# 特殊相対性理論

Physics Lab.2021
数理物理学班
手良脇大誠　山口由貴

Einstein は、特殊相対性理論を構築するに際し、二つの重要な原理を置きました。相対性原理と光速度不変の原理です。このパートでは、まずそれらの原理について説明し、その後、それらから得られる重要な座標変換について説明します。

## 1　相対性原理

「全ての慣性系において物理法則が同じ形式で表される」という要請を相対性原理といいます。この章では、相対性原理を原理に据えると Newton 力学にどのような問題が生じるのかを見ていきます。

### 1.1　慣性系とは

Newton の第一法則「すべての物体は静止または等速直線運動を、外力を受けない限りは続ける」が成り立つような系を慣性系 (inertial system) といいます。この条件を満たす慣性系 S が一つ存在すると、S に対して任意の方向に等速直線運動する系 S' も慣性系になります。S 系において等速直線運動をする物体は S' 系においても外力は受けず、S 系で見たときとその速度の大きさや向きは変わっても等速直線運動を続けるためです。以後議論をしやすくするため、ある慣性系を S、S に対して $x$ 軸正方向に速さ $v$ で動く慣性系を S' と定めることにします (S 系での座標を $(t, x, y, z)$、S' 系での座標を $(t', x', y', z')$ と表すことにします)。Newton 力学では、$t = 0$ のときに二つの座標の原点が一致するとき、以下の Galilei 変換が成り立ちます。

$$x' = x - vt \tag{1}$$
$$y' = y \tag{2}$$
$$z' = z \tag{3}$$
$$t' = t \tag{4}$$

### 1.2　Newton 力学における相対性原理

上記の変換に対して Newton 力学の法則が S 系、S' 系両方で同じ形式で成り立っていること、すなわち、Galilei 変換の下で Newton 力学は相対性原理を満たしていることを確かめてみましょう。つまり、S 系と S' 系それぞれで $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ という形の運動方程式が成立する必要があります。式 (1)∼(3) をそれぞれ $t$ で微分すると、$t' = t$ より $\frac{dx'}{dt} = \frac{dx'}{dt'}$ であることなどから、次のような速度の変換則を得ることが出来ます。

$$v'_x = v_x - v \tag{5}$$
$$v'_y = v_y \tag{6}$$
$$v'_z = v_z \tag{7}$$

これらをもう一度微分すれば加速度の不変性を得ることが出来ます。

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \tag{8}$$

これで二つの慣性系の間の変換、Galilei 変換を施しても質点の加速度は不変であるということが分かりました。Newton の運動方程式 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ が不変であるためには、1. 質量の不変性 $m' = m$、2. 力の不変性 $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$ が成り立つ必要がありま

す。これらは当たり前のことではありませんが、慣性系の速度 $v$ が光速に比べて非常に遅い場合に成り立つということが実験によってよく確かめられています (ものすごく大きい体重計があったとして、その上で歩いたからといって体重をごまかすことは出来ない!)。よって、質量と力の不変性が成り立つと認めることにすると $m'\mathbf{a}' = m\mathbf{a} = \mathbf{F} = \mathbf{F}'$ で、S' 系でも運動方程式が成り立つと分かり、これで Newton 力学での相対性原理（Galilei 相対性）の成立を確かめることが出来ました。

## 1.3 Maxwell 理論における相対性原理

Newton の運動方程式は Galilei 変換のもとで不変であると分かったので、次に Maxwell 理論で Galilei 相対性が成り立つかどうか確かめてみましょう。電荷及び電流密度が存在しないときの Maxwell 方程式は、$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ を用いて以下のように書けます。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{9}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{10}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{11}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{12}$$

式 (11) の両辺のローテーションをとると、左辺は

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \\ &= -\nabla^2 \mathbf{E} \end{aligned} \tag{13}$$

一つ目の式変形はベクトル三重積の公式、二つ目の式変形では式 (9) を用いています。同様に右辺のローテーションをとると

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} \end{aligned} \tag{14}$$

と導けます。よって、左辺の結果と合わせると $\mathbf{E}$ に関する波動方程式を得ることができます (同様にして $\mathbf{B}$ の波動方程式も得ることができます)。

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\mathbf{E} = 0 \tag{15}$$

この波動方程式が相対性原理を満たすかどうかをみていきます。簡単のため、$x$ 方向に進む波を考えることにし、$\mathbf{E}$ は $y, z$ に依存しないものとします。(15) はベクトルの式ですから、$\mathbf{E}$ の 3 つの成分に関して同じ式が成立しています。その一つの成分（どれでも良い）を $E$ と書くことにします。$\mathbf{E}$ は $x, t$ のみに依存するので $E(\mathbf{x}, t) = E(x, t)$ と表すことができます。この波において、Galilei 変換に対して $E(x, t) = E'(x', t')$ が成り立つとします (このように仮定しても問題ないことが知られています)。このとき、時間に関する微分は (1)(4) 式より、次のように表されます。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}E(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}E'(x',t') \\ &= \left(\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}\right)E'(x',t') \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)E'(x',t') \end{aligned} \tag{16}$$

もう一度 $t$ で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}E(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)E'(x',t') \\ &= \left[\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}\right) - v\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right)\right]E'(x',t') \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2v\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'} + v^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right)E'(x',t') \end{aligned} \tag{17}$$

と計算できます。同様にして $E(x,t)$ を $x$ に関して微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}E(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}E'(x',t') \\ &= \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'}\right)E'(x',t') \\ &= \frac{\partial}{\partial x'}E'(x',t') \end{aligned} \tag{18}$$

となります。もう一度 $x$ で偏微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}E(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}E'(x',t') \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2}E'(x',t') \end{aligned} \tag{19}$$

と計算できます。式 (**??**), (**??**) を波動方程式 (**??**) に代入すると S' 系での波動方程式を得ることが出来ます。

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)E &= \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2}E' - 2v\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'}E' + v^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}E'\right) - \frac{\partial^2}{\partial x'^2}E' \\ &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E'}{\partial t'^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 E'}{\partial x'^2} - \frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2 E'}{\partial t'\partial x'} = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

これは S 系での波動方程式とは異なる式であり、すなわち Galilei 変換のもとでは Maxwell 理論の相対性は成り立たないということが分かります。ただし、$v \ll c$ のときは $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sim 1, \frac{2v}{c^2} \sim 0$ と近似でき、S 系での式と同じ形となります。つまり、Maxwell の理論に関して、$v \ll c$ のもとでは Galilei 変換に対する相対性原理が成り立つけれど、$v$ が大きくなると成り立たなくなるということです。

この章で見てきたことをまとめると、Galilei 変換に対し、Newton の運動方程式は相対性原理を満たすが、Maxwell 方程式は満たしていない、ということです。しかし、相対性原理は常に成り立っている（と要請している）ので、どちらも相対性原理を満たす必要があります。よって、理論の修正が必要となります。その方法として、Maxwell 方程式は修正せず、代わりにそもそもの変換則である Galilei 変換を修正し、それに伴って Newton 力学も見直すことで相対性原理を満たすようにしたのが Einstein の特殊相対性理論です。その新たな変換則を得るのに必要な準備として、特殊相対性理論における 2 つ目の仮定である光速度不変の原理が存在します。それを次章で見ていきましょう。

# 2　光速度不変の原理

光速度不変の原理とは、その名前の通り「真空中の光の速度は任意の慣性系で等しく、時刻や位置にもよらず定数となる」という原理です。Newton 力学からは想像しがたいこの原理がどのように導かれていったのかをみていきます。

## 2.1　光の媒質「エーテル」とは

光は干渉や回折といった性質を示すため、波であると考えられました。そうとすると、音が空気を媒質とするように光にも光の媒質があるはずです。光は真空の宇宙でも伝わるため、光の媒質は空気とは別に存在し宇宙空間を満たしている必要があります。地球は毎秒 30km ほどで公転しているため、もしエーテルが宇宙に対して静止していたとすると地球の静止系ではエーテルは毎秒 30km ほどの速さで動いていて、それに伴って光の速度も変化するはずです。18 世紀頃、人には感知できないこの光の媒質は「エーテル」と名付けられこのような様々な議論が行われました。

## 2.2　Michelson-Morley の実験

エーテルが存在するとしたら、光速 $c$ はエーテルの静止系に対するものであり、前節で述べたように光の速度もエーテルの流れに乗って変化するはずです。そのため、色々な向きの光の速度を調べればエーテルの動きが分かりそうですが、光の速さは $10^8 m/s$ 程度の桁であるのに比べ、地球の速さの桁は高々 $10^4 m/s$ 程度です。エーテル中を地球が動いているとしても、その影響を実験によって確かめるには $(\frac{v}{c})^2 \sim 10^{-8}$ 程度の精度が必要とされており、18,19 世紀当時の技術は現

実的ではありませんでした。そこで、Michelson と Morley という人物が、二つの光線が干渉縞をつくるということを利用した高精度の実験を考案し、エーテルの存在を確かめました。彼らの、Michelson-Morley の実験がどのようなものであったのか、そしてその結果によってエーテルが存在しないと結論づけられたことをみていきます。

ハーフミラーという道具は受け取った光のうち約半分の光を通常の鏡の通り反射し、残りの光はそのまま透過するという

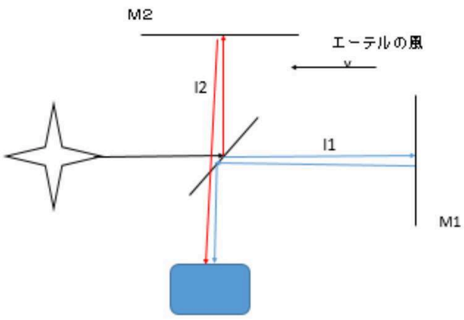


図 1　実験装置

優れものなのですが、これを使って光をエーテルの風と平行な向きと、エーテルの風と垂直な方向に分けて干渉縞をおこします。光源から出た光を、光線と 45 度傾いたハーフミラーに通し光を前述の二つの向きに分けます。エーテルの風と平行な方向の光をビーム 1, エーテルの風と垂直な方向の光をビーム 2 とします。ビーム 1 は距離 $l_1$ 離れた鏡 $M_1$、ビーム 2 は距離 $l_2$ 離れた鏡 $M_2$ で反射し、再度ハーフミラー上の出発点に戻ります (つまりそれぞれの光は距離 $2l_1$,$2l_2$ 移動して帰って来る)。これらの光はそのままハーフミラーを透過し干渉計で干渉波を作ります。干渉のパターンを調べるには、それぞれの経路を往復するのに光がかかった時間を調べ、その差をみればよいので早速それぞれの所要時間を計算しましょう。エーテルの風の速さは $v$ とおくことにします。また、エーテルの静止系での光の速さを $c$ とします。まずはビーム 1 の所要時間を求めます。$M_1$ にぶつかるまでの”行き”ではエーテルの「向かい風」を受けるため、このときの光の速さは $c-v$ です。よって”行き”の所要時間は $\frac{l_1}{c-v}$ です。帰りは反対に「追い風」を受けるため光の速さは $c+v$ で、の所要時間は $\frac{l_1}{c+v}$ です。よってビーム 1 の往復の所要時間は、

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1}{c}\frac{1}{1-\beta^2} \tag{21}$$

です。ここで、$\frac{v}{c} = \beta$ と定義しました。相対性理論では頻繁に出てくる項なので覚えておくと便利です。次にビーム 2 の往復の所要時間を求めてみましょう。ビーム 2 は光の進行方向とエーテルの風の向きが垂直なので、エーテルの静止系で考えると行きも帰りも光の進む距離は $\sqrt{l_2^2 + (\frac{vt_2}{2})^2}$ です。これの 2 倍が光の往復の走行距離、$ct_2$ に等しいため、

$$2\sqrt{l_2^2 + (\frac{vt_2}{2})^2} = ct_2 \tag{22}$$

を解いて

$$t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2l_2}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{23}$$

を得ることが出来ます。$t_1$ と $t_2$ の差を求めると

$$\Delta t \equiv t_2 - t_1 = \frac{2}{c}\left(\frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{24}$$

と計算できます。一見エーテルの動く向きが分からないからうまく実験できないように感じますが、この実験装置全体を回転できるようにしてあるため装置を回転させて干渉縞が変化する様子を観察すればエーテルの流れを確認できるという仕組みになっています。ここで装置を 90 度回転させて、ビーム 2 をビーム 1 と平行な方向に、ビーム 1 をビーム 2 と平行

な方向にしたときを考えてみます。回転後をそれぞれビーム 1', ビーム 2' とすると、

$$t'_2 = \frac{2l_2}{c}\frac{1}{1-\beta^2} \tag{25}$$

$$t'_1 = \frac{2l_1}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{26}$$

より

$$\Delta t' = \frac{2}{c}\left(\frac{l_2}{1-\beta^2} - \frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{27}$$

と求まります。よって、この回転に伴う時間差は

$$\begin{aligned}\Delta t' - \Delta t &= \frac{2}{c}\left(\frac{l_1+l_2}{1-\beta^2} - \frac{l_1+l_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\\ &\sim \frac{2(l_1+l_2)}{c}\left[1+\beta^2 - \left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)\right]\\ &= \frac{l_1+l_2}{c}\beta^2 \end{aligned} \tag{28}$$

です。一つ目の式変形には、$x \ll 1$ のときの近似式、$(1+x)^k \sim 1+kx$ を用いています。光の干渉縞を特徴づけるパラメーター $\delta$ は時間差に光の速度を掛け合わせた「光路差」を真空中の波長で割ったもので定義されます。これを実際の実験で使われた値を用いて計算してみます。$l_1 = l_2 = 11m$、波長 $\lambda = 5.5 \times 10^{-7}m$ 、$\beta = \frac{v}{c} = 10^{-4}$ です。これを $\delta$ の式に代入すると

$$\Delta\delta \equiv \frac{c(\Delta t' - \Delta)}{\lambda} \sim \frac{l_1+l_2}{\lambda}\beta^2 \tag{29}$$

$$= \frac{22 \times (10^{-4})}{5.5 \times 10^{-7}} = 0.4 \tag{30}$$

と求まります。つまり、エーテルが存在し、宇宙に対して静止していたとすると実験装置を回転させるうちにこの値が出てくるということです。ところが、実験では誤差を評価しても $\Delta\delta < 0.01$ という結果になり、エーテルの風の影響が全く観測されませんでした。これによって従来の常識に則ってたてられた「光はエーテルの静止系に対して速度 $c$ で進む」というモデルは否定されることになりました。

それでは、どうすれば Michelson-Morley の実験を説明できるのでしょうか？ここで登場するのが光速度一定という考え方です。仮に、エーテルモデルを捨て去り、全ての慣性系で光速が同じであったと考えると、どの向きの光であっても同じ速度で進むため、Michelson-Morley の実験において $\Delta\delta$ が検出されなかったことは当然のことです。しかし、Galilei 変換の下で光速度不変の原理を採用するのであれば、二つの慣性系の間で光速に関して $c' = c - v$ といったような関係が成立するはずですから、矛盾が生じてしまいます。従って、光速度不変の原理の下に Galilei 変換に代わる新たな座標変換を構築する必要があるのです。

## 2.3 光速度不変の原理と同時性の概念

Michelson-Morley の実験によって、光速度不変の原理という考えが登場しました。そして、光速度不変の原理の下で相対性原理の要請を満たすため、Galilei 変換も Newton 力学も修正され、「全ての慣性系で時間が共通にとられる」という常識も覆されてしまいます（次の章で見ます)。そのため、我々は時間というものの解釈を慎重に行うべきです。そこで光の速度が常に一定ということを用いて同一慣性系内の時間を定義します。ある慣性系内の任意の静止した 2 点 A,B に時計 $C_a, C_b$ がおいてあるとします。A から B に光を発射し、その光が B で反射して A に戻ってくることを考えます。このとき、

・$t_a$ を、A で光を発射するときの $C_a$ の示す時刻
・$t_b$ を、B で光を反射するときの $C_b$ の示す時刻

・$t'_a$ を、A で光を受け取るときの $C_a$ の示す時刻
とします。$C_a$ と $C_b$ が合っているとは、

$$t_b - t_a = t'_a - t_b \tag{31}$$

が成り立っていることと定義します。こうすることによって光速度不変の原理のなかで時間を明確に定義することが出来ました。

# 3 Lorentz 変換

## 3.1 Lorentz 変換の導出

特殊相対論の根幹をなす原理を以下に示しておきます。

$$\begin{cases} \text{1.相対性原理 : 物理法則は慣性系に依らず、同じ形を取る} \\ \text{2.光速度不変の原理 : 光の速さは慣性系に依らず、同じ値をとる} \\ \text{3.時空はどの慣性系でも一様等方である} \end{cases}$$

1 と 2 については、既に見ました。3 は、Einstein の論文の中で（自明とされて）明示されてはいませんが、必要な仮定です。3 の意味するところについて触れておきましょう。一様等方とは、座標のどこに原点をとっても時空が同じように見えるということだと考えてください。例えば、次の図を考えてみましょう。

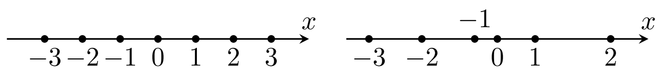


図 2　一様等方な座標とそうでない座標

右側の座標軸を見てみましょう。明かに座標軸の目盛りが等間隔ではなく、原点の取り方によって見え方は変わりますから、一様等方ではありません。一方、左の座標軸は、どこに原点を移動したとしても空間の見え方は変わりませんから、これは一様等方です。

仮定 2,3 を用いて、新たな座標変換である Lorentz 変換を導きます。S 系を慣性系とし、その座標を $(t, x, y, z)$ と書きます。また、それに対して x 軸正方向速さ $v$ で進む慣性系 S' 系での座標を $(t', x', y', z')$ と書くことにします。また、$t = t' = 0$ において、S 系と S' 系は軸も含めて完全に重なっていたとしましょう。これらの関係は次のように書けます。

$$\begin{aligned} t' &= \Gamma_{00}t + \Gamma_{01}x + \Gamma_{02}y + \Gamma_{03}z \\ x' &= \Gamma_{10}t + \Gamma_{11}x + \Gamma_{12}y + \Gamma_{13}z \\ y' &= \Gamma_{20}t + \Gamma_{21}x + \Gamma_{22}y + \Gamma_{23}z \\ z' &= \Gamma_{30}t + \Gamma_{31}x + \Gamma_{32}y + \Gamma_{33}z \end{aligned} \tag{32}$$

ここで、右辺に $x^2$ などといった項が登場しないのは、3 番目の仮定があるからです。例えば、$x' = x^2$ であったとすると、S 系で等間隔に並んでいる点が S' 系では等間隔ではないことになりますから、時空が慣性系の乗り換えによって一様等方でなくなってしまいます。よって、3 番目の仮定の元では、座標軸の間には線形変換しか許されないのです（線形変換であれば、等間隔なものは等間隔に写されるからです）。

ここで、便利さから、$x$ を $\bar{x} = x - vt$ なる量に置き換えることにします。そうして得られる関係式の係数を改めて $\Gamma$ で書くと、

$$\begin{aligned} t' &= \Gamma_{00}t + \Gamma_{01}\bar{x} + \Gamma_{02}y + \Gamma_{03}z \\ x' &= \Gamma_{10}t + \Gamma_{11}\bar{x} + \Gamma_{12}y + \Gamma_{13}z \\ y' &= \Gamma_{20}t + \Gamma_{21}\bar{x} + \Gamma_{22}y + \Gamma_{23}z \\ z' &= \Gamma_{30}t + \Gamma_{31}\bar{x} + \Gamma_{32}y + \Gamma_{33}z \end{aligned} \tag{33}$$

となります。我々がすべきことは、(33) 式の係数を全て決定することです。そのために、光速度不変の原理をもとにいくつかの思考実験をしましょう。

(i)$t$ の式の係数決定

下図のように $x$ 軸方向に並んだ光源と鏡が S 系から見て $x$ 軸正方向に速度 $v$ で動いているような系を考えます。すなわち、光源と鏡は S' 系に対して静止しています。また、S 系で見た光源と鏡の距離を $L_1$ とします。さらに、光源から光が放たれた瞬間を $t = t' = 0$ にとり、この時の光源の位置を原点にとります。また、光が鏡に到達して反射する時刻を $t = t_1, t' = t'_1$ とし、反射光が光源に帰ってくる時刻を $t = t_2, t' = t'_2$ とします。

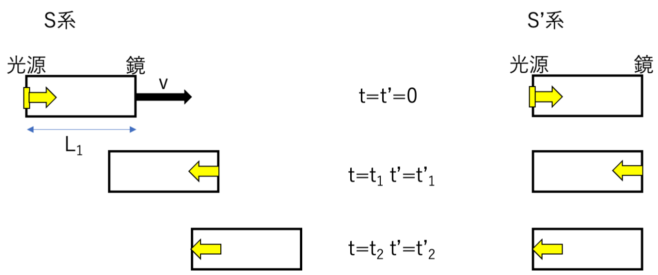


図 3　$x$ 軸方向に並んだ光源と鏡

S' 系では光源等は静止しているので、2.3 で見た時計合わせの定義から、

$$2t'_1 = t'_2 \tag{34}$$

を得ます。また、S 系で鏡に到達するまでに光が距離 $L_1 + vt_1$ だけ進むので、

$$ct_1 = L_1 + vt_1 \quad \therefore t_1 = \frac{L_1}{c-v} \tag{35}$$

反射後についても同様に考えて、

$$c(t_2 - t_1) = L_1 - v(t_2 - t_1) \quad \therefore t_2 - t_1 = \frac{L_1}{c+v} \tag{36}$$

(33) 式の $t'$ に関する式に、光が反射する瞬間の座標値を代入すると、

$$t'_1 = \Gamma_{00} t_1 + \Gamma_{01} L_1 = L_1 \left( \frac{\Gamma_{00}}{c-v} + \Gamma_{01} \right) \tag{37}$$

光が光源に戻ってきた瞬間についても同様に、

$$t'_2 = L_1 \left( \frac{\Gamma_{00}}{c-v} + \frac{\Gamma_{00}}{c+v} \right) \tag{38}$$

(34)(37)(38) より、次式を得ます。

$$\Gamma_{01} = -\frac{v}{c^2 - v^2} \Gamma_{00} \tag{39}$$

ここまでは $x$ 軸方向に並んでいる光源と鏡を考えていました。次に、$y$ 軸方向に並んでいる場合を考えましょう。

先ほど同様、(34) 式が成立します。また、$t_1, t_2$ について、光源から鏡に向かう方向の速度成分に注意すると、

$$t_1 = \frac{L_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \ , \ t_2 = \frac{2L_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \tag{40}$$

となります。よって、先ほど同様 (33) の $t$ の式に反射の瞬間・反射光が帰って来た瞬間の座標を代入すれば、

$$t'_1 = \Gamma_{00} \frac{L_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \Gamma_{02} L_1 \ , \ t'_2 = \Gamma_{00} \frac{2L_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \tag{41}$$

(41) と (34) を合わせれば、

$$\Gamma_{02} = 0 \tag{42}$$

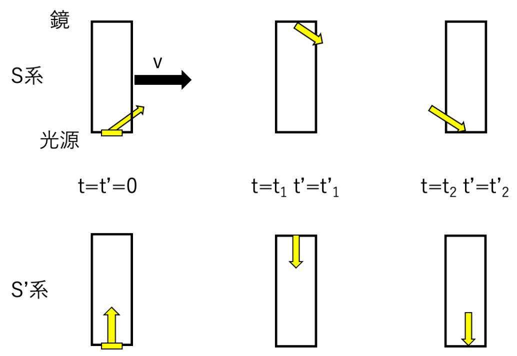


図 4　$y$ 軸方向に並んだ光源と鏡

が結論されます。さらに、$z$ 軸方向に光源と鏡が並んでいた場合を考えると、これは $y$ 軸方向の場合と全く同じことですから、やはり次を得ます。

$$\Gamma_{03} = 0 \tag{43}$$

(39)(42)(43) より、(33) の $t$ の式は次のように書けます。

$$t' = \Gamma_{00}\left\{t - \frac{v}{c^2 - v^2}(x - vt)\right\} \tag{44}$$

ここで、

$$\beta = \frac{v}{c}\ ,\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{45}$$

という量を導入すれば、(44) は次のように書けます。

$$ct' = \Gamma_{00}\gamma^2(ct - \beta x) \tag{46}$$

(ii)$x$ の式の係数決定

　次に、(33) の $x$ に関する式を考えましょう。$x'$ 軸上にある固定点に注目すると、$y = z = 0$ であり、$x'$ は定数です。また、$x =$ (定数) $+ vt$ だから、$\bar{x}$ も定数です。よって、

$$\forall t, \Gamma_{10} t = (\text{定数}) \quad \therefore \Gamma_{10} = 0 \tag{47}$$

また、$t = 0$ においての S 系での $yz$ 平面上の点を考えましょう。この時、$x = x' = \bar{x} = 0$ であるから、(2) の $x$ の式より

$$0 = \Gamma_{12} y + \Gamma_{13} z \tag{48}$$

これが任意の $y, z$ で成立するので、

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{13} = 0 \tag{49}$$

(47)(49) より、

$$x' = \Gamma_{11}(x - vt) = \Gamma_{11}(x - \beta ct) \tag{50}$$

となります。ここで、図 2 の思考実験に戻りましょう。S' 系での光源と鏡の距離は、(50) を用いて

$$\Gamma_{11}(L_1 - vt) - \Gamma_{11}(0 - vt) = \Gamma_{11} L_1 \tag{51}$$

と書けます。これが $ct'_1$ に等しいので、(37)(39) より、

$$\Gamma_{11} L_1 = cL_1 \frac{c}{c^2 - v^2}\Gamma_{00} \quad \therefore \Gamma_{11} = \gamma^2 \Gamma_{00} \tag{52}$$

と計算できます。尚、既に S 系での光速を $c$ として計算をしていましたが、S' 系での光速が登場するのはここが初めてです。つまり、ここで光速度不変の原理が適用されているということです。よって、

$$x' = \gamma^2\Gamma_{00}(x - \beta ct) \tag{53}$$

です。

(iii)$y$ 及び $z$ の式の係数決定

まず、$y$ の式について考えます。先ほど同様 $x'$ 軸上の固定点を考えると、$y' = 0, \bar{x} = (\text{定数}), y = z = 0$ より、(33) 式から

$$\Gamma_{20}t = (\text{定数}) \quad \therefore \Gamma_{20} = 0 \tag{54}$$

です。また、$t = 0$ においての $xz$ 平面上の点を考えましょう。$y' = y = 0, \bar{x} = x$ ですから、$x$ の時同様、

$$\forall x, z.\ 0 = \Gamma_{21}x + \Gamma_{23}z \quad \therefore \quad \Gamma_{21} = \Gamma_{23} = 0 \tag{55}$$

結局、

$$y' = \Gamma_{22}y \tag{56}$$

となります。ここで、図 3 の思考実験を思い出しましょう。S' 系での光源と鏡の距離は、(56) より、$\Gamma_{22}L_1$ です。光速度不変の原理より、これが $ct'_1$ に等しいので、(41)(42) より、

$$\Gamma_{22} = \gamma\Gamma_{00} \tag{57}$$

となります。よって、

$$y' = \gamma\Gamma_{00}y \tag{58}$$

です。そして、$y$ 軸と $z$ 軸の対等性から、

$$z' = \gamma\Gamma_{00}z \tag{59}$$

でもあります。

(iv)$\Gamma_{00}$ の決定

(i) から (iii) で得た結果をまとめておきます。

$$\begin{cases} ct' = \gamma^2\Gamma_{00}(ct - \beta x) \\ x' = \gamma^2\Gamma_{00}(x - \beta ct) \\ y' = \gamma\Gamma_{00}y \\ z' = \gamma\Gamma_{00}z \end{cases} \tag{60}$$

このように、まだ定数 $\Gamma_{00}$ が不明です。より詳しく書くと、$\Gamma_{00} = \Gamma_{00}(v)$ です。ここで、S' 系から見ると S 系が $x'$ 軸正方向に速度 $-v$ で進んでいるように見えますから、

$$y = \gamma\Gamma_{00}(-v)y'\ ,\ y' = \gamma\Gamma_{00}(v)y \quad (\because (29)) \tag{61}$$

が共に成立します。従って、

$$y = \gamma^2\Gamma_{00}(v)\Gamma_{00}(-v)y \quad \therefore \gamma^2\Gamma_{00}(v)\Gamma_{00}(-v) = 1 \tag{62}$$

が得られます。ところで、$x$ 軸の向きをひっくり返して、S 系に対して S' 系が $x$ 軸負の方向に速さ $v$ で動いていると見たとしても、空間の一様等方性から、S' 系が S 系に対して $x$ 軸正方向に速さ $v$ で動いている場合と何ら変わりないはずです (そもそも軸の向きをどう定めるかは人間の恣意的なものですから、その向きによって現象に影響が出るはずがありません)。よって次式が得られます。

$$\Gamma_{00}(v) = \Gamma_{00}(-v) \tag{63}$$

(62) と (63) より、$\Gamma_{00}(v)^2 = 1/\gamma^2$ です。そして、$v = 0$ で S 系と S' 系が一致しなければならないことから、（例えば、(29) の $y$ の式に注目すると、$\gamma\Gamma_{00}(0) = 1$ でないといけないから）

$$\Gamma_{00}(v) = \frac{1}{\gamma} \tag{64}$$

を得ます。これを (60) に代入すれば、最終的な Lorentz 変換の式

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{65}$$

に至ります。

## 3.2 時空の解釈

3.1 で見たように、新たに得た変換は時間 $t$ すらも変換されることを表しています。これは、$t = t'$ と考えるのが普通であった Newton 力学では考えられない結果です。「時間」というものが慣性系に依ると分かった今、改めて時空について考えておきましょう。

Newton 力学における時空は、**絶対時間**と**絶対空間**と呼ばれる、人や物に依存することのない客観的な存在として解釈しており、時間と空間は完全に区別して扱っていました。こうした時空の解釈の下では、例えば、ある二つの事象が時間的な間隔を持って起こる時、誰から見てもその時間的な間隔は同じです。また、空間についても同様に、2 点の距離を測定する時、どんな人が行っても、例え走っている人であっても同じ結果が得られます。こういった事例は、直感的で妥当に思えます。しかし、特殊相対論によると、これは必ずしも正しくないのです。

特殊相対論においての時空には、絶対時間や絶対空間といった完全に客観的な存在はありません。代わりに、ある慣性系 A から見た時空、別の慣性系 B から見た時空、というように、それぞれの慣性系から見たある意味で主観的な時空を考える必要があります。そして、Newton 力学のように空間と時間を異質とみなして空間三次元と時間一次元を切り離したりせず、それらを四つの対等な座標として扱うことも特徴的です。時間と空間を対等に扱うと言っても、そのままでは単位が異なるので、時間 $t$ に光の速度 $c$ を乗じた $ct$ と他の空間座標（$x, y, z$）を対等に扱っていくことになります。実際、(65) 式に注目すると、時間成分と空間成分が入り混ざったような変換をしており、上二式に関しては、$ct$ と $x$ が完全に対等になっています。この対等性を意識して、これら四つの座標をまとめて $x^\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) と書くことにします。（$\mu$ は $x$ の冪乗を表しているわけではなく、ただの添字です）。ただし、$x^0 = ct$ , $x^1 = x$ , $x^2 = y$ , $x^3 = z$ です。これと行列を用いると、Lorentz 変換は次のように書くこともできます。

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \left( \beta = \frac{v}{c} \ , \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \tag{66}$$

そして、$x^0$軸、$x^1$軸、$x^2$軸、$x^3$軸 からなる四次元時空を粒子が移動すると考えるのです。

Newton 力学での客観的な時空という描像が直感的かつ妥当に思えたにも関わらず、こうして時空の捉え方を変更してしまうと、特殊相対論からは誤った結果が得られるのではないか、と思う方もいるかもしれません。しかし、計算するとわかるように、Lorentz 変換は、Galilei 変換の一般化になっています。すなわち、Lorentz 変換において $v$ が $c$ に比べて十分小さいという仮定を置けば、Galilei 変換に帰着できるのです。実際、$\beta \ll 1$ の時、$\gamma = 1$ として次式を得ます。

$$\begin{cases} t' = \gamma \left( t - \dfrac{\beta}{c} x \right) \simeq t \\ x' = \gamma(x - vt) \simeq x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{67}$$

このように、特殊相対論で得られる結論は $v$ が $c$ に比べて十分小さい元で Newton 的な結論に一致するようになっています。そのため、我々の日常的な速度のスケールであれば、Newton 的な時空の捉え方が近似的に妥当になるのです。もし、みなさんに秒速 $10^8$m/s 程度のスピードで動く予定があるのであれば、その時は時空の見え方に特殊相対論的な影響が現れてくるでしょう。

## 3.3 Lorentz 変換の帰結

Lorentz 変換を考慮することで得られる具体的な結果について、二つ見ていくことにします。

(i)Lorentz 収縮

S 系において $x$ 軸正方向に速度 $v$ で進んでおり、S' 系において静止して見えるような棒を考えましょう (下図)。

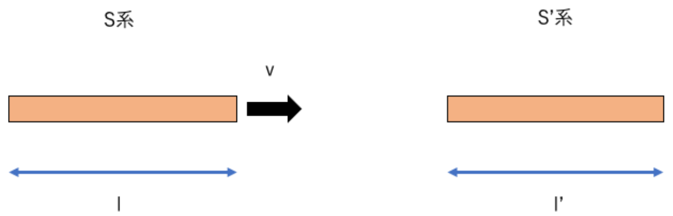


図 5　S 系と S' 系における棒

この棒の片端を S' 系の原点 $(x^1, x^2, x^3) = (0, 0, 0)$、もう片端が $(x^1, x^2, x^3) = (l', 0, 0)$ とします。すなわち、S' 系での棒の長さは $l'$ です。この棒は S 系ではどのように見えるのでしょうか？ S 系での棒の端点をそれぞれ $x^1 = a$ , $x^1 = b$ とします。Lorentz 変換の式 (33) の $x'^1$ の式に注目しましょう。棒の片端 $x'^1 = 0$ は、S 系での座標と次のような関係にあります。

$$0 = -\gamma\beta ct + \gamma a \quad \therefore a = vt \tag{68}$$

棒のもう片端 $x'^1 = l'$ は、S 系での座標と次のような関係にあります。ここで、S 系での長さを考えているため、棒の二つの端点での時刻は同じにする必要があり、したがって (68) 同様 t を用いています。

$$l' = -\gamma\beta ct + \gamma b \quad \therefore b = vt + \frac{l}{\gamma} \tag{69}$$

(68)(69) より、S 系での長さ $l$ は

$$l = l'\sqrt{1-\beta^2} \tag{70}$$

となります。つまり、S' 系で見るよりも短く見えるのです。これを、Lorentz 収縮と言います。

(ii) 時間の遅れ

S 系と S' 系のそれぞれでの時間の進み方について調べましょう。S 系に対して $x$ 軸正方向に速度 $v$ で動く時計を考えます。つまり、この時計は S' 系で静止しています。ここで、S 系で $t = 0$ から $t = \tau$ まで時間が経過したとし、その時 S' 系では $t' = 0$ から $t' = \tau'$ まで経過したとしましょう。S' 系の座標から S 系の座標を得る Lorentz 変換は、(2) で $v \to -v$ として、

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} \tag{71}$$

で与えられますから、この時間成分に関する式より、S' 系で時計は常に $x'^1 = 0$ であることに注意すると、$\tau$ と $\tau'$ の間の次のような関係が得られます。

$$c\tau = \gamma c\tau' \quad \therefore \tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}} > \tau' \tag{72}$$

すなわち、自分から見て動いている時計の時間の進みは遅れているように見えるのです。

(70) および (72) は、$v$ が $c$ に比べて十分小さい時には $l = l'$ , $\tau = \tau'$ となり、Newton 力学的な直感的結果と一致します。Lorentz 収縮と時間の遅れは、特殊相対論の大きな帰結の一つと言えるでしょう。

## 3.4 Lorentz 変換とテンソル

Lorentz 変換の式 (66) は、よりコンパクトに、次のようにまとめることもできます。

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0,1,2,3} L^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{73}$$

ここで、

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{74}$$

です。また、上付き添字と下付き添字に同じもの（ここでは $\nu$）があれば、それに関して和を取るという約束をしましょう (Einstein の縮約規則)。すると、シグマを省略して次のようにも書けます。

$$x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{75}$$

ここで、一つ重要なローレンツ不変量に触れておきましょう。四次元時空内にある二点を考えます。そして、S 系におけるそれらの座標成分の差を $(\Delta x^0\ ,\ \Delta x^1\ ,\ \Delta x^2\ ,\ \Delta x^3)$、S' 系における差を $(\Delta x'^0\ ,\ \Delta x'^1\ ,\ \Delta x'^2\ ,\ \Delta x'^3)$ と書きます。この時、ローレンツ変換から、

$$\begin{aligned}(\Delta x'^0)^2 - (\Delta x'^1)^2 - (\Delta x'^2)^2 - (\Delta x'^3)^2 &= \gamma^2(\Delta x^0 - \beta\Delta x^1)^2 - \gamma^2(\Delta x^1 - \beta\Delta x^0)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 \\ &= (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2\end{aligned}$$

つまり、$\Delta s^2 \equiv (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2$ という量はローレンツ変換に対して不変なのです。この二点の幅を無限小にとると、$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$ がローレンツ不変であるということになります。ここで、次のような下付き添字の量を定義します。

$$dx_0 \equiv -dx^0\ ,\ dx_1 \equiv dx^1\ ,\ dx_2 \equiv dx^2\ ,\ dx_3 \equiv dx^3 \tag{76}$$

すると、次のように書けます。

$$-ds^2 = dx_0 dx^0 + dx_1 dx^1 + dx_2 dx^2 + dx_3 dx^3 = dx_{\mu} dx^{\mu} \quad \therefore ds^2 = -dx_{\mu} dx^{\mu} \tag{77}$$

ここで、ミンコフスキー計量と呼ばれる量 $\eta_{\mu\nu}$ を次の式のように導入します。ただし、添字の入れ替えに関して対称である、すなわち $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$ を要請します。

$$-ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{00} dx^0 dx^0 + \eta_{01} dx^0 dx^1 + \eta_{10} dx^1 dx^0 + \eta_{11} dx^1 dx^1 + \cdots \tag{78}$$

(78) と $-ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ を比較することで、$\eta_{\mu\nu}$ が以下のように与えられるとわかります。

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{79}$$

この $\eta_{\mu\nu}$ は、物理量の添字の下げるのに使用することができます。実際、

$$\eta_{\mu\nu} dx^{\nu} = dx_{\mu}$$

となっていることが確認できます（$\mu$ が 0,1,2,3 それぞれの値をとる場合を考えてみてください）。より一般に、上付き添字を持つ物理量 $b^{\mu}$ があった場合、その下付き添字バージョンを

$$b_{\mu} \equiv \eta_{\mu\nu} b^{\nu} \tag{80}$$

で定めます。ここで、$\eta_{\mu\nu}$ からなる行列の逆行列を考えましょう。これを $\eta^{\mu\nu}$ と書くことにすると、以下のように成分が与えられます。

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{81}$$

これは確かに逆行列になっており、以下の式を満たします。

$$\eta^{\nu\rho}\eta_{\rho\mu} = \delta^{\nu}_{\mu} \tag{82}$$

この $\eta^{\mu\nu}$ を用いると、今度は物理量の添字を上げることができます。

$$\eta^{\mu\nu} b_{\nu} = \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} b^{\rho} = \delta^{\mu}_{\rho} b^{\rho} = b^{\mu} \quad \therefore \eta^{\mu\nu} b_{\nu} = b^{\mu} \tag{83}$$

ここまでで、上付きの添字を持つ量や下付きの添字を持つ量、添字が一つである量や二つである量など、様々な量が登場しました。ここで、それらの性質についてまとめておくことにします。

・スカラー（0 階のテンソル)

ある物理量がスカラーであるとは、その量は添字を一つも持たないということです。そして、Lorentz 変換に対して不変です（下式)。

$$A' = A$$

例えば、先程登場した $ds^2$ はローレンツスカラーになっています。

・反変ベクトル (一階の反変テンソル)

ある物理量が反変ベクトルであるとき、その成分を上付き添字一つで表すことができます。そして、Lorentz 変換に対して下式のように変換されます。例えば、$x^{\mu}$ はベクトルの成分になっています。

$$A'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}$$

・共変ベクトル (一階の共変テンソル)

ある物理量が共変ベクトルであるとき、その成分を下付き添字一つで表すことができます。反変ベクトルとの間には、ミンコフスキー計量を用いて次のような関係があります。

$$A^{\mu} = \eta^{\mu\nu} A_{\nu}\ ,\ A_{\mu} = \eta_{\mu\nu} A^{\nu}$$

また、Lorentz 変換に対しては、$L$ の逆行列 $\bar{L}$ を用いて次のように与えられます。

$$A'_{\mu} = \bar{L}^{\nu}{}_{\mu} A_{\nu}$$

・二階の反変テンソル

ある物理量が二階の反変テンソルであるとき、その成分を上付き添字二つで表すことができます。そして、Lorentz 変換に対して下式のように変換されます。

$$A'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\rho} L^{\nu}{}_{\sigma} A^{\rho\sigma}$$

・二階の共変テンソル

ある物理量が二階の共変テンソルであるとき、その成分を下付き添字二つで表すことができます。そして、Lorentz 変換に対して下式のように変換されます。

$$A'_{\mu\nu} = \bar{L}^{\rho}{}_{\mu} \bar{L}^{\sigma}{}_{\nu} A_{\rho\sigma}$$

・一階反変一階共変のテンソル

ある物理量が一階反変一階共変のテンソルであるとき、その成分を上付き添字一つ、下付き添字一つで表すことができます。そして、他の二階のテンソルとの間には次のような関係があります。

$$A^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} A^{\nu}{}_{\rho} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} A_{\rho\sigma}\ ,\ A_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} A^{\rho}{}_{\nu} = \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} A^{\rho\sigma}$$

また、Lorentz 変換に対して下式のように変換されます。

$$A'^{\mu}{}_{\nu} = L^{\mu}{}_{\rho}\bar{L}^{\sigma}{}_{\nu}A^{\rho}{}_{\sigma}$$

三階以上のテンソルについても同様にして考えることができますが、ここでは省略します。

ここで、二つのベクトルに対して内積を定義しておきます。

$$a \cdot b = a^{\mu}b_{\mu} = \eta_{\mu\nu}a^{\mu}b^{\nu} \tag{84}$$

ところで、何故こうしたテンソル量というものを考えるのでしょうか。実は、テンソルを用いて構成された方程式は、扱いが簡単になるのです。例えば、二つの二階テンソルに関して、S 系で次のような関係があるとしましょう。

$$A^{\mu\nu} = B^{\mu\nu}$$

このとき、S' 系の物理量 $A'$，$B'$ に関してはどのような式が成り立つのでしょうか？上の式とテンソルの変換則より、

$$A'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\rho}L^{\nu}{}_{\sigma}A^{\rho\sigma} = L^{\mu}{}_{\rho}L^{\nu}{}_{\sigma}B^{\rho\sigma} = B'^{\mu\nu} \quad \therefore A'^{\mu\nu} = B'^{\mu\nu}$$

このように、S' 系でも全く同じ形の方程式が成立するのです!我々は仮定 1、すなわち相対性原理を要請していますが、テンソルで方程式を書き記すことは、この原理ととても相性が良いのです。これを踏まえて、次節以降では、Newton の運動方程式及び Maxwell 方程式を相対性原理を満たすテンソル方程式の形に変形していきます。

## 3.5 Lorentz 共変な運動方程式

Newton の運動方程式 $m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}$ を Lorentz 共変な形に直しましょう。ここで、ローレンツスカラーである $ds^2$ を考えます。等速運動をしている対象粒子と共に動く慣性系 S' を考えましょう。この慣性系では、粒子は静止して見えるから、$dx'^1 = dx'^2 = dx'^3 = 0$ です。よって、次式が成立します。

$$ds^2 = c^2dt'^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{85}$$

この $dt'$ を特に $d\tau$ と書き、$\tau$ を（対象粒子の）固有時と呼びます。この量は、その定め方から明らかなように、粒子と共に動く慣性系特有のものであるため、観測者の慣性系が移り変わったとしても、$\tau$ は変化しません。従って、$\tau$ はローレンツスカラーです。(85) 式は、次のようにも変形できます。

$$d\tau^2 = dt^2\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right] \quad \therefore d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2} = \frac{dt}{\gamma} \tag{86}$$

このスカラー量を用いると、次のような量は反変ベクトルとして振る舞います（反変ベクトル $dx^{\mu}$ にスカラーを掛けたり割ったりしているだけなので)。ただし、$m$ は粒子の質量です。

$$\begin{aligned} u^{\mu} &\equiv \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t} = \gamma(c,\vec{v}) \\ p^{\mu} &\equiv mu^{\mu} = m\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = m\gamma(c,\vec{v}) \end{aligned} \tag{87}$$

これらをそれぞれ四元速度、四元運動量と呼びます。四元運動量の内積に関して、次式が成り立ちます。

$$p^{\mu}p_{\mu} = -m^2c^2\gamma^2(1-(\vec{v}/c)^2) = -m^2c^2 \tag{88}$$

また、粒子の全エネルギー及び運動量ベクトルを次のように定義します。この定義の妥当性は、後に判明します。

$$E \equiv m\gamma c^2\ ,\ \vec{p} \equiv m\gamma\vec{v} \tag{89}$$

$v$ が $c$ に比べて十分小さい時には、ここでの運動量の定義は Newton 力学でのそれと一致することに注意してください。(89) より、四元運動量は次のようにも書けます。

$$p^{\mu} = (E/c, \vec{p}) \tag{90}$$

さらに、四元力と呼ばれる反変ベクトル $f^\mu$ を定義します。

$$f^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{91}$$

今、粒子に働く力が $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$ という関係を満たすとしましょう。$v/c$ が十分小さければ、この式は Newton の運動方程式に帰するので、この関係は、元来の Newton 力学での運動方程式を特殊相対論的な枠組みに当てはまるように修正したものと見ることができます。(91) の空間成分をまず考えましょう。

$$f^i = \frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t} = \gamma F^i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{92}$$

すなわち、$f^\mu$ の空間成分は粒子にかかる力を $\gamma$ 倍したものということになります。続いて、第 0 成分（時間成分）について考えます。(88) 式を両辺 $\tau$ で微分すると、

$$0 = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau}p_\mu + p^\mu\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = 2p_\mu\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 2f^\mu p_\mu \quad \therefore 0 = \eta_{\mu\nu}f^\nu p^\nu = -f^0\frac{E}{c} + \gamma\vec{F}\cdot\vec{p}$$

(89) を用いて、

$$f^0 = \frac{c\gamma}{m\gamma c^2}\vec{F}\cdot m\gamma\vec{v} = \frac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v} \tag{93}$$

これで $f^\mu$ の成分が定まりました。まとめると、

$$f^\mu = \left(\frac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v}\ ,\ \gamma\vec{F}\right) \tag{94}$$

です。見方を変えると、(94) の右辺のような成分は、全体として反変ベクトルとして振る舞う、ということです。それでは改めてテンソル方程式 (91) を見て見ましょう。この空間成分は、

$$\gamma\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}\tau} \quad \therefore \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{95}$$

ですから、特殊相対論における運動方程式を表しています。また、時間成分に関しては、

$$\frac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\gamma}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \quad \therefore \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\vec{v} \tag{96}$$

となります。つまり、エネルギーの時間変化率が力のする仕事率に等しいことを表しており、これは Newton 力学の頃から目にしてきた自然な結果です。つまり、(94) のような成分を持つ四元力を用いて、

$$f^\mu = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

とした式が粒子の運動を表しており、従ってこれが我々が欲してきたテンソル表記の運動方程式である、ということです。

### 3.6 Lorentz 共変な Maxwell 方程式

前節に引き続き、Maxwell 方程式の Lorentz 共変な形を考えましょう。

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{E} = -\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathrm{t}} \\ \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \\ \nabla\cdot\mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \epsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathrm{t}} \end{cases} \tag{97}$$

1 章で述べたように、Maxwell 方程式自体は変更を受けません。しかし、相対性原理の要請から、Maxwell 方程式は Lorentz 共変でなければいけません。つまり、(97) は任意の慣性系で同じ形の式が成立する必要があります。Maxwell 方程式が相対性原理を満たすよう、物理量の変換性を仮定していきます。

まず、その準備として、スカラーポテンシャル及びベクトルポテンシャルについて触れておきます。ベクトル解析の公式に、

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0 \quad (\mathbf{F}\text{ は任意のベクトル}) \tag{98}$$

$$\nabla\times(\nabla f)=0 \quad (f\text{ は任意のスカラー}) \tag{99}$$

というものがありました。そして、(98)(99) に関して、次の関係が成り立つことが知られています。

$$\text{「ベクトル場 }\mathbf{G}\text{ について、}\nabla\cdot\mathbf{G}=0\Leftrightarrow\text{ あるベクトル場 }\mathbf{F}\text{ が存在して }\mathbf{G}=\nabla\times\mathbf{F}\text{ とできる。」} \tag{100}$$

$$\text{「ベクトル場 }\mathbf{H}\text{ について、}\nabla\times\mathbf{H}=0\Leftrightarrow\text{ あるスカラー場 }f\text{ が存在して }\mathbf{H}=\nabla f\text{ とできる。」} \tag{101}$$

すると、(100) 及び Maxwell 方程式の一つ $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ から、あるベクトル $\mathbf{A}=(A_x.A_y,A_z)$ を用いて

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A} \tag{102}$$

と置くことができ、この時 $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ は自動的に満たされることになります。この $\mathbf{A}$ をベクトルポテンシャルと呼びます。また、(102) を Maxwell 方程式の一つ $\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ に代入すれば、

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{A})=-\nabla\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad \therefore\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0 \tag{103}$$

となりますから、(101) より、スカラー量 $\phi$ を用いて次のようにおくことができ、この時 $\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ も自動的に成立することになります。この $\phi$ をスカラーポテンシャルと呼びます。

$$\mathbf{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{104}$$

それでは物理量の変換性を仮定していきましょう。先ほど導入したスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルから成る組 $(\phi,cA_x,cA_y,cA_z)$ が反変ベクトルとして変換されるとし、これを $A^\mu$ と書くことにします。すなわち、

$$A'^\mu=L^\mu{}_\nu A^\nu \quad (A^0=\phi,A^1=cA_x,A^2=cA_y,j^3=cA_z) \tag{105}$$

と変換されるとします。次に、$(c\rho,j_x,j_y,j_z)$ が反変ベクトルであるとし、これを $j^\mu$ と書くことにします。すなわち、

$$j'^\mu=L^\mu{}_\nu j^\nu \quad (j^0=c\rho,j^1=j_x,j^2=j_y,j^3=j_z) \tag{106}$$

と変換されるとします。ここで、次のように二階の共変テンソル $F_{\mu\nu}$ を定義します。

$$F_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \tag{107}$$

ここで、 $\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ であり、一階の共変ベクトルとして振る舞います。このように定義されたテンソルの成分はどのようなものなのでしょうか？具体的に計算してみましょう。まず、(107) の式の形から直ちに

$$F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu} \tag{108}$$

つまり、$F$ は反対称テンソルであると言うことですから、6 成分について考えれば十分です。次に、$F_{10}$ について考えます。$A_\mu=(-\phi,cA_x,cA_y,cA_z)$ であることに注意して、

$$F_{10}=-\frac{\partial\phi}{\partial x}-c\frac{\partial A_x}{\partial(ct)}=E_x \tag{109}$$

ここで、(104) 式を用いました。同様に、$F_{20}=E_y$ , $F_{30}=E_z$ であることが示されます。その次に、$F_{12}$ を考えましょう。

$$F_{12}=c\frac{\partial A_y}{\partial x}-c\frac{\partial A_x}{\partial y}=cB_z \tag{110}$$

ここで、(102) 式を用いました。同様に、$F_{13}=-cB_y$ , $F_{23}=cB_x$ です。よって、$F$ の成分は、反対称性に注意して、

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&-E_x&-E_y&-E_z\\E_x&0&cB_z&-cB_y\\E_y&-cB_z&0&cB_x\\E_z&cB_y&-cB_x&0\end{pmatrix} \tag{111}$$

となり、電場や磁場の成分を含んでいるとわかります。この $F_{\mu\nu}$ を、電磁テンソルと呼びます。これは二階のテンソルですから、Lorentz 変換に対する電場や磁場の変換則を与えると見ることもできます。また、添字を上げてやれば、次のような二階の反変テンソルを得ることもできます。

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ -E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ -E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix} \tag{112}$$

(106) と (111) で、Maxwell 方程式に登場する物理変数全てが何かしらのテンソルの成分となっていることを見ました。これらのテンソルを用いて Lorentz 共変な Maxwell 方程式を導きます。

まず、次の式を考えます。

$$\begin{gathered} 0 = \partial_\lambda(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \partial_\mu(\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu) + \partial_\nu(\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda) \\ \therefore\ \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \ \ (\because (36)) \end{gathered} \tag{113}$$

この (113) 式が示すことを考えましょう。添字が三つある方程式ですから、$4^3 = 64$ 個の方程式を表していることになります。しかし、$F$ の反対称性から、$\mu, \nu, \lambda$ のどれか一つでも同じものが含まれていると、(113) 式は $0 = 0$ となり、特に意味を持ちません。したがって、添字全てが異なる値を取る場合のみ ($4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ 個) を考えることになります。さらに、(113) 式の添字に関する明かな対称性から、$24/3! = 4$ 個 だけが意味を持つとわかります。結局、(113) は 4 つの方程式を表しているに過ぎません。それらを一つずつ見ていきましょう。まず、$\mu = 1, \nu = 2, \lambda = 3$ の時、(113) は、(111) を用いて

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{114}$$

となり、磁場に関する Gauss の法則を表していることになります。次に、$\mu = 0, \nu = 1, \lambda = 2$ の時を考えると、

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)_z = 0 \tag{115}$$

となります。$\mu = 0, \nu = 1, \lambda = 3$ や $\mu = 0, \nu = 2, \lambda = 3$ についても同様に計算すると、

$$\left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)_y = 0\ ,\ \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)_x = 0 \tag{116}$$

を得ますから、(115)(116) 合わせて Farady の電磁誘導の法則となっていることがわかります。以上の計算から、テンソル方程式

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \tag{117}$$

は、Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0\ ,\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

と同等であるとわかります。

残った Maxwell 方程式に対応するテンソル方程式も考えましょう。結論から言ってしまえば、それは以下の式で与えられます。

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c\epsilon_0} j^\mu \tag{118}$$

このテンソル方程式は 4 本の式を表しています。まず、$\mu = 0$ の時、(112) より (118) は、

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{c\epsilon_0} \cdot c\rho \quad \therefore \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{119}$$

となり、電場の Gauss の法則と一致します。次に、$\mu = 1$ の時、

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + c\frac{\partial B_z}{\partial y} - c\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c\epsilon_0} j_x \quad \therefore \left(\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)_x = 0 \tag{120}$$

となります。同様に、$\mu = 2$ や $\mu = 3$ を考えると、

$$\left(\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)_y = 0 \ , \ \left(\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)_z = 0 \tag{121}$$

を得ますから、(120)(121) 合わせて Ampère-Maxwell の法則が得られたことになります。以上の計算から、テンソル方程式 (118) は Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \ , \ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

と同等であることがわかります。

以上の議論より、Maxwell 方程式 (97) は次のようなテンソル方程式と等価であり、これが我々の欲していたテンソル表記の Maxwell 方程式ということです。

$$\begin{cases} \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \\ \partial_\nu F^{\mu\nu} = \dfrac{1}{c\epsilon_0} j^\mu \end{cases} \tag{122}$$

逆に言えば、(122) は明らかに Lorentz 共変、すなわち相対性原理を満たしているので、それと等価な (97) の Maxwell 方程式も相対性原理を満たしていた、ということです (ちなみに (97) が相対性原理を満たしていることは、(122) を導出しなくとも、(97) に登場する物理量を変換則に従って書き換えることでもわかります)。つまり、(105) や (106) といった仮定が妥当であったとわかります。

## 3.7 参考文献

・Zwiebach, B. (2013). *A first course in string theory* (『初級講座 弦理論 』(樺沢宇紀 訳)). 丸善プラネット. (Original work published 2009)

・風間洋一著『相対性理論入門講義』. 培風館.1997 年