# 古典弦の運動

Physics Lab. 2021 数理物理学班

岡本 悠太郎　清水 陽喜

この PDF は、東京大学理学部物理学科の学生有志による企画 Physics Lab. 2021 の、数理物理学班の紹介記事である古典弦の運動（§1〜）、古典弦の運動方程式の解（§5〜）の解説記事として作成されました。

## 0　記法など

特に断らない限り、$\dot{}$（上付きドット）$\equiv \partial_\tau$, $'$（ダッシュ）$\equiv \partial_\sigma$ とします。また Lorentz ベクトル $A^\mu, B^\mu$ について、$A \cdot B \equiv A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu,\ A^2 \equiv A_\mu A^\mu$ とします。$(\vec{A})^2 \equiv \vec{A} \cdot \vec{A} = \left|\vec{A}\right|^2$ は空間内の内積です。Lorentz 座標系の計量は $(-,+,+,\dots,+)$ としています。

## 1　古典弦の作用

弦の運動を考えるため、粒子の運動の考察に使ったように「作用」を考えます。粒子においては作用はその世界線の固有長さであったことから、弦ではそれは世界面（0 次元の粒子が Minkowski 時空に描くのが世界線なら、1 次元の弦が描くのは世界面）の「固有面積」にならないかと類推してみます。では固有面積はどんな表式でしょうか？いきなり Minkowski 時空で考えるのは難しいのでまずはよく知っている Euclid 空間で考えてみます。

世界面は 2 次元なので、2 つのパラメータ $\xi^1$ と $\xi^2$ で記述できます。このアナロジーとして、まず 2 次元のパラメータ空間から Euclid 空間（**標的空間**）内の曲面への写像を考えます。具体的にはパラメータ空間内の点 $\xi^1, \xi^2$ に対応する標的空間内の曲面上の点を $\vec{X}(\xi^1,\xi^2) = \left(X^1(\xi^1,\xi^2), X^2(\xi^1,\xi^2), \dots, X^d(\xi^1,\xi^2)\right)$ とします。パラメータ空間における点 $A_1(\xi^1,\xi^2),\ A_2(\xi^1+d\xi^1,\xi^2),\ A_3(\xi^1,\xi^2+d\xi^2),\ A_4(\xi^1+d\xi^1,\xi^2+d\xi^2)$ を繋いだ四角形に囲まれた領域はパラメータ空間上の微小面積です。この微小部分を $\vec{X}$ で標的空間に写したものは各辺が微小でなので平行四辺形のようになると考えられます。この平行四辺形の面積を標的空間における曲面の微小面積とし、$dA$ と表します。パラメータ空間の点 $A_i$ が標的空間の点 $B_i$ に写像されるとします。このとき $\overrightarrow{B_1B_2} = d\vec{v}_1, \overrightarrow{B_1B_3} = d\vec{v}_2$ と書くと、この 2 つのベクトルのなす角を $\theta$ として

$$dA = |d\vec{v}_1||d\vec{v}_2|\sin\theta \tag{1}$$

ただし $d\vec{v}_1, d\vec{v}_2$ はパラメータ空間の微小量で表すと以下の通りです。

$$d\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} d\xi^1 \tag{2}$$

$$d\vec{v}_2 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} d\xi^2 \tag{3}$$

よって (1) は以下のように書くことができます。

$$
\begin{aligned}
dA &= \left|\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} d\xi^1\right| \left|\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} d\xi^2\right| \sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= \left|\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} d\xi^1\right| \left|\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} d\xi^2\right| \sqrt{1-\left(\frac{\dfrac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1}\cdot\dfrac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2}}{\left|\dfrac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1}\right|\left|\dfrac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2}\right|}\right)^2} \\
&= d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left|\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1}\right|^2 \left|\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2}\right|^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1}\cdot\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2}\right)^2} \quad (\text{Euclid 空間})
\end{aligned} \tag{4}
$$

こうして Euclid 空間が標的空間である場合の微小面積の表式が求まりました。Minkowski 時空は、計量の時間成分が $-1$ になっていること以外は Euclid 空間と同じです。空間ベクトル $\vec{X}$ を Lorentz ベクトル $X^\mu$ に、Euclid 空間での内積「$\cdot$」を相対論的なスカラー積にそれぞれ読み替えることで Minkowski 時空が標的空間である場合の微小面積も似た形の式で表せると予想できます。しかし実は、そのように読み替えると (4) の平方根の中身は常に非正になるのです。言い換えると、

$$
dA = d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^1}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \xi^1}\right)^2\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right)^2} \quad (\text{Minkowski 時空}) \tag{5}
$$

の平方根の中身は常に非負となります。これを Minkowski 時空における微小面積要素と定めます。

---

**命題 1.** 世界面上の任意の点 $P$ において

$$
\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^1}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \xi^1}\right)^2\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right)^2 \geq 0.
$$

**証明.** Lorentz ベクトル $x^\mu$ について、

$$
\begin{aligned}
x^2 < 0 &\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \text{ は timelike} \\
x^2 = 0 &\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \text{ は null} \\
x^2 > 0 &\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \text{ は spacelike}
\end{aligned}
$$

と定義します。Minkowski 時空内で、timelike な方向には光速より遅い速さで、null な方向には光速でそれぞれ進むことができ、spacelike な方向には進めません（光速を超える必要があるため）。timelike か null か spacelike かは Lorentz 不変であり、ある慣性系で 2 点が同時刻に存在すれば、その 2 点を結ぶベクトルは spacelike です。

点 $P$ は弦上の物理的な点なので、その速さは光速以下です。また点 $P$ が一瞬後にどの場所に動いているかは物理的には決まらず、人間がパラメータ付けを行って決めるものであることに注意してください（開弦の端点は例外）。つまり、世界面上で点 $P$ における接ベクトルを引き、その方向に点 $P$ が動いたということにしたときに速さが光速を超えなければ問題ないし、逆に物理的にそのような方向は必ず存在しなければなりません。また、点 $P$ が存在する時刻において点 $P$ はその時刻の弦の一部なので、当然点 $P$ を通るその時刻の弦

の接ベクトル（spacelike）が引けます。

i) 点 $P$ が光速未満で運動しうるとき

点 $P$ における世界面の接ベクトル $v^\mu$ の集合を考えます。

$$v^\mu(\lambda) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^1} + \lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^2}, \quad \lambda \in (-\infty, \infty)$$

$\partial X^\mu/\partial\xi^1, \partial X^\mu/\partial\xi^2$ は線形独立なので、$v^\mu(\lambda)$ は（$\lambda \to \infty$ で $\partial X^\mu/\partial\xi^2$ も含むことを考えれば）点 $P$ における、2 次元世界面上の接ベクトルすべてを網羅しています。点 $P$ が光速未満で運動できる方向の接ベクトルは timelike であり、また点 $P$ における spacelike な接ベクトルも存在します。$v^\mu(\lambda)$ が timelike なのか spacelike なのかを決めるために自乗を計算してみます。

$$v^2(\lambda) = v^\mu(\lambda)v_\mu(\lambda) = \lambda^2\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^1}\right) + 2\lambda\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^1}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right) + \left(\frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right)^2$$

左辺が正なら spacelike、負なら timelike（0 なら null）ですが、いま点 $P$ における接ベクトルは timelike なものも spacelike なものも存在するはずなので、$\lambda$ を変えることで正負どちらにもなる必要があります。したがって、$v^2(\lambda) = 0$ という $\lambda$ についての 2 次方程式の判別式が正でなければならないので

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^1}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \xi^1}\right)^2\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right)^2 > 0$$

が成り立ちます。

ii) 点 $P$ が光速でしか運動できないとき

点 $P$ が光速で運動することになる方向を $v_c^\mu$ とおくとこれは null ベクトルです。仮に $v_c^\mu$ と線形独立な接ベクトルでかつ null ベクトルであるもの $u^\mu$ が存在すると仮定します。すると、弦の接ベクトルは必ず spacelike なので、ある実数 $\lambda_0$ が存在して $v_c^\mu + \lambda_0 u^\mu$ が spacelike、すなわち

$$(v_c + \lambda_0 u)^2 > 0$$

とならなければなりません。$(v_c)^2 = 0, (u)^2 = 0$ であるからこれは

$$\lambda_0 v_c^\mu \cdot u > 0$$

を意味します。このとき $v_c^\mu - \lambda_0 u^\mu$ というベクトルを考えると、これは接ベクトルの線形結合なのでやはり接ベクトルで、

$$(v_c - \lambda_0 u)^2 = 0 - \lambda_0 v_c \cdot u + 0 < 0$$

となるので $v_c^\mu - \lambda_0 u^\mu$ は点 $P$ における timelike な接ベクトルです。その方向に動くということにすれば点 $P$ は光速未満で運動できることになりますが、これは ii) の仮定に矛盾します。よって null な接ベクトルは $v_c^\mu$ に平行なもののみであり、null ベクトル以外の方向の接ベクトルは spacelike です。ここで i) と同じ $v^\mu(\lambda)$ を考えると、$v^\mu(\lambda) = v_c^\mu$ となる $\lambda$ においては $v^2(\lambda) = 0$、それ以外の $\lambda$ では $v^2(\lambda) > 0$ となるので $v^2(\lambda) = 0$ は単独の解を持ち、判別式は 0 に等しくなります。つまり

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^1}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \xi^1}\right)^2\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right)^2 = 0$$

が成り立ちます。
i),ii) より

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^1}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right)^2-\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^1}\right)^2\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right)^2\geq 0$$

が求まりました。 □

なお、ii) に相当する場合として開弦の端点 (§5.1)、閉弦の尖点 (§5.3) が挙げられます。

---

よって、世界面の面積は

$$A=\int dA=\int d\xi^1 d\xi^2\sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^1}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right)^2-\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^1}\right)^2\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right)^2} \tag{6}$$

と定まりました。これで作用は求められたようなものですが、少し工夫が要ります。それは物理量の次元の問題です。長さを $L$、質量を $M$、時間を $T$ とするとこの固有面積は $M^2$ ですが、作用の次元は $ML^2T^{-1}$ です。ひとまず固有面積に力を速度で割った量を掛ければ解決するので、$A$ に $-T_0/c$ をかけたものを作用とすれば良いことになります。つまり

$$S=-\frac{T_0}{c}\int d\xi^1 d\xi^2\sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^1}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right)^2-\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^1}\right)^2\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right)^2} \tag{南部-後藤作用}$$

これを **南部-後藤作用** と呼びます。ここで、$c$ は光速度ですが、この段階では $T_0$ の方はただの力の単位の定数だと思ってください。簡略化した系についての考察からこれが弦の張力にあたるものだと確認できます（§4 で確認します)。

## 2　パラメータ付け替え不変性

南部-後藤作用を変分して実際に運動方程式を求める前に、作用の重要な性質について述べます。作用は微小面積のパラメータによる積分として表現されることを見ましたが、これがパラメータ付けによらない（パラメータの付け方を変更しても作用が変化しない）という性質がのちの議論のために非常に重要です。なぜなら今後導出される運動方程式などは適切なパラメータづけ、例えば「光錐ゲージ」と呼ばれるものなど、を採用することで非常に簡単になるからです。作用がパラメータ付けによらないということは、好きなパラメータで物理を記述できるということです。逆に言えばこれが示せないと便利なパラメータ付けで議論を進めることができません。「パラメータ付けの変更」は数式的には下のように書けます。

$$(\xi^1,\xi^2)\rightarrow(\tilde{\xi}^1(\xi^1,\xi^2),\tilde{\xi}^2(\xi^1,\xi^2)) \tag{7}$$

ここで、$(i,j)$ 成分が以下のように表される行列 $M,\tilde{M}$ を導入します。これはこの変換および逆変換のヤコビ行列です。

$$M_{ij}=\frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^j} \tag{8}$$

$$\tilde{M}_{ij}=\frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j} \tag{9}$$

ここで

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial \xi^j} = \delta^i_j \tag{10}$$

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^p}\frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^j} = \delta^i_j \tag{11}$$

となることから

$$M\tilde{M} = 1 \tag{12}$$

となり、$\tilde{M}$ は $M$ の逆行列であることが分かります。なお最後の 1 は行列としての 1、単位行列です。また作用を次のように書くとします。

$$S = \int \mathcal{L}\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^1}, \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^2}\right) d\xi^1 d\xi^2 \tag{13}$$

ここで $\mathcal{L}$ は上で導出した南部-後藤作用の積分記号の中（$-T_0/c$ の部分を含む）を 1 つの記号で表したもので、ラグランジアン密度です。いまこの作用にパラメータ変換を施すと、積分の変数変換の定理から、上のヤコビ行列の行列式を用いて

$$d\xi^1 d\xi^2 = |\det M|\, d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \tag{14}$$

と表せます。ところで、世界面の接ベクトル $dx^\mu$ は $X^\mu$ のパラメータの微小変化による変化量なので、

$$dx^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^2} d\xi^2 \tag{15}$$

と書けます。よって、この微小なベクトル $dx^\mu$ の自身とのスカラー積（つまり差が $dx^\mu$ で表される Minkowski 時空内の 2 点間の不変距離）を $-ds^2$ とすれば

$$-ds^2 = dx \cdot dx = \frac{\partial X}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j \tag{16}$$

となります。ここで添字 $i$ と $j$ は 1 か 2 です。$(i, j)$ 成分が $\dfrac{\partial X}{\partial \xi^i}\dfrac{\partial X}{\partial \xi^j}$ である行列 $g$ を考える（これは面上に誘導された計量と呼ばれます）と

$$-ds^2 = g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j \tag{17}$$

となります。ここで $g_{ij}$ の行列式を取ると

$$g \equiv \det g_{ij} = \left(\frac{\partial X}{\partial \xi^1}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right)^2 \tag{18}$$

が成り立ちます。これは南部-後藤作用の被積分関数のルートの中身の $-1$ 倍です。よって $\mathcal{L} = \sqrt{-g}$ なので、(13) を

$$S = \int \sqrt{-g}\, d\xi^1 d\xi^2 \tag{19}$$

と書き換えられることが分かります。さて、不変距離 $ds^2$ は物理的なもので、人間が勝手に行うパラメータ付けにはよらないはずなので、以下の式が成り立ちます。

$$-ds^2 = g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j = \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi}^p d\tilde{\xi}^q \tag{20}$$

この式はさらにこのように書き直せます。

$$\tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi})\frac{\partial\tilde{\xi}^p}{\partial\xi^i}\frac{\partial\tilde{\xi}^q}{\partial\xi^j}d\xi^i d\xi^j = g_{ij}(\xi)d\xi^i d\xi^j \tag{21}$$

共通している $d\xi^i d\xi^j$ を除いて、さらに $\tilde{M}$ を用いると

$$g_{ij}(\xi) = \tilde{g}_{pq}\tilde{M}_{pi}\tilde{M}_{qj} = (\tilde{M}^{\mathrm{T}})_{ip}\tilde{g}_{pq}\tilde{M}_{qj} \tag{22}$$

となります。なお $^{\mathrm{T}}$ は転置行列を表しています。この行列式を取り、$\tilde{g} \equiv \det \tilde{g}_{pq}$ とすると

$$g = (\det \tilde{M}^{\mathrm{T}})\,\tilde{g}\,(\det \tilde{M}) = \tilde{g}\,(\det \tilde{M})^2 \tag{23}$$

を得ます（転置しても行列式は変わらないことに注意）。$g < 0, \tilde{g} < 0$ より

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\tilde{g}}|\det \tilde{M}| = \sqrt{-\tilde{g}}\frac{1}{|\det M|} \tag{24}$$

となります。2 つめの等号は $M$ が $\tilde{M}$ の逆行列であること (12) から従います、よって、(19)(24)(14) より

$$S = \int \sqrt{-g}\,d\xi^1 d\xi^2 = \int \sqrt{-\tilde{g}}\frac{1}{|\det M|}|\det M|\,d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 = \int \sqrt{-\tilde{g}}\,d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \tag{25}$$

となり、被積分関数と $d\xi^1 d\xi^2$ の変化が打ち消しあうので南部-後藤作用はパラメータ不変であることが分かります。

# 3 作用の変分と運動方程式

それでは作用を変分し、運動方程式を求めていきます。その前に、幾らか記号を整理します。まずこれまでパラメータを $(\xi^1, \xi^2)$ と書いていましたが、これを $(\sigma, \tau)$ とします。記法を変えただけで論理的な変化はもちろんありませんが、この変更には $\sigma$ の方を「空間方向のパラメータ」、$\tau$ のほうを「時間方向のパラメータ」のように扱うというイメージがあります。実際よく使われるパラメータ付けの一つの静的ゲージ（今後出てきます）では $\tau$ は時間 $t$（あるいは $X^0$）そのものです。弦の世界面上の座標 $X$ を、それぞれのパラメータで偏微分したものはよく使われるので、以下のように略記します。

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial\tau} \tag{26}$$

$$X^{\mu\prime} \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma} \tag{27}$$

すると南部-後藤作用は次のような表式になります。

$$S = -\frac{T_0}{c}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X}^\mu X'_\mu)^2 - (\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu)(X^{\mu\prime}X'_\mu)} \tag{28}$$

$$= -\frac{T_0}{c}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2} \tag{29}$$

2 行目の変形は、今後このように略記するという意味です。また、上で定義した「ラグランジアン密度」$\mathcal{L} = -(T_0/c)\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}$ を考え、以下のような量を導入します。

$$\mathcal{P}^\tau_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c}\frac{(\dot{X}\cdot X')X'_\mu - (X')^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}} \qquad (\tau\ \text{運動量密度})$$

$$\mathcal{P}^\sigma_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu\prime}} = -\frac{T_0}{c}\frac{(\dot{X}\cdot X')\dot{X}_\mu - (X')^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}} \qquad (\sigma\ \text{運動量密度})$$

これは「運動量密度」に対応する量です。古典力学で運動量がラグランジアンを座標の時間（パラメータ）微分によって微分して得られたことを思い出せば理解しやすいでしょう。作用の変分を考えます。

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta \int_{\tau_i}^{\tau_f}\int_0^{\sigma_0} \mathcal{L}\, d\tau d\sigma \\
&= \int_{\tau_i}^{\tau_f}\int_0^{\sigma_0} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}\delta\dot{X}^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu\prime}}\delta X^{\mu\prime}\right) d\tau d\sigma \\
&= \int_{\tau_i}^{\tau_f}\int_0^{\sigma_0} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}\frac{\partial \delta X^\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu\prime}}\frac{\partial \delta X^\mu}{\partial \tau}\right) d\tau d\sigma
\end{aligned} \tag{30}$$

さらに部分積分を行うと

$$\begin{aligned}
\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f}\int_0^{\sigma_0} &\left[\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}\delta X^\mu\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu\prime}}\delta X^\mu\right)\right] d\tau d\sigma \\
&- \int_{\tau_i}^{\tau_f}\int_0^{\sigma_0} \delta X \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu\prime}}\right) d\tau d\sigma
\end{aligned} \tag{31}$$

となります。ここで、古典力学において経路の端点で変分は 0 とおいたように、世界面の $\tau$ 方向の境界で変分を 0 にするような境界条件をとります。そうすると $\delta X^\mu(\tau_f,\sigma) = \delta X^\mu(\tau_i,\sigma) = 0$ となるので

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\delta X^\mu \mathcal{P}^\sigma_\mu\right]_0^{\sigma_1} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma\, \delta X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma}\right) \tag{32}$$

を得ます。$\partial_\tau \mathcal{P}^\tau_\mu + \partial_\sigma \mathcal{P}^\sigma_\mu$ は $\delta X^\mu$ の変化に関して定数ですが、これが 0 でない限り、$\sigma$ 方向に $\delta X$ の塩梅を変えてやれば、$\sigma$ についての積分は第 2 項だけにあるので第 1 項を変えずに第 2 項をいくらでも変えてしまえます。つまりあらゆる変分 $\delta X^\mu$ のもとで $\delta S$ が 0 になるためには

$$\frac{\partial \mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma} = 0 \qquad (\text{運動方程式})$$

が必要です。これが求めたい運動方程式です。かなり単純になったように見ますが実際には $\mathcal{P}^\tau_\mu$ と $\mathcal{P}^\sigma_\mu$ は複雑なので、ここから $X$ について解くのはまだ簡単ではありません。

また、第 2 項が 0 なら第 1 項も 0 でなければなりません。閉弦の場合は $\sigma = 0$ の点と $\sigma = \sigma_1$ の点は 1 周して一致する点なので明らかに 0 となります。しかし開弦の場合はそうではなく、ここから境界条件が導けます。第 1 項の和の縮約をあらわに書くと

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \big(&\delta X^0(\tau,\sigma_1)\mathcal{P}^\sigma_0(\tau,\sigma_1) - \delta X^0(\tau,0)\mathcal{P}^\sigma_0(\tau,0) \\
&+\delta X^1(\tau,\sigma_1)\mathcal{P}^\sigma_1(\tau,\sigma_1) - \delta X^1(\tau,0)\mathcal{P}^\sigma_1(\tau,0) \\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\
&+\delta X^d(\tau,\sigma_1)\mathcal{P}^\sigma_d(\tau,\sigma_1) - \delta X^d(\tau,0)\mathcal{P}^\sigma_d(\tau,0)\big)
\end{aligned} \tag{33}$$

で、各 $\delta X^\mu(\tau,\sigma_*)$ $(\mu\in\{0,\ldots,d\},\sigma_*\in\{0,\sigma_1\})$ は独立なのでそれぞれについて境界条件が必要です。各項について $\delta X^\mu(\tau,\sigma_*)=0$ となるか $\mathcal{P}^\sigma_\mu(\tau,\sigma_*)=0$ となるかの 2 通り考えられます。前者を取ったものは **Dirichlet 境界条件** と呼ばれ、弦の端点を固定して振動させることに対応します。

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial\tau}(\tau,\sigma_*)=0,\quad \mu\in\{1,\ldots,d\},\ \sigma_*\in\{0,\sigma_1\}$$

ただし，先ほど各項について 2 通り考えられると書きましたが、$\mu=0$ に関しては別で，Lorentz 座標系では $X^0=ct$ です。また、世界面内の開弦の端点の軌跡（世界線）は、$\sigma=\sigma_*$ で一定の曲線なので、その曲線上では必ず $\tau$ が変化します（でないと世界線が線ではなく点になってしまいます)。つまり、端点については $t$ が変化すると $\tau$ も変化するため、$\partial_\tau X^0\neq 0$ となります。よって $\mu=0$ には次の自由端点の境界条件が必ず課されることになります。

後者を取ったものは **自由端点の境界条件** と呼ばれます。

$$\mathcal{P}^\sigma_\mu(\tau,\sigma_*)=0,\quad \mu\in\{0,\ldots,d\},\ \sigma_*\in\{0,\sigma_1\}$$

この条件のもとでは、いうなれば相方が 0 になってくれているので、$\delta X^\mu(\tau,\sigma_*)$ は作用の変分が 0 になる限りでは自由に動けます。

# 4 静的な弦

この節では簡単な条件において弦の運動を考察してみましょう。ここでは一直線に引き伸ばされた静的な（わかりやすく言えば動かない）弦を考えます。ここで先ほど名前だけ出てきた「静的ゲージ」を用いて議論を簡単化します。すなわち $c\tau=X^0$ とするのです。相対論的な座標 $X^0$ は時刻 $t$ に光速 $c$ を掛けたものなので、これは $\tau$ として時刻をそのまま使うのと同じです。またここでは $\sigma$ については特別な取り方を考えません。単に弦の $\tau$ が一定の各部で、$\sigma$ を指定すれば弦の座標が 1 つに定まるような、そして $\sigma$ 一定の曲線が互いに交差しないようなもの、という程度の条件しか課さないことにします。このような単純な条件だと、弦の座標を次のように具体的に書けます。なお $X^1$ が引き伸ばされている方向の座標で、空間次元の数は $d$ としています。

$$X^0=ct,\ X^1(t,\sigma)=f(\sigma),\ X^\mu=0\,(\mu=2,3,...,d) \tag{34}$$

弦の端点の $X^1$ 座標を $0,a$ とするならば

$$f(0)=0,\ f(\sigma_1)=a \tag{35}$$

であり、また $f(\sigma)$ は $\sigma$ の単調増加関数です。このとき

$$\dot{X}^0=c,\ \dot{X}^\mu=0\,(\mu=1,2,....,d) \tag{36}$$

$$X^{0\prime}=0,\ X^{1\prime}=f'(\sigma),\ X^{\mu\prime}=0\,(\mu=2,3,....,d) \tag{37}$$

であり、作用は次のように書けます。

$$S=-\frac{T_0}{c}\int_{t_i}^{t_f}dt\int_0^{\sigma_1}d\sigma\,c\frac{df}{d\sigma}=-T_0\int_{t_i}^{t_f}dt\,(f(\sigma_1)-f(0))=\int_{t_i}^{t_f}dt\,(-T_0a) \tag{38}$$

いま静的な弦を考察しているので、「運動エネルギー」にあたるものはないと考えます。そうすると古典力学において $L = -V$ となったことを思い出すと、ポテンシャルエネルギー $V$ は

$$V = T_0 a \tag{39}$$

と書けます。これが示すところは、弦を引き伸ばすのには $T_0$ の力が必要であるということ、そして無限に短い弦はエネルギーを持たないということです。いわば $T_0$ は弦の張力なのです。相対論では質量はエネルギーと同一視されるので、弦の質量はすべて張力から発すると言えます。ここに次元合わせのために導入された $T_0$ という量に弦の張力という物理的意味が与えられたのです。

# 5 パラメータの取り方

## 5.1 静的ゲージでの $\sigma$ の取り方

南部-後藤作用がパラメータの取り方の取り方に依らないことは分かりました。しかし、実際に運動方程式を解くには、具体的なパラメータの取り方を考える必要があります。うまいパラメータの取り方をこれから見ていきましょう。

2 つのパラメータ $\tau, \sigma$ のうち、$\tau$ については $\tau = t$ とします。このような $\tau$ の選び方を **静的ゲージ** と呼びます。このとき世界面上での $\tau$ 一定の曲線は時刻 $t$ における世界面の断面、つまり時刻 $t$ における弦を表します。

続いて $\sigma$ の取り方を見ていきましょう。$t = 0$ においてとりあえず弦を $\sigma$ でパラメータ付けできたと想定します。このとき微小時間後の $t = \Delta t$ における $\sigma$ のパラメータ付けを次のようにしてみます。

まず **弦面** と呼ばれる、全時刻にわたる弦の空間内での軌跡（世界面は Minkowski 時空に弦が描く面で、弦面とは別物）を考えます。さらに $t = 0$ における弦の上の、$\sigma = \sigma_0$ で指定される点を通って、弦に直交する直線を考え、その直線と、$t = \Delta t$ における弦との交点を $t = \Delta t$ における弦の $\sigma = \sigma_0$ で指定される点と定義します。これをすべての $\sigma$ にわたって行うと、$t = \Delta t$ における弦を $\sigma$ でパラメータ付けできることになります（図 1）。これを繰り返せば全時刻の弦を $\sigma$ パラメータ付けできることになり、世界面のパラメータ付けが完了します。

ここで気付いた人もいるかもしれません。この方法は閉弦では問題なく行えますが、開弦の場合には注意が必要です。開弦の端点は物理的に定まっているので、端点に同じ $\sigma$ の値が割り当てられる必要があります。しかしその保証があるのでしょうか。

実は、南部-後藤作用から、開弦の端点は弦に対して垂直に運動することがわかるのです。具体的に見ていきましょう。南部-後藤作用のラグランジアン密度から得られる $\sigma$ 運動量密度は

$$\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}_{\mu} - (\dot{X})^2 X'_{\mu}}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}$$

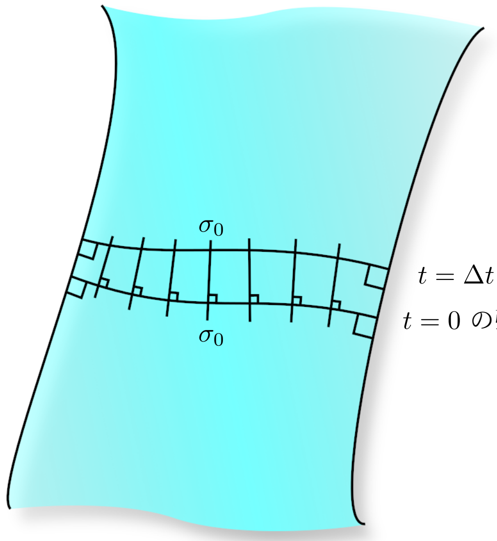


**図 1. 開弦の弦面における $\sigma$ パラメータ付け**

という表式でした。また境界条件から、端点では $\mathcal{P}^{\sigma}_0 = 0$ となるのでした。つまり

$$-\frac{T_0}{c}\frac{(\dot{X}\cdot X')\dot{X}_0 - (\dot{X})^2 X'_0}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}} = 0 \quad (\text{端点})$$

となります。ここで $X_0 = -X^0 = -ct$ で、$-X'_0 = c(\partial_\sigma \tau) = 0$ となります。また、いま静的ゲージを採用していて $\dot{}$(上付きドット) $\equiv \partial_\tau = \partial_t$ であるので $\dot{X}_0 = -c \neq 0$。すなわち

$$\dot{X}\cdot X' = 0 \quad (\text{端点})$$

が必要であることがわかります。静的ゲージのもとで

$$\dot{X}^\mu = \left(c, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)$$
$$X^{\mu\prime} = \left(0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)$$

となるので、結局スカラー積をとっても空間成分だけが残って

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0 \quad (\text{端点})$$

となることが分かります。ここで一時的に、$\sigma = s \equiv \left|\vec{X}\right|$ を $\sigma$ パラメータの取り方として選んだ場合を考えてみましょう：

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = 0 \quad (\text{端点})$$

すると $\left|\dfrac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right| = 1 \neq 0$ は弦の方向を表す単位ベクトルなので、この式は開弦の端点は弦の方向に垂直に運動することを意味します。端点の運動は物理的に決まっていてパラメータの取り方に依らないことに注意。($\sigma = s$ のパラメータ付けは端点が弦に垂直に運動することを示すためだけに用いました。任意の $\sigma$ パラメータ付けでは端点で $\left|\dfrac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right| = 0$ となってしまう可能性があって、実際この節で行う $\sigma$ パラメータ付けでは端点で 0 になります。)

したがって $t = 0$ の弦の端点における垂線の上に $t = \Delta t$ における弦の端点があることになり、端点には同じ $\sigma$ の値が割り当てられることになります。

残すは $t = 0$ における弦の $\sigma$ パラメータ付けですが、その前にこの弦に垂直な $\sigma$ のパラメータ付けがどのような意味を持つか見てみましょう。上のように $\sigma$ を定めると、世界面上の任意の点で

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0 \qquad \text{(パラメータ条件 1)}$$

となります。簡単のために $\dfrac{\partial \vec{X}}{\partial t} \equiv \vec{v}_\perp, s \equiv \left|\vec{X}\right|$ と定義します。すると

$$\begin{aligned}(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2 &= 0 + \left[c^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2\right]\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 \\ &= (c^2 - v_\perp^2)\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2\end{aligned}$$

となるので、南部-後藤作用、$\tau$ 運動量密度、$\sigma$ 運動量密度はそれぞれ

$$S = -T_0 \int dt\, d\sigma\, \frac{ds}{d\sigma}\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \tag{40}$$

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{\dfrac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \dfrac{v_\perp^2}{c^2}}} \frac{\partial X^\mu}{\partial t} \tag{41}$$

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial X^\mu}{\partial s} \tag{42}$$

となります。少し話はそれますが、ここで自由な端点の条件 $\mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$ を思い出します。空間成分を考えると、$\left|\dfrac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right| = 1 \neq 0$ なので $v_\perp = c$ とならなければなりません。つまり開弦の自由な端点は弦に垂直に、かつ光速で運動するというわけです。

話を元に戻します。運動方程式 $\dfrac{\partial \mathcal{P}^{\tau\mu}}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathcal{P}^{\sigma\mu}}{\partial \sigma} = 0$ の $\mu = 0$ の成分を考えると、$\mathcal{P}^{\sigma 0} = 0$ より

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{T_0 \dfrac{ds}{d\sigma}}{c\sqrt{1 - \dfrac{v_\perp^2}{c^2}}}$$

となります。$t=\tau$ による偏微分は $\sigma$ を一定にして行われること、また $c$ も定数であることから、

$$\frac{T_0\,ds}{\sqrt{1-\dfrac{v_\perp^2}{c^2}}} \quad (\text{保存量})$$

という量が時間変化に対して保存することになります。弦の素片 $d\sigma$ に対して $ds$ は素片の長さを表します。ところで、南部-後藤作用 (40) の被積分関数のラグランジアン密度

$$\mathcal{L}=-T_0\frac{ds}{d\sigma}\sqrt{1-\frac{v_\perp^2}{c^2}}\equiv -T_0\frac{ds}{d\sigma}\frac{1}{\gamma}$$

をルジャンドル変換してハミルトニアン密度を求めてみます。$\gamma\equiv\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_\perp^2}{c^2}}}$ とおき、また $\vec{v}_\perp\equiv\dot{\vec{X}}$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{v}_\perp}\cdot\vec{v}_\perp-\mathcal{L}\\
&=T_0\frac{ds}{d\sigma}\frac{1}{c^2}\gamma v_\perp^2+T_0\frac{ds}{d\sigma}\frac{1}{\gamma}\\
&=T_0\frac{ds}{d\sigma}\gamma\left(\frac{v_\perp^2}{c^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\\
&=T_0\frac{ds}{d\sigma}\gamma
\end{aligned}$$

となります。よってハミルトニアンは

$$E=H=\int d\sigma\,\mathcal{H}=\int\frac{T_0\,ds}{\sqrt{1-\dfrac{v_\perp^2}{c^2}}}$$

となります。ハミルトニアンはつまりエネルギーです。見比べると、上で登場した時間変化で保存する量はエネルギーとなることが納得できます。つまり、弦の素片 $d\sigma$ に蓄えられているエネルギーは、時間経過で素片間で移動したりせず、その素片に留まり続けるということになります。

では $t=0$ における弦のパラメータ付けを行っていきます。$d\sigma$ に蓄えられるエネルギーが保たれることが分かったので、同じ $\sigma$ の長さを持つ素片に同じだけのエネルギーが蓄えられるようにするのが自然でしょう。そのためには

$$\frac{\dfrac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1-\dfrac{v_\perp^2}{c^2}}}=1 \qquad (\text{パラメータ条件 2})$$

となるように $\sigma$ を選べば大丈夫です。実際こうすると

$$d\sigma=\frac{ds}{\sqrt{1-\dfrac{v_\perp^2}{c^2}}}=\frac{dE}{T_0}$$

となり、$\dfrac{dE}{d\sigma}$ が一定になることが分かります。パラメータ条件 2 は、$\dfrac{\partial \vec{X}}{\partial t} \equiv \vec{v}_\perp$ に気を付けて式変形すると

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = 1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2$$

となり、$s$ が $\vec{X}$ の長さを表すパラメータなので $\left|\dfrac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right| = 1$ であることを用いると

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1 \qquad \text{(パラメータ条件 2)}$$

と同値であることが分かります。2 つのパラメータ条件をまとめて

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1 \qquad \text{(パラメータ付けの条件)}$$

と書けます。

このパラメータ付けのもとで運動量密度 (41)(42) は

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\tau\mu} &= \frac{T_0}{c^2}\frac{\partial X^\mu}{\partial t} \\ \mathcal{P}^{\sigma\mu} &= -T_0\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \end{aligned}$$

となります。運動方程式 $\dfrac{\partial \mathcal{P}^{\tau\mu}}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathcal{P}^{\sigma\mu}}{\partial \sigma} = 0$ は

$$\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(波動方程式)}$$

という波動方程式になります。また自由な開弦の場合は、自由端点の境界条件 $\mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$ から

$$\left.\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=0} = \left.\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\sigma_1} = 0 \qquad \text{(自由端点の境界条件)}$$

という境界条件が得られます。

## 5.2 開弦の運動

波動方程式の一般解として

$$\vec{X}(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}(\vec{F}(ct+\sigma) + \vec{G}(ct-\sigma))$$

があります。ここまでで導いた条件を用いて解を絞り込んでいきます。まず自由端点の境界条件 $\left.\dfrac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=0} = 0$ より

$$\vec{F}'(ct) = \vec{G}'(ct)$$

$ct$ はすべての実数値を取りうるので結局 $\vec{F}$ と $\vec{G}$ は定数の違いしかないことになります。定数も含めて $\vec{F}$ を定義しなおすと

$$\vec{X}(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}(\vec{F}(ct+\sigma) + \vec{F}(ct-\sigma))$$

とできます。次に自由端点の境界条件 $\left.\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\sigma_1} = 0$ より

$$\vec{F}'(ct+\sigma_1) = \vec{F}'(ct-\sigma_1)$$

となり、積分定数 $\vec{v}_0$ を用いて

$$\vec{F}(u+2\sigma_1) = \vec{F}(u) + 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c}$$

と書けます。$\vec{F}$ のこのような性質を **準周期的** であるといいます。最後にパラメータ付けの条件 $\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 0$ より

$$\left|\vec{F}'\right|^2 = 1$$

が求まります。つまり $\vec{F}'$ は単位ベクトルという条件がつきます。2 つの条件を持つ $\vec{F}$ を決めれば解 $\vec{X}(\tau,\sigma)$ が決まります。ここで、$\vec{F}$ は物理的にはどんな意味を持つのでしょうか。$\sigma = 0$ のことを考えると

$$\vec{X}(\tau,0) = \vec{F}(ct)$$

が分かります。これは、弦の端点の時間発展を $\vec{F}$ が表しているということです。つまり自由な開弦においては、弦の端点の運動さえわかれば弦全体の運動も分かってしまうというわけですね。

## 5.3 閉弦の運動

閉弦でも開弦と同じような一般解から始めていきます。

$$\vec{X}(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}(\vec{F}(ct+\sigma) + \vec{G}(ct-\sigma))$$

閉弦の場合は、当然ですが端点が存在しないので境界条件はありません。簡単のために $u \equiv ct+\sigma, v \equiv ct-\sigma$ とします。パラメータ付けの条件より

$$\left|\vec{F}'(u)\right|^2 = \left|\vec{G}'(v)\right|^2 = 1$$

が得られます。また閉弦の場合は一周するともとの点に戻るので

$$\vec{X}(t,\sigma+\sigma_1) = \vec{X}(t,\sigma)$$

となります。つまり

$$\vec{F}(u+\sigma_1) + \vec{G}(v-\sigma_1) = \vec{F}(u) + \vec{G}(v)$$

あるいは

$$\vec{F}(u+\sigma_1)+\vec{F}(u)=\vec{G}(v)-\vec{G}(v-\sigma_1)$$

となります。左辺は $u$ の、右辺は $v$ の関数で、$u, v$ は独立なので各辺は定数です。よって

$$\begin{aligned}\vec{F}'(u+\sigma_1)&=\vec{F}'(u)\\ \vec{G}'(v+\sigma_1)&=\vec{G}'(v)\end{aligned}$$

が得られます。$\vec{F}', \vec{G}'$ は単位ベクトルでもあったので、これらはそれぞれ単位球面上の閉曲線で表すことができます。仮に $\vec{F}'$ を表す閉曲線と $\vec{G}'$ を表す閉曲線が交点を持つならば、その点で $\vec{F}'(u_0)=\vec{G}'(v_0)$ となります。$(u,v)=(u_0,v_0) \iff (\tau,\sigma)=(t_0,\sigma_0)$ とします。

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{X}}{\partial t}(t_0,\sigma_0)&=\frac{1}{2}(\vec{F}'(u_0)+\vec{G}'(v_0))=\vec{F}'(u_0)\\ \frac{\partial\vec{X}}{\partial\sigma}(t_0,\sigma_0)&=\frac{1}{2}(\vec{F}'(u_0)+\vec{G}'(v_0))=0\end{aligned}$$

より、弦は点 $(t_0,\sigma_0)$ において光速で運動し、また特異な形状になっていることが分かります。このような点を **尖点** と呼びます。尖点は具体的にはどのような形状をしているのでしょうか。それを調べるために、時刻 $t_0$ における弦の $\sigma=\sigma_0$ 付近で Taylor 展開してみます。$\dfrac{\partial\vec{X}}{\partial\sigma}(t_0,\sigma_0)=0$ に気を付けて、

$$\vec{X}(t_0,\sigma)=\vec{X}(t_0,\sigma_0)+\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)^2\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial\sigma^2}(t_0,\sigma_0)+\frac{1}{3!}(\sigma-\sigma_0^3)\frac{\partial^3\vec{X}}{\partial\sigma^3}(t_0,\sigma_0)+\mathcal{O}\big((\sigma-\sigma_0)^4\big)$$

ここで $\dfrac{\partial^2\vec{X}}{\partial\sigma^2}(t_0,\sigma_0)$ の方向に $y$ 軸を取り、$\dfrac{\partial^3\vec{X}}{\partial\sigma^3}(t_0,\sigma_0)$ が $xy$ 平面に入るように $x$ 軸を取って

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial\sigma^2}(t_0,\sigma_0)&=\begin{pmatrix}0\\T\end{pmatrix}\\ \frac{\partial^3\vec{X}}{\partial\sigma^3}(t_0,\sigma_0)&=\begin{pmatrix}R_x\\R_y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

とおきます。さらに $\vec{X}(t_0,\sigma_0)$ が座標原点に来るように平行移動し、$\Delta\sigma\equiv(\sigma-\sigma_0)$ とすると尖点付近で

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(\Delta\sigma)^2\begin{pmatrix}0\\T\end{pmatrix}+\frac{1}{6}(\Delta\sigma)^3\begin{pmatrix}R_x\\R_y\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}R_x(\Delta\sigma)^3\\3T(\Delta\sigma)^2+R_y(\Delta\sigma)^3\end{pmatrix}$$

となります。$\Delta\sigma\sim0$ 付近では $(\Delta\sigma)^3$ は $(\Delta\sigma)^2$ に比べて無視できるので、おおよそ

$$y=\frac{3T}{R_x^{2/3}}|x|^{\frac{2}{3}}$$

という形になることが分かります。

尖点での運動の方向も見てみましょう。$\vec{X}(\tau,\sigma)=\dfrac{1}{2}(\vec{F}(ct+\sigma)+\vec{G}(ct-\sigma))$ より

$$\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial\sigma^2}(t_0,\sigma_0)=\frac{1}{2}(\vec{F}''(u_0)+\vec{G}''(v_0))$$

また $\left|\vec{F}'(u)\right|^2=\left|\vec{G}'(v)\right|^2=1$ よりあらゆる点で

$$\vec{F}'\cdot\vec{F}''=\vec{G}'\cdot\vec{G}''=0$$

でさらに $\vec{F}'(u_0)=\vec{G}'(v_0)$ なので $\vec{F}'(u_0)$ は $\vec{F}''(u_0),\vec{G}''(v_0)$ のどちらにも直交します。したがって

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{X}}{\partial t}(t_0,\sigma_0)\cdot\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial\sigma^2}(t_0,\sigma_0)=\vec{F}'(u_0)\cdot\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial\sigma^2}(t_0,\sigma_0)=0$$

となります。つまり、尖点では尖っている方向と垂直に運動することが分かりました（図 2)。

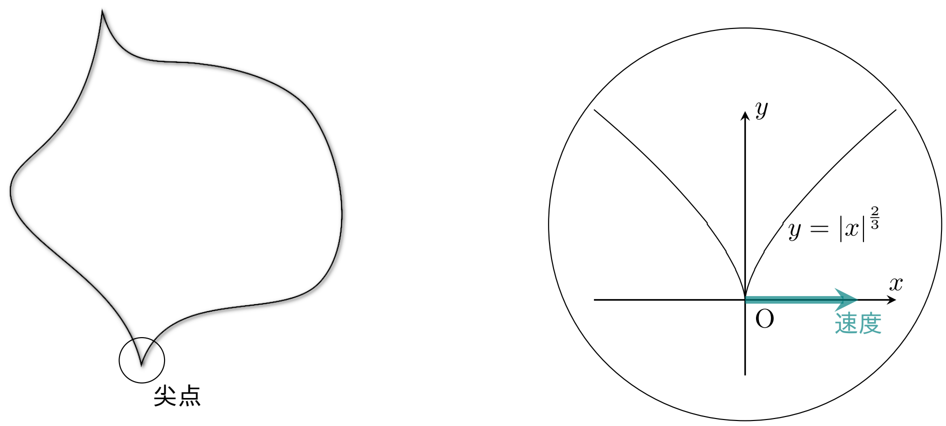


**図 2. 閉弦の尖点と拡大図（イメージ）**

また、$d=3$ における閉弦の具体的な解の 1 つとして

$$\vec{F}(u)=\frac{\sigma_1}{2\pi}\left(\sin\frac{2\pi u}{\sigma_1},-\cos\frac{2\pi u}{\sigma_1},0\right)$$
$$\vec{G}(v)=\frac{\sigma_1}{4\pi}\left(\sin\frac{4\pi v}{\sigma_1},0,-\cos\frac{4\pi v}{\sigma_1}\right)$$

とするものが挙げられます。この解をアニメーションにしたものが紹介記事の gif 画像です。

# 6 一般化

## 6.1 自然単位系

ここからは **自然単位系**

$$\hbar=c=1$$

を採用します。$c=1$ とすることは、時間の単位と長さの単位が等しいということを意味します。また $\hbar$ の単位は [エネルギー][時間] = [質量][長さ]$^2$[時間]$^{-1}$ ですが、$c=\hbar=1$ とすると [質量] = [長さ]$^{-1}$ = [時間]$^{-1}$ となります。

物理量の単位を考えると、どのように $\hbar$ や $c$ をかければ自然単位系から元の単位系に戻せるかわかるので自然単位系のまま計算を進めても問題ありません。逆に、物理量の単位について考えるときは元の単位系で考える必要があります。

## 6.2 パラメータの無単位化

静的ゲージにおいては $\tau$ は $t$ と等しかったため当然時間の単位を持ち、また $\sigma$ は長さの単位を持っていましたが、ここからは $\tau, \sigma$ は無単位のパラメータとして扱います。

## 6.3 ゲージ条件の一般化

4 元ベクトル表記を用いると $X^0(\tau,\sigma) = t(= ct)$ なので静的ゲージ $t = \tau$ は

$$X^0(\tau,\sigma) = \tau(= c\tau)$$

となります。自然単位系を採用していることに注意してください。とりあえず静的ゲージを採用して弦の運動を調べてきましたがはたしてよりよいゲージはないのでしょうか。これを調べるためにゲージ条件を一般化します：

$$n_\mu X^\mu(\tau,\sigma) = \lambda\tau \qquad \text{(一般化したゲージ条件)}$$

$n_\mu, \lambda$ に具体的な値を代入すれば具体的なゲージが得られます。例えば $n_\mu = (1, 0, \ldots, 0), \lambda = c$ を代入すると静的ゲージが得られます。ゲージ条件の変更に合わせて開弦の端点の自明な境界条件も一般化して

$$n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0 \quad \text{(端点)}$$

を課します。静的ゲージの場合にはこれは端点で $\mathcal{P}^{\sigma 0} = 0$ という条件にあたります。これとは別に各座標ごとの境界条件も存在することに注意してください。ここで

$$p_\mu(\tau) \equiv \int_0^{\sigma_1} \mathcal{P}^\tau_\mu(\tau,\sigma)\, d\sigma$$

を導入します。これは弦の運動量ベクトルに相当します。運動方程式から

$$\begin{aligned}
\frac{dp_\mu}{d\tau} &= \int_0^{\sigma_1} \frac{d\mathcal{P}^\tau_\mu(\tau,\sigma)}{d\tau}\, d\sigma \\
&= -\int_0^{\sigma_1} \frac{d\mathcal{P}^\sigma_\mu(\tau,\sigma)}{d\sigma}\, d\sigma \\
&= -\mathcal{P}^\sigma_\mu \Big|_0^{\sigma_1}
\end{aligned}$$

となり、$n_\mu$ をかけると

$$\frac{d}{d\tau}(n_\mu p^\mu) = -n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu}\Big|_0^{\sigma_1} = 0 - 0 = 0$$

となります。つまり $n_\mu p^\mu \equiv n \cdot p$ は $\tau$ の変化について保存量となり、$\sigma$ にも依存しないので定数です。ここで、一般化したゲージ条件における $\lambda$ を $\tilde{\lambda}(n \cdot p)$ に書き換えても一般性は失われません：

$$n_\mu X^\mu(\tau,\sigma) = \tilde{\lambda}(n \cdot p)\tau$$

ここで物理量の単位を考えてみます。物理量の単位を考えるときは自然単位系ではなく元の単位系で考えます。$n_\mu$ は両辺にあるので単位があるとしても相殺しています。また $\tau$ も無単位に定めてあります。$X^\mu$ は長さ、$p^\mu$ は運動量の単位を持ち、それぞれ時間で割ると速さと力の単位になります。速さの単位を持つ基本的な定数と言えば光速 $c$、力の単位を持つ基本的な値と言えば弦の張力 $T_0$ がありました。このことから $\tilde{\lambda}$ は $c/T_0$ の無単位定数倍であると定めるのがよさそうだとわかります。ここで、**勾配パラメータ** と呼ばれる定数 $\alpha'$

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T_0}\left(= \frac{1}{2\pi T_0 \hbar c}\right)$$

を導入します（ここでの $'$ は微分とは無関係です）。$\alpha'$ は [エネルギー]$^{-2}$ の単位（自然単位系では [長さ]$^2$ の単位）を持ちます。また、開弦では 2、閉弦では 1 となる定数 $\beta$ も導入します。ここから、天下り的ですがゲージ条件を

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \beta\alpha'(n \cdot p)\tau$$

に絞り込みます。この時点でゲージ条件は $\lambda$ の一般性を失っています。

静的ゲージにおいては弦の素片 $d\sigma$ が運ぶエネルギーが一定になるようにしていましたが、これは $\tau$ 運動量密度ベクトルの第 0 成分 $\mathcal{P}^{\tau 0}$ が一定となることを意味しています。一般化にあたって $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ が一定になるように $\sigma$ をパラメータ付けします。そのためにまず $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ が $\sigma$ に依存しないように $\sigma$ を選びます。また開弦では $\sigma$ の範囲を $[0, \pi]$ に設定します。すると

$$\pi n \cdot \mathcal{P}^\tau = \int_0^\pi d\sigma\, n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu} = n \cdot p \quad \text{(開弦)}$$

となり、$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \dfrac{n \cdot p}{\pi}$ という定数になることが分かります。運動方程式から

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(n \cdot \mathcal{P}^\tau) + \frac{\partial}{\partial\sigma}(n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = 0$$

となりますが、$n \cdot \mathcal{P}^\tau$ が定数であることから第 1 項は 0 となり結局 $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ が（開弦も閉弦も）$\sigma$ に依存しないことが分かります。開弦では任意の $\tau$ において端点で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ となるので結局任意の $\sigma, \tau$ において $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ が成立します。

閉弦では、$\sigma$ の範囲を $[0, 2\pi]$ とし、

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{n \cdot p}{2\pi} \quad \text{(閉弦)}$$

とします。開弦とまとめて

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{\beta}{2\pi} n \cdot p \qquad \text{(運動量密度と運動量の関係)}$$

と書けます。また、$\sigma$ 運動量密度の具体的な表式から

$$\begin{aligned} n \cdot \mathcal{P}^\sigma &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X')\partial_\tau(n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}} \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X')\beta\alpha'(n \cdot p)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}} \end{aligned}$$

です。閉弦の世界面上で $\tau$ 一定の曲線と $\sigma=0$ の曲線が常に直交するように $\sigma=0$ の点を決めていくと、任意の $\tau$ において $\sigma=0$ の点で $\dot{X}\cdot X'=0$ となるので $n\cdot\mathcal{P}^\sigma=0$ となり、運動方程式から任意の $\tau,\sigma$ において $n\cdot\mathcal{P}^\sigma=0$ が成立します。

開弦でも閉弦でも $n\cdot\mathcal{P}^\sigma=0$ が常に成立するように $\sigma$ を選べることが分かりました。このことを、$n\cdot\mathcal{P}^\sigma=0$ の具体的な表式と合わせて考えると常に

$$\dot{X}\cdot X'=0$$

が成立することが分かります。このとき、$\tau$ 運動量密度、$\sigma$ 運動量密度の具体的な表式から

$$\mathcal{P}^{\tau\mu}=\frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{X'^2\dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2X'^2}} \tag{43}$$

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu}=\frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{\dot{X}^2X^{\mu\prime}}{\sqrt{-\dot{X}^2X'^2}} \tag{44}$$

となります。運動量密度と運動量の関係 より

$$n\cdot p=\frac{2\pi}{\beta}n\cdot\mathcal{P}^\tau=\frac{1}{\beta\alpha'}\frac{X'^2(n\cdot\dot{X})}{\sqrt{-\dot{X}^2X'^2}}$$

またゲージ条件より $n\cdot\dot{X}=\beta\alpha'(n\cdot p)$ となるので

$$1=\frac{X'^2}{\sqrt{-\dot{X}^2X'^2}}$$

$$\therefore \dot{X}^2+{X'}^2=0$$

が得られます。$\dot{X}\cdot X'=0$ と合わせて

$$(\dot{X}\pm X')^2=0 \tag{一般化したパラメータ付けの条件}$$

とまとめて書けます。これがパラメータの付け方から導かれる条件です。また $-\dot{X}^2=X'^2$ より $\sqrt{-\dot{X}^2X'^2}=X'^2$。これを (43)(44) に用いて

$$\mathcal{P}^{\tau\mu}=\frac{1}{2\pi\alpha'}\dot{X}^\mu$$

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu}=-\frac{1}{2\pi\alpha'}\dot{X}^{\mu\prime}$$

がわかり、これを運動方程式に代入して

$$\ddot{X}^\mu-X^{\mu\prime\prime}=0 \tag{波動方程式}$$

も得られます。

## 6.4 自由な開弦の振動モード展開

自由な開弦の波動方程式の解を Fourier 級数展開を用いて求めてみましょう。

$$X^\mu(\tau,\sigma)=F(\sigma)G(\tau)$$

と変数分離できたとすると、波動方程式より

$$F\ddot{G} = GF''$$

あるいは

$$\frac{\ddot{G}}{G} = \frac{F''}{F}$$

となります。$\tau, \sigma$ は独立なので各辺は定数に等しく、また物理的に意味を持つ解になるには非正の実数である必要があります。各辺が $-n^2$ に等しいとすると

$$F''(\sigma) = -n^2 F(\sigma)$$
$$\ddot{G}(\tau) = -n^2 G(\tau)$$

という微分方程式になります。自由な開弦であることから自由端点の境界条件 $X^{\mu\prime}(\tau, 0) = X^{\mu\prime}(\tau, \pi) = 0$ が課されるので、$F'(0) = F'(\pi) = 0$ となります。よって $F(\sigma)$ は $\cos n\sigma$ の線形結合で表せます。$G(\tau)$ の方は特に境界条件もなく $e^{in\tau}$ $(n \neq 0)$ と $\tau + \mathrm{const.}$ $(n = 0)$ の線形結合で表せます。よって適当な複素係数 $\alpha_n^\mu$ と定数項にあたる $x_0^\mu$ を用いて

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma$$

と解が求まります。都合により、振動子 $\alpha_n^\mu$ は係数 $1/n$ が前に出ているため、振動数 $n$ の振動の振幅の $n$ 倍のようなものになっています。ここで、$X^\mu$ が実数という条件から、各振動子 $\alpha_n^\mu$ には

$$\alpha_{-n}^\mu = \alpha_n^{\mu *} \qquad \text{(振動子の共役条件)}$$

という条件が付きます。また

$$\dot{X}^\mu \pm X^{\mu\prime} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)}$$

も得られます。さらに、弦の運動量は

$$p^\mu = \int_0^\pi \mathcal{P}^{\tau\mu}\, d\sigma = \int_0^\pi \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu\, d\sigma$$

でしたが、$\dot{X}^\mu$ のモード展開のうち $n \neq 0$ の項は $\sigma \in [0, \pi]$ で積分すると 0 になる。結局 $X^\mu$ において $\tau$ の係数だったものだけが残るので

$$p^\mu = \int_0^\pi \frac{\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu}{2\pi\alpha'}\, d\sigma = \frac{\alpha_0^\mu}{\sqrt{2\alpha'}} \qquad \text{(運動量とゼロモードの関係)}$$

となります。本当はこの後、求めた解が一般化したパラメータ付けの条件 $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ を満たすように $\alpha_n^\mu$ の条件を絞り込むことが必要ですが、それはゲージ条件を完全に決定してから行うことにします。

# 7　光錐解

## 7.1　光錐座標

Lorentz 座標系では 1 つの時間座標 $x^0$ と $d$ 個の空間座標 $x^1,\ldots,x^d$ で Minkowski 時空上の点を指定します。$x^0,x^1$ の代わりに、

$$x^+ \equiv \frac{x^0+x^1}{\sqrt{2}}$$
$$x^- \equiv \frac{x^0-x^1}{\sqrt{2}}$$

で定義された $x^+,x^-$ を用いる座標系を **光錐座標系** と呼びます。このような名前になっているのは、$x^+,x^-$ 軸がちょうど光円錐の母線の方向に伸びているからです。$x^+,x^-$ 以外の $d-1$ 個の座標を横方向座標と呼びます。横方向座標を走る添字として $I$ を用います。

Lorentz 座標系では 2 つのベクトル $a^\mu,b^\mu$ のスカラー積は

$$a\cdot b = a_\mu b^\mu = \eta_{\mu\nu}a^\mu b^\nu = -a^0b^0 + a^1b^1 + \cdots + a^db^d$$

となっていました。ここで

$$-a^-b^+ - a^+b^- = -\frac{(a^0-a^1)(b^0+b^1)}{2} - \frac{(a^0+a^1)(b^0-b^1)}{2} = -a^0b^0 + a^1b^1$$

となることから

$$a\cdot b = -a^-b^+ - a^+b^- + a^2b^2 + \cdots + a^db^d$$

となることが分かります。これが光錐座標におけるスカラー積です。

運動量 Lorentz ベクトルも光錐座標では

$$p^+ \equiv \frac{p^0+p^1}{\sqrt{2}}$$
$$p^- \equiv \frac{p^0-p^1}{\sqrt{2}}$$

となります。

## 7.2　光錐ゲージにおける開弦のモード展開

一般化したゲージ $n\cdot X(\tau,\sigma) = \beta\alpha'(n\cdot p)\tau$ において

$$n_\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0\right)$$

としたものを **光錐ゲージ** と呼びます。ここでは光錐ゲージのもとで開弦の運動の解を求めていきましょう。$n_\mu$ を上のように定めると

$$n\cdot X = \frac{X^0+X^1}{\sqrt{2}} \equiv X^+$$
$$n\cdot p = \frac{p^0+p^1}{\sqrt{2}} \equiv p^+ = \text{const.}$$

となり光錐座標が現れます。また、いま開弦を考えているので $\beta = 2$ に注意してゲージ条件を用いると

$$X^+(\tau,\sigma) = 2\alpha' p^+ \tau \qquad \text{(光錐ゲージ条件)}$$
$$p^+ = \pi \mathcal{P}^{\tau +} = \text{const.}$$

となります。ここでは $p^+ \neq 0$ の場合のみを考えます。一般化したパラメータ付けの条件 $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ より

$$-2(\dot{X}^+ \pm X^{+\prime})(\dot{X}^- \pm X^{-\prime}) + (\dot{X}^I \pm X^{I\prime})^2 = 0$$

となり、光錐ゲージ条件から $\dot{X}^+ \pm X^{+\prime} = 2\alpha' p^+ \pm 0$ なので

$$\dot{X}^- \pm X^{-\prime} = \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2p^+}(\dot{X}^I \pm X^{I\prime})^2$$

となります。静的ゲージの場合は

$$\dot{X}^1 \pm X^{1\prime} = \pm\sqrt{1 - (\dot{X}^I \pm X^{I\prime})^2} \quad \text{(静的ゲージ)}$$

となり平方根が残ってしまいますが、光錐ゲージではその心配はありません。横方向座標 $X^I$ は Lorentz 座標系でも光錐座標系でも変わらないので解は前節と同じように、$\alpha^I_n$ を用いて

$$X^I(\tau,\sigma) = x^I_0 + \sqrt{2\alpha'}\alpha^I_0 \tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha^I_n e^{-in\tau}\cos n\sigma \qquad \text{(横方向座標の解)}$$

と書けます。また、$X^-$ も $X^0, X^1$ の線形結合なので、$X^-$ が満たすべき波動方程式、境界条件も $X^I$ と全く同じです。よって

$$X^-(\tau,\sigma) = x^-_0 + \sqrt{2\alpha'}\alpha^-_0 \tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha^-_n e^{-in\tau}\cos n\sigma$$

と書けます。簡単な計算で

$$\dot{X}^I \pm X^{I\prime} = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha^I_n e^{-in(\tau\pm\sigma)}$$
$$\dot{X}^- \pm X^{-\prime} = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha^-_n e^{-in(\tau\pm\sigma)}$$

となることが分かります。$\dot{X}^I \pm X^{I\prime}$ のモード展開を利用して $\dot{X}^- \pm X^{-\prime}$ のモード展開は

$$\begin{aligned}
\dot{X}^- \pm X^{-\prime} &= \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2p^+}(\dot{X}^I \pm X^{I\prime})^2 \\
&= \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2p^+}2\alpha'\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n^I e^{-in(\tau\pm\sigma)}\right)\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\alpha_m^I e^{-im(\tau\pm\sigma)}\right) \\
&= \frac{1}{2p^+}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\alpha_n^I\alpha_m^I e^{-i(n+m)(\tau\pm\sigma)} \\
&= \frac{1}{2p^+}\sum_{n,p\in\mathbb{Z}}\alpha_p^I\alpha_{n-p}^I e^{-in(\tau\pm\sigma)} \quad (n+m\to n, n-m\to p) \\
&= \frac{1}{2p^+}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{p\in\mathbb{Z}}\alpha_p^I\alpha_{n-p}^I\right)e^{-in(\tau\pm\sigma)} \\
&\equiv \frac{1}{p^+}\sum_{n\in\mathbb{Z}}L_n^\perp e^{-in(\tau\pm\sigma)}
\end{aligned}$$

とまとめられます。同じ添え字のある掛け算はいつでも和の縮約を取っていることに注意。ここで登場した

$$L_n^\perp \equiv \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{Z}}\alpha_{n-p}^I\alpha_p^I$$

は **横方向の Virasoro モード** と呼ばれるものです。これは弦を量子化する際に重要になってきます。

$\dot{X}^- \pm X^{-\prime}$ のモード展開を比較して

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = \frac{1}{p^+}L_n^\perp$$

と分かるので、適当な積分定数 $x_0^-$ を用いて

$$X^-(\tau,\sigma) = x_0^- + \frac{1}{p^+}L_0^\perp\tau + \frac{i}{p^+}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}L_n^\perp e^{-in\tau}\cos n\sigma$$

と求まります。こうして、開弦の運動の完全な解を 1 つの式に落とし込むことができました。

ここで得られた解をもちいて弦の質量を計算できます。運動量 $p^\mu = (E, p^1, \ldots, p^d)$ の自身とのスカラー積は

$$p^2 = p_\mu p^\mu = -E^2 + \vec{p}\cdot\vec{p} = -M^2$$

となります。自然単位系で $c = 1$ となっていることに注意。よって光錐座標を用いてスカラー積を展開すると

$$M^2 = -p^2 = 2p^+p^- - p^Ip^I$$

となります。ここで運動量とゼロモードの関係より $p^- = \dfrac{\alpha_0^-}{\sqrt{2\alpha'}}$ なので

$$\begin{aligned}
2\alpha' p^- &= \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^- = \frac{1}{p^+}L_0^\perp \\
\therefore 2p^+p^- &= \frac{1}{\alpha'}L_0^\perp = \frac{1}{\alpha'}\left(\frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{I*}\alpha_n^I\right) \quad (\because \text{振動子の共役条件より } \alpha_{-n}^I = \alpha_n^{I*}) \\
&= p^Ip^I + \frac{1}{\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{I*}\alpha_n^I \quad (\because \text{運動量とゼロモードの関係より } p^I = \frac{\alpha_0^I}{\sqrt{2\alpha'}})
\end{aligned}$$

であり、したがって

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{I*} \alpha_n^I$$

となり、質量 $M$ が実数であるという結果が導けました。これを見ると、$M^2 \geq 0$ となることが確認できます。$M \equiv \sqrt{M^2}$ と定義してやれば、質量 $M$ は非負になります。また、振動子 $\alpha_n^\mu$ は $n$ 倍振動の振幅の $n$ 倍を表しているのでした。同じ振幅でも、振動数 $n$ が大きいほど $\alpha_n^\mu$ の絶対値も大きくなり、$M^2$ も大きくなることが見て取れます。逆に全く振動しなければ、質量は 0 になってしまうこともわかります。全ての横方向振動子が 0 になるときは、横方向座標の解は $X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I \tau$ となり、$\sigma$ が意味を持たなくなります。

## 参考文献


[1] Zwiebach, B. (2009). *A First Course in String Theory Second Edition*. Cambridge University Press.（ツヴィーバッハ, B．樺沢宇紀（訳）(2019)．初級講座 弦理論 《基礎編》 丸善プラネット株式会社）

[2] B. ツヴィーバッハ『初級講座 弦理論《基礎編》』(n.d.). Retrieved May 1, 2021 from http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/wp-content/uploads/2020/05/string-tex.pdf