# 局所実在論と Bell の不等式

量子物理学班 (文責：三浦大貴)

2021 年 4 月 30 日

## 1　EPR 論文

1935 年に，Einstein, Podolsky, Rosen の 3 人によって，EPR 論文として有名な論文が出されました [1]．これは，「量子論が正しいとすると，波動関数による物理的実在の記述は不完全である」ことを主張するものでした[*1]．完全な理論とは，物理的実在のあらゆる要素がその理論のなかに必ず一つの対応物を持っているような理論のことを言います．つまり EPR 論文の主張は，波動関数を用いた量子論には，物理的実在の各要素に対応する要素が全ては含まれていない，ということです．

まずこの主張が展開される過程を見ていきます．物理量が実在すると言えるための十分条件として，次の判断基準を設定します：

> ある物理量の値を，その物理量を持つ系の状態を乱すことなく正確に (つまり，確率 1 で) 予言できるならば，その物理量は実在する

これはあくまで理に適う判断基準程度のもので，包括的な定義ではありません[*2]．

ここからは量子論で，一次元自由粒子について考えます．量子論における基本概念は”状態”で，波動関数 $\psi$ で完全に特徴付けられるとします．$\psi$ は粒子の振る舞いを記述する変数の関数です．また可観測量を $A$ とし，これを記述する演算子も $A$ で表します．$\psi$ が $A$ の固有関数なら，

$$A\psi = a\psi \tag{1}$$

となります．ここで $a$ は $A$ の固有値です．よって物理量 $A$ は，粒子が状態 $\psi$ にあるときはいつでも確定した値 $a$ をもちます．つまり実在の判断基準に従うと，(1) を満たす状態 $\psi$ にある粒子に対して，物理量 $A$ が実在すると言えます．

### 例

波動関数 $\psi$ を

$$\psi(x) = e^{\frac{ip_0}{\hbar}x} \tag{2}$$

とします．ここで $p_0$ は定数，$x$ は独立変数です．粒子の運動量に対応する演算子は

$$p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \tag{3}$$

なので，

$$p\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x} = p_0\psi \tag{4}$$

を得ます．従って (2) の状態 $\psi$ では，運動量は確実に値 $p_0$ をもちます．すなわち (2) の状態 $\psi$ にある粒子の運動量は実在すると言えます．一方でもし (1) が成立しなければ，物理量 $A$ が決まった値を持つと言うことが決して言えなくなります．例えば粒子の座標を考えてみます．これに対応する演算子 ($q$ とする) は，独立変数 $x$ をかける，という演算子です．つまり，$c$ を定数として

$$q\psi = x\psi \neq c\psi \tag{5}$$

[*1] 「量子論は間違いだ！」という主張ではありません．

[*2] 論文の最後でも「実在の基準が十分に制限的でないため，得た結論に背くものが存在しうる．」と述べています．

となります．量子論では，粒子が $a$ と $b$ の間にある相対確率が

$$P(a,b)=\int_a^b \overline{\psi}\psi\,dx=\int_a^b 1\,dx=b-a \tag{6}$$

である，としか言えません．したがって (2) の状態にある粒子については，座標の決まった値は予言できません*3．以上のことから得られる結論は

> 粒子の運動量が知られているとき，その座標は物理的実在を持たない

です．

より一般に量子力学では以下が示されます：

> 物理量 $A,B$ を表す演算子が非可換，つまり $[A,B]\neq 0$ ならば，2 つのうちの一方の値が正確に分かっているとき，他方の値は正確には分からない*4

したがって，量子論が正しいとすると, 次の $\diamond 1$, $\diamond 2$ のいずれかが成り立ちます：

> $\diamond 1$ 波動関数による状態の記述は不完全である
> $\diamond 2$ $[A,B]\neq 0$ の 2 つの物理量は同時に実在しない

以下,「$\diamond 1$ が偽」$\Rightarrow$「$\diamond 2$ が偽」となること，さらにそれによって $\diamond 1$ が真であることを示します．

2 つの系 $\mathbf{I},\mathbf{II}$ を考え，適当な時間 $t=0\sim t=T$ で相互作用させます．ここで $t<0$ での両系の状態は分かっているものとし，$T<t$ では一切相互作用しないものとします．また任意の $T<t$ について，$\mathbf{I}+\mathbf{II}$ 系の波動関数を $\psi$ とします．$a_1, a_2, \ldots$ を系 $\mathbf{I}$ に関係するある物理量 $A$ の固有値とし，$u_1(x_1), u_2(x_1), \ldots$ を対応する固有関数とします．$x_1$ は系 $\mathbf{I}$ の変数です．このとき $\psi$ は

$$\psi(x_1,x_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x_2)u_n(x_1) \tag{7}$$

と表すことができます．物理量 $A$ が測定され，値 $a_k$ を持つことが分かったとすると，測定後に系 $\mathbf{I}$ は波動関数 $u_k(x_1)$，系 $\mathbf{II}$ は波動関数 $\varphi_k(x_2)$ の状態にあると結論できます．関数系 $\{u_n(x_1)\}$ は物理量 $A$ の選び方によって決まります．もし $A$ の代わりに固有値 $b_1, b_2, \ldots$ と固有関数 $v_1(x_1), v_2(x_1), \ldots$ を持つ物理量 $B$ を選んだとすると，(7) の代わりに

$$\psi(x_1,x_2)=\sum_{m=1}^{\infty}\phi_m(x_2)v_m(x_1) \tag{8}$$

という展開が得られます．$B$ が測定され，値 $b_r$ を持つことが分かったとすると，測定後に系 $\mathbf{I}$ は波動関数 $v_r(x_1)$，系 $\mathbf{II}$ は波動関数 $\phi_r(x_2)$ の状態にあると結論できます．したがって，系 $\mathbf{I}$ に対する異なる 2 つの測定の結果として，系 $\mathbf{II}$ は異なる 2 つの波動関数の状態になります．その一方で，測定の瞬間に 2 つの系は一切相互作用しないので，系 $\mathbf{I}$ に起こったいかなることの結果としても系 $\mathbf{II}$ において実在の変化は起こり得ません．つまり，系 $\mathbf{I}$ で $A$ か $B$ のどちらを測定しても，系 $\mathbf{II}$ の状態は変わりません．よって 2 つの異なる波動関数 $\varphi_k, \phi_r$ を「系 $\mathbf{I}$ との相互作用の後の系 $\mathbf{II}$」という同じ実在に割り当てることができます．

ところで，2 つの波動関数 $\varphi_k, \phi_r$ が，それぞれ系 $\mathbf{II}$ の物理量 $P,Q$ に対応する 2 つの非可換な演算子の固有関数である，ということが起こり得ます．

## 例

2 つの系を 2 つの粒子とし，系 $\mathbf{I}+\mathbf{II}$ の波動関数 $\psi$ を

$$\psi(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{ip}{\hbar}(x_1-x_2+x_0)}\,dp \tag{9}$$

とします．$x_0$ は定数です．$A$ を粒子 1 の運動量であるとすると，その固有値 $p$ に対応する固有関数は

$$u_p(x_1)=e^{\frac{ip}{\hbar}x_1} \tag{10}$$

*3 直接測定によって決まった値が得られるかもしれませんが，これは系の状態を変えてしまうため実在の判断基準にそぐいません．

*4 どんな状態に対しても不確定関係:$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}\left|\langle[A,B]\rangle\right|^2$ が成り立ちます．

となります．連続スペクトルの場合，(7) は

$$\psi(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_p(x_2)u_p(x_1)\,dp \tag{11}$$

と書き換えられます．ここで (9), (10) より

$$\varphi_p(x_2)=e^{-\frac{ip}{\hbar}(x_2-x_0)} \tag{12}$$

です．しかしこの $\varphi_p$ は，演算子

$$P=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{13}$$

の，粒子 2 の運動量の固有値 $-p$ に対応する固有関数です．一方で $B$ が粒子 1 の座標であるとすると，それは固有値 $x$ の固有関数として

$$v_x(x_1)=\delta(x_1-x) \tag{14}$$

をもちます．このとき (8) は

$$\psi(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_x(x_2)v_x(x_1)\,dx \tag{15}$$

と書き換えられます．ここで，(14), (15) より

$$\begin{aligned}\phi_x(x_2)&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\frac{p}{\hbar}(x-x_2+x_0)}\,dp\\&=\hbar\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\frac{p}{\hbar}(x-x_2+x_0)}\,\frac{dp}{\hbar}\\&=h\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ik(x-x_2+x_0)}\,dk\quad\left(\frac{p}{\hbar}=k\text{ とおいた}\right)\\&=h\delta(x-x_2+x_0)\end{aligned} \tag{16}$$

です．しかし，この $\phi_x$ は演算子

$$Q=x_2 \tag{17}$$

の，粒子 2 の座標の固有値 $x+x_0$ に対する固有関数です．(13), (17) より

$$[P,Q]=PQ-QP=-i\hbar\neq 0 \tag{18}$$

となることより，$\varphi_p$ と $\phi_x$ は，物理量 $P,Q$ に対応する非可換な 2 つの演算子の固有関数です．

一般の (7), (8) に戻って，$\varphi_k$ と $\phi_r$ が固有値 $p_k,q_r$ に対応する非可換な演算子 $P,Q$ の固有関数であると仮定します．物理量 $A$ と $P$ が対応し (上の例ではそれぞれ系 **I**, **II** の粒子の運動量)，物理量 $B$ と $Q$ が対応しています (上の例ではそれぞれ系 **I**, **II** の粒子の座標)．系 **I** で $A$ を測定することによって，系 **II** を乱すことなく正確に物理量 $P$ の値 $p_k$ を予言することができます．実在の判断基準に従うと，物理量 $P$ が実在すると言えます．一方，系 **I** で $B$ を測定することによって，系 **II** を乱すことなく正確に物理量 $Q$ の値 $q_r$ を予言することができます．実在の判断基準に従うと，物理量 $Q$ が実在すると言えます．しかし，$\varphi_k$ と $\phi_r$ は同じ実在に割り当てられます．よって，波動関数が物理的実在の完全な記述を与えると仮定すると，非可換な演算子に対応する 2 つの物理量が同時に実在しうる，という結論が得られます．したがって「⋄1 が偽ならば ⋄2 が偽」となりますが，⋄1 か ⋄2 のいずれかは真でなければならないので，⋄1 が真，つまり

> 波動関数によって与えられる量子力学の記述は不完全である

という結論が得られます．

## 2　局所実在論

前節で説明した EPR 論文は「局所実在論を仮定すると量子論は完全な理論ではなく，その不完全性を補完するための隠れた変数を導入するべきである」という議論に発展しました．以降で，局所実在論と隠れた変数理論の仮定を述べ，Bell の不等式，CHSH 不等式を導出します．

## 2.1 局所実在論と隠れた変数理論

まず，2 つの測定が互いに離れたところで行われる場合，一方の測定結果が (光速を超えて) 他方で得られる結果に影響しない，ということを仮定します．これが「局所性」です．次に，任意の測定結果が測定前からあらかじめ決まっている，ということを仮定します．これが「実在性」です．この局所性と実在性を仮定した理論が「局所実在論」です．

ここで隠れた (すなわち，私たちが気づけていない) 変数 $\lambda$ を導入します．この変数が 1 変数であろうと変数の組であろうと関数の組であろうと，また離散変数であろうと連続変数であろうと，まとめて $\lambda$ と表します．量子論で測定結果が確率的に得られるように思われるのは私たちが変数 $\lambda$ をよく知らないためであり，$\lambda$ によって測定結果は測定前から決まっている，つまり実在性が保証されていると考えます．また局所性の仮定より，$\lambda$ の確率分布が測定とは独立であることを要請します．このような変数 $\lambda$ を用いて決定論的な記述を試みる理論を「隠れた変数理論」と言います．

## 2.2 Bell の不等式

Bell の不等式を導出するために，一重項状態 (総スピンが 0) のスピン 1/2 のペアを考えます．ある地点でこのペアを用意して互いに逆方向に飛ばし，遠く離れた 2 地点で測定を行います．2 つのスピンを $\vec{\sigma_1}, \vec{\sigma_2}$ とし，これらを特定の方向で測定します．量子論によると，$\vec{a}$ をある単位ベクトルとして，$\vec{\sigma_1}\cdot\vec{a}$ の測定値が $+1$ であったら，$\vec{\sigma_2}\cdot\vec{a}$ の測定値は $-1$ となります．これを局所実在論，隠れた変数理論を仮定して，$\lambda$ によってあらかじめ測定結果が決まっているのだと考えます．つまり，$\vec{\sigma_1}\cdot\vec{a}$ を測定した結果 $A$ は $\vec{a}$ と $\lambda$ によって決定され，$\vec{\sigma_2}\cdot\vec{b}$ を測定した結果 $B$ は $\vec{b}$ と $\lambda$ によって決定されると考えます．すると，

$$A(\vec{a},\lambda) = \pm 1, \quad B(\vec{b},\lambda) = \pm 1 \tag{19}$$

と表現できます．

$\rho(\lambda)$ を $\lambda$ の確率分布とすると，2 つの測定結果 $\vec{\sigma_1}\cdot\vec{a}, \vec{\sigma_2}\cdot\vec{b}$ の積の期待値は

$$P(\vec{a},\vec{b}) = \int \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) B(\vec{b},\lambda) d\lambda \tag{20}$$

となります．ここで $\lambda$ の確率分布を $\rho(\lambda)$ と書いていますが，これは $\lambda$ の分布が測定器の設定 $\vec{a}, \vec{b}$ とは独立である，ということを仮定しています．$\lambda$ の確率分布が測定器の設定 $\vec{a}, \vec{b}$ に依存すると，$A, B$ もそれぞれ $\vec{b}, \vec{a}$ に依存することになってしまい，「遠く離れた測定器の一方の設定が他方に影響しない」という局所性の仮定に反してしまいます．実験によって Bell の不等式の破れを確認する際には，この仮定が再現されるように設定しなければなりません．

この $P$ の絶対値は 1 を超えません：

$$\begin{aligned}
\left|P(\vec{a},\vec{b})\right| &= \left|\int \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) B(\vec{b},\lambda) d\lambda\right| \\
&\leq \int \left|\rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) B(\vec{b},\lambda)\right| d\lambda \\
&= \int \rho(\lambda) \underbrace{\left|A(\vec{a},\lambda) B(\vec{b},\lambda)\right|}_{=1 \ (\because (19))} d\lambda \quad (\because \ \rho(\lambda) \geq 0) \\
&= \int \rho(\lambda) d\lambda \\
&= 1 \ (\because \ \text{確率の総和は１})
\end{aligned}$$

$\vec{\sigma_2}$ を測定する別の方向を $\vec{c}$ とすると

$$\begin{aligned}
P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c}) &= \int \rho(\lambda) \left[A(\vec{a},\lambda) B(\vec{b},\lambda) - A(\vec{a},\lambda) B(\vec{c},\lambda)\right] d\lambda \\
&= \int \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) \left[B(\vec{b},\lambda) - B(\vec{c},\lambda)\right] d\lambda \\
&= \int \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) B(\vec{b},\lambda) \left[1 - B(\vec{b},\lambda) B(\vec{c},\lambda)\right] d\lambda \ \ (\because B(\vec{b},\lambda)^2 = 1)
\end{aligned} \tag{21}$$

となります．よって絶対値をとると

$$
\begin{aligned}
\left|P(\vec{a},\vec{b})-P(\vec{a},\vec{c})\right| &= \left|\int \rho(\lambda)A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b},\lambda)\left[1-B(\vec{b},\lambda)B(\vec{c},\lambda)\right]d\lambda\right| \\
&\leq \int \rho(\lambda)\left|A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b},\lambda)\right|\left|1-B(\vec{b},\lambda)B(\vec{c},\lambda)\right|d\lambda \\
&= \int \rho(\lambda)\left[1-B(\vec{b},\lambda)B(\vec{c},\lambda)\right]d\lambda \\
&= \int \rho(\lambda)d\lambda - \int \rho(\lambda)B(\vec{b},\lambda)B(\vec{c},\lambda)d\lambda
\end{aligned} \tag{22}
$$

となります．ここで，スピンを同じ方向に測ると測定値 $A,B$ が互いに逆符号になる，すなわち

$$
B(\vec{b},\lambda) = -A(\vec{b},\lambda) \tag{23}
$$

が成り立つことより，

$$
\begin{aligned}
\left|P(\vec{a},\vec{b})-P(\vec{a},\vec{c})\right| &\leq \int \rho(\lambda)d\lambda - \int \rho(\lambda)B(\vec{b},\lambda)B(\vec{c},\lambda)d\lambda \\
&= \int \rho(\lambda)d\lambda + \int \rho(\lambda)A(\vec{b},\lambda)B(\vec{c},\lambda)d\lambda \\
&= 1+P(\vec{b},\vec{c})
\end{aligned} \tag{24}
$$

したがって，Bell の不等式

$$
\left|P(\vec{a},\vec{b})-P(\vec{a},\vec{c})\right| \leq 1+P(\vec{b},\vec{c}) \tag{25}
$$

が得られます．

## 2.3 CHSH 不等式

$\vec{a'},\vec{b'}$ をそれぞれ $\vec{\sigma_1},\vec{\sigma_2}$ を測定する測定器の $\vec{a},\vec{b}$ と一般に異なる設定とすると

$$
\begin{aligned}
P(\vec{a},\vec{b})-P(\vec{a},\vec{b'}) &= \int \left[A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b},\lambda)-A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b'},\lambda)\right]\rho(\lambda)d\lambda \\
&= \int \left[A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b},\lambda) \pm A(\vec{a},\lambda)A(\vec{a'},\lambda)B(\vec{b},\lambda)B(\vec{b'},\lambda)\right]\rho(\lambda)d\lambda \\
&\quad -\int \left[\pm A(\vec{a},\lambda)A(\vec{a'},\lambda)B(\vec{b},\lambda)B(\vec{b'},\lambda)+A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b'},\lambda)\right]\rho(\lambda)d\lambda \\
&= \int A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b},\lambda)\left\{1\pm A(\vec{a'},\lambda)B(\vec{b'},\lambda)\right\}\rho(\lambda)d\lambda \\
&\quad -\int A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b'},\lambda)\left\{1\pm A(\vec{a'},\lambda)B(\vec{b},\lambda)\right\}\rho(\lambda)d\lambda
\end{aligned} \tag{26}
$$

が得られます．絶対値を取ると

$$
\begin{aligned}
\left|P(\vec{a},\vec{b})-P(\vec{a},\vec{b'})\right| &\leq \left|\int A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b},\lambda)\left\{1\pm A(\vec{a'},\lambda)B(\vec{b'},\lambda)\right\}\rho(\lambda)d\lambda\right| \\
&\quad +\left|\int A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b'},\lambda)\left\{1\pm A(\vec{a'},\lambda)B(\vec{b},\lambda)\right\}\rho(\lambda)d\lambda\right| \\
&\leq \int \left|A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b},\lambda)\right|\left|1\pm A(\vec{a'},\lambda)B(\vec{b'},\lambda)\right|\rho(\lambda)d\lambda \\
&\quad +\int \left|A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b'},\lambda)\right|\left|1\pm A(\vec{a'},\lambda)B(\vec{b},\lambda)\right|\rho(\lambda)d\lambda \\
&= \int \left\{1\pm A(\vec{a'},\lambda)B(\vec{b'},\lambda)\right\}\rho(\lambda)d\lambda + \int \left\{1\pm A(\vec{a'},\lambda)B(\vec{b},\lambda)\right\}\rho(\lambda)d\lambda \\
&= 2\pm\left\{P(\vec{a'},\vec{b'})+P(\vec{a'},\vec{b})\right\}
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
\left|P(\vec{a},\vec{b})-P(\vec{a},\vec{b'})\right| \mp \left\{P(\vec{a'},\vec{b'})+P(\vec{a'},\vec{b})\right\} &\leq 2 \\
\left|P(\vec{a},\vec{b})-P(\vec{a},\vec{b'})\right| + \left|P(\vec{a'},\vec{b'})+P(\vec{a'},\vec{b})\right| &\leq 2 \\
\therefore \left|P(\vec{a},\vec{b})-P(\vec{a},\vec{b'})+P(\vec{a'},\vec{b'})+P(\vec{a'},\vec{b})\right| &\leq 2
\end{aligned} \tag{27}
$$

が得られます．あるいは | | の中身を $S$ とおいて

$$-2 \leq S \leq 2 \tag{28}$$

とも書かれます．この不等式は Clauser, Holt, Horne, Shimony によって初めて導かれたので，CHSH 不等式という名がついていますが，これは Bell の不等式のうちのひとつです[*5].

# 参考文献


[1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*, 47, 777-780.

[2] J. S. Bell (1964). On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics*, 1(3), 195-200.

[3] 清水明 (2004). 『新版 量子論の基礎 その本質のやさしい理解のために』 サイエンス社.

[4] Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang(2010). *Quantum Computation and Quantum Information* 10th Anniversary Edition. Cambridge University Press.


[*5] いくつかの不等式をまとめて，最初の発見者である Bell の名前を取って Bell の不等式 (Bell inequalities) と呼びます.