq 0}\frac{\bar{\alpha}_n^\mu}{n}e^{-inu} \quad (47)$$

$$X_R^\mu(v) = \frac{1}{2}x_0^{R\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0^\mu v + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n \neq 0}\frac{\alpha_n^\mu}{n}e^{-inv} \quad (48)$$

を得ます。式 (46) より $\bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu$ が分かるので、 $x_0^\mu := \frac{1}{2}(x_0^{L\mu} + x_0^{R\mu})$ とすると、

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n \neq 0}\frac{e^{-in\tau}}{n}(\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}) \quad (49)$$

を得ます。これが閉弦の運動方程式の解です。展開係数にバーなしとバー付きの 2 種類あるのが特徴です。

^{*1} パラメータ空間に $(\tau, \sigma) \sim (\tau, \sigma + 2\pi)$ という同一視を導入したことに相当します。標的空間が単連結でない場合には境界条件に修正が必要です。

7 閉弦の量子化

開弦の量子化にあたっては特に n^μ として、

$$n^\mu = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0 \right)$$

を取って解析しました（光錐ゲージ、光錐量子化）。閉弦の量子化でも光錐ゲージを採用します。

前節で得た式 (49) をもとに閉弦の運動を量子化しましょう。ほとんど開弦の場合と同じです。基本となる Heisenberg 演算子として $(X^I(\tau, \sigma), x_0^-(\tau), \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), p^+(\tau))$ をとり、次のように同時刻正準交換関係を導入します。

$$\begin{aligned} [X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] &= i\delta(\sigma - \sigma')\eta^{IJ} \\ [x_0^-, p^+] &= -i \end{aligned}$$

他の組み合わせはすべて 0 とします。詳しい計算は省略しますが、この交換関係から展開係数の交換関係が、

$$\begin{aligned} [\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J] &= m\delta_{m+n,0}\eta^{IJ} \\ [\alpha_m^I, \alpha_n^J] &= m\delta_{m+n,0}\eta^{IJ} \\ [\alpha_m^I, \bar{\alpha}_n^J] &= 0 \end{aligned}$$

と求まります。ここで、 $n \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned} a_n^I &:= \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_n^I, & a_n^{I\dagger} &:= \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_{-n}^I \\ \bar{a}_n^I &:= \frac{1}{\sqrt{n}}\bar{\alpha}_n^I, & \bar{a}_n^{I\dagger} &:= \frac{1}{\sqrt{n}}\bar{\alpha}_{-n}^I \end{aligned}$$

と定めると、これらはボゾン的な生成消滅演算子の交換関係を満たすことが分かります：

$$[\bar{a}_m^I, \bar{a}_n^{J\dagger}] = \delta_{mn}\eta^{IJ}, \quad [a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{mn}\eta^{IJ}.$$

8 状態空間の構築

ここから閉弦の状態空間を構築することを考えますが、閉弦の座標の周期性の要請から、状態空間に対して開弦のときにはなかった制約が付きます。すなわち、閉弦の場合はパラメータ σ の $\sigma = 0$ の位置を自然に定める方法がないため、閉弦の状態は σ 方向の並進操作に対して不変である必要があります。

σ 方向の並進の生成子を P とすると、閉弦の任意の状態 $|\Psi\rangle$ は

$$P|\Psi\rangle = 0 \tag{50}$$

を満たす必要があります。 P を具体的に求めて (50) を満たす状態だけを集めることによって状態空間を構築します。

開弦の場合と同様にして横方向のヴィラソロ演算子を次のように定義します:

$$\begin{aligned}
\bar{L}_n^\perp &:= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I \quad (n \neq 0), \\
L_n^\perp &:= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \quad (n \neq 0), \\
\bar{L}_0^\perp &:= \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + \bar{N}^\perp := \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{a}_n^{I\dagger} \bar{a}_n^I, \\
L_0^\perp &:= \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + N^\perp := \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I.
\end{aligned} \tag{51}$$

このとき、 $L_0^\perp - \bar{L}_0^\perp$ は次の交換関係を満たすことを示すことができます。

$$[L_0^\perp - \bar{L}_0^\perp, X^I(\tau, \sigma)] = i \frac{\partial X^I}{\partial \sigma}$$

したがって、 $P = L_0^\perp - \bar{L}_0^\perp$ とすると、これは σ 方向の並進を生成することが分かります。式 (50) より、閉弦の任意の状態は、

$$N^\perp |\Psi\rangle = \bar{N}^\perp |\Psi\rangle \tag{52}$$

を満たす必要があります。これをレベル整合条件と言います。式 (51) で定義した $N^\perp, \bar{N}^\perp$ は開弦のときにも登場しましたが、モード番号も考慮した励起の数演算子です (式 (54) を参照)。レベル整合条件は、「閉弦の状態は、基底状態に作用するバーなしとバー付きの生成演算子の個数はモード番号も考慮して同じであれ」、ということを言っています。

閉弦の状態が満たさなければならない条件が分かったので、次に閉弦の状態を具体的に構成していきましょう。閉弦の状態空間で基底ベクトルの役割をする状態を基本状態と呼ぶことにします。基本状態は、ゼロモードの運動量 $p^+, \vec{p}_T$ で指定される基底状態に生成演算子が何個作用したかを表す数列 $\lambda := \{\lambda_{nI}\}$, $\bar{\lambda} := \{\bar{\lambda}_{mJ}\}$ を指定することで決まります。基本状態を $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ と書くと、*2

$$|\lambda, \bar{\lambda}\rangle := \left(\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{nI}} \right) \left(\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{J=2}^{25} (\bar{a}_m^{J\dagger})^{\bar{\lambda}_{mJ}} \right) |p^+, \vec{p}_T\rangle \tag{53}$$

と書けます。しかし式 (53) はレベル整合条件 (52) を満たす必要があります。 $N^\perp, \bar{N}^\perp$ の $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ への作用は、

$$\begin{aligned}
N^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{nI} |\lambda, \bar{\lambda}\rangle \\
\bar{N}^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{J=2}^{25} m \bar{\lambda}_{mJ} |\lambda, \bar{\lambda}\rangle
\end{aligned} \tag{54}$$

です。したがって、レベル整合条件は式 (54) の右辺がそれぞれ等しいことを意味します。

*2 ゼロモードの運動量 $p^+, \vec{p}_T$ にも依存しますが、省略します。

9 閉弦の状態のいくつかの具体例

前節で閉弦の状態空間を構築したので、ここではいくつかの状態を具体的に調べてみます。そこで、まず状態の質量を計算したくなりますが、これは次式で与えられることを述べておきます：

$$M^2 := -p^2 := 2p^+p^- - p^I p^I = \frac{2}{\alpha'}(N^\perp + \bar{N}^\perp - 2). \quad (55)$$

9.1 $N^\perp = \bar{N}^\perp = 0$ の状態 — タキオン —

まず、基底状態に何も生成演算子を作用させない状態が考えられます。この状態の質量は式 (55) より $M^2 = -\frac{4}{\alpha'}$ となり、質量が虚数になってしまいます。この状態はタキオンと呼ばれ、開弦の状態空間にも含まれていますが、閉弦のタキオンの性質はあまり分かっていないようです。

9.2 $N^\perp = \bar{N}^\perp = 1$ の状態 — 重力子、カルブ・ラモン場、ディラトン —

次に、基底状態にバーなしとバー付きのモード 1 の生成演算子を 1 つずつ作用させた状態を考えます、この状態の質量は式 (55) より 0 であることが分かります。運動量が $p^+, \vec{p}_T$ で確定している一般的な状態は R_{IJ} を係数として、

$$\sum_{I,J} R_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (56)$$

と書けます。ここから重力場およびカルブ・ラモン場、ディラトン場とよばれる場を見出すことが以下のようにできます。

まず、 R_{IJ} を対称成分と反対称成分に分けます：

$$R_{IJ} = \frac{1}{2}(R_{IJ} + R_{JI}) + \frac{1}{2}(R_{IJ} - R_{JI}) =: S_{IJ} + A_{IJ}.$$

次に対称成分 S_{IJ} を以下のようにトレースがゼロの成分と単位行列に比例する成分とに分解します：

$$S_{IJ} = \left(S_{IJ} - \frac{1}{D-2} \delta_{IJ} \text{Tr} S \right) + \frac{1}{D-2} \delta_{IJ} \text{Tr} S =: \hat{S}_{IJ} + S' \delta_{IJ}.$$

以上より R_{IJ} を次のようにトレースがゼロの対称性分と、反対称性分と、トレース成分とに分解できます：

$$R_{IJ} = \hat{S}_{IJ} + A_{IJ} + S' \delta_{IJ}.$$

以上の 3 つの成分は独立にとることができるので、式 (56) は以下の 3 つの独立な状態に分解できます：

$$\sum_{I,J} \hat{S}_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (57)$$

$$\sum_{I,J} A_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (58)$$

$$S' a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (59)$$

式 (57) で表される状態は重力子の 1 粒子状態とみなせることが分かっています。式 (58) で表される状態はカルブ・ラモン場という 2 つの添字をもつ反対称テンソル場の 1 粒子状態に対応し、式 (59) で表される状態は質量のないスカラー場の 1 粒子状態に対応し、ディラトンとよべれます。

参考文献

- [1] Zwiebach, B. (2013). *A first course in string theory* (『初級講座 弦理論』(樺沢宇紀 訳)). 丸善プラネット. (Original work published 2009)
- [2] Polchinski, J. (2005). *String theory volume I: An introduction to Bosonic string* (『ストリング理論 第1巻』(伊藤克司, 小竹悟, 松尾泰 訳)). シュプリンガー・ジャパン. (Original work published 1998)