量子論理について

量子物理学班

May 15, 2021

Contents

1 はじめに **3**

2 導入 **4**

3 本論 **5**

3.1 束論について 5

3.2 量子論で用いる解析学について 20

3.3 量子論理について 26

4 付録 (量子論理の決定性について) **34**

4.1 一般化束など 34

4.2 Hilbert 空間周りの話 55

4.3 主定理 68

5 謝辞 **75**

6 参考文献 **75**

7 修正履歴 **76**

1　はじめに

まず書いてる人が勉強途中であるので，間違っている可能性が否定できません．間違いに気づいたら教えて下さい．また，どんな質問も歓迎します．わからないことがあればどんどん質問してください．[1] この記事の前提知識は数学のかんたんな知識 (線形代数と集合論の初歩) と，量子力学の初歩 (重ね合わせの原理やスピンに関する不確定性関係) くらいです．気楽に読んでください．

記法について先にいくつか断っておきます．書いている人の趣味で「関数」を「函数」と書きます．これは誤字ではないです．例えば高木貞治先生の書かれた『解析概論』という本があるのですが，その本では「函数」と書かれていたはずです．また開区間を (a, b) ではなく $]a, b[$ などと書きます．これは Bourbaki(ブルバキ) というフランスの有名な数学者の集団もこの記法を用いているのでちゃんと「由緒正しき」記法です．また，「演算子」という言葉を「作用素」という言葉で表現します．

[1] 連絡先は `physlab2021@gmail.com` です．

2　導入

量子力学における「真偽」や「論理」というものは一体どうなっているのでしょうか．いきなり量子の話をしても難しいかも知れないので，古典的な例を出しつつ話を進めてみましょう．

例えば，古典的な箱とボールを考えましょう．ここでの「古典的」という意味は Newton 力学に従うもの (非量子的なもの) くらいの認識で大丈夫です．箱の中にボールが入っている状態を「真」と，入っていない状態を「偽」とみなすことにします．また，「真」を数字の「1」で，「偽」を数字の「0」で表すことにします．直感的に分かる通り，ボールは 0 もしくは 1 の状態しか取りえません．つまり，真偽のどちらかだけという状況ですね．一方で量子的な箱とボール (粒子) を考えてみましょう．重ね合わせの原理に慣れた方なら，(箱の中にボールが入っている状態)+(箱の外にボールがある状態) のような状態を考えることができるとわかるかと思います．この時，重ね合わせの係数が自由に選べるので，例えば「確率 0.2 で箱の中にボールが入っている状態」というようなものも作れてしまうこともわかります．そうなると，古典的な系の「状態は 0 か 1 かのどちらかしか取らない」という状況とは著しく異なっているということがすぐに分かるでしょう．強いて言うならば，真偽が 0 から 1 までの全実数値を取ってしまうのが量子力学における真偽と言えそうです．

しかしこの状況は割と嫌な気分になります．実際，上の古典的な例のような，0 と 1 しか取らないような系についてはいろいろな研究がなされています．一方で，量子力学の体系がその枠組みに乗らないため，そもそも量子力学においてなにかしらの命題のようなものを考えることができるのかどうか，というような疑問さえ浮かんでしまいます．このような問題点を解決する論理の体系が「量子論理」と呼ばれるものです．先に結論を言ってしまうと，大変に難しい分野ですので，この pdf だけですべてを説明することはできないししないのですが，まあ何かそういう分野があるんだね，くらいの気分で読んでもらえれば幸いです．[2)]

[2)] ある程度数理論理学などに詳しい人向けの注意:量子論理の意味論に重点を置き，証明論の複雑な話は行わないことにする．

3　本論

量子物理学班という名前ではありますが，ここからしばらく数学の話をします．「束」と呼ばれるものを定義するためです．一番最後に物理に戻ってくるつもりです．

3.1　束論について

定義:順序対，直積，二項関係

A, B を集合とする．A の元 a と B の元 b を，(a, b) と並べて一組にしたものを順序対と呼ぶ．2 つの順序対 $(a, b), (a', b')$ が等しいのは $a = a'$，$b = b'$ なるときのみであると定める．順序対 (a, b) 全体からなる集合を $A \times B$ と書き，A と B の直積と呼ぶ．
X を集合とする．ある規則 θ が与えられていて，直積集合 $X \times X$ の各元 (x, y) に対して，(x, y) がその規則を満足するかどうかが判定できるとき，θ を X の上の二項関係と呼ぶ．また $(x, y) \in X \times X$ が規則 θ を満たすとき，$x\theta y$ などと書く．[3)]

上の定義はやや抽象的に思えるかもしれません．具体的に例をあげてみます．例えば $A = B = \mathbb{R}$ としてみましょう．その時，直積集合 $A \times B$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ であり，これは高校数学で習うような $x - y$ 平面にほかなりません．$x - y$ 平面上の二点が「等しい点である」とは x 成分も y 成分も等しいときに限っていたのを思い出してもらえれば「順序対が等しい」とはどういうことなのかわかると思います．また $(1, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と $(0, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ が違う点であることはすぐにわかります．よって一般には $(a, b) \neq (b, a)$ だということもわかると思います．

二項関係についても $X = \mathbb{R}$ として具体的に見ていきます．例えば $x - y$ 平面で $3y > 2x$ を満たすような部分を塗りつぶすことは皆さんできると思います．[4)] これはつまり，$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の各元 (x, y) が，$3y > 2x$ を満たすかどうかを判定できるということにほかなりません．したがって，$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ が $3y > 2x$ を満足するときに $x\theta y$ と書くことにすればこれがまさに二項関係の具体例になっているとわかると思います．あるいは順序に限らず，$x\theta y$ を，「y が整数であり，x が y の倍数である」ことと定めてもいいし，「x が 3 の倍数であり，かつ y が無理数である」などと定めても良いわけです．

こんな抽象的でわかりにくい言葉を用いて何がしたかったのかを少し話すと，我々のよく知る「数の大小関係」を出発点にしつつ，その概念を少しだけ拡張したかったからです．そのために「二項関係」という言葉を定義する必要がありました．

[3)] つまり，二項関係とは直積集合 $X \times X$ の部分集合のことだ，と言える．

[4)] もちろんそのような領域は無限に広がっているので，厳密に「塗りつぶす」のはできないかもしれないが，まあとにかく一部だけでも塗りつぶすことはできる．

定義:半順序集合

L を集合とする．L の上の二項関係 $\leq$ が以下を満たす時，$(L, \leq)$ を半順序集合という．また，$\leq$ を L の上の半順序という．

$a, b, c \in L$ としたときに

条件 1(反射律): $a \leq a$

条件 2(推移律): $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$

条件 3(反対称律): $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$

また，簡単のために混乱の恐れがない場合に限り「$(L, \leq)$ が半順序集合である」ということを単に「L が半順序集合である」ということもある．加えて，「半順序集合」を単に「順序集合」,「半順序」を単に「順序」などと言うこともある．

これは我々の知っている「大小関係」みたいなものですね．「大小関係」らしくない点があるとすれば，L のどんな 2 つも比較できるかと言われるとそうとは限らない，という点が異なるわけです．任意の 2 元の比較可能性については次を見てみましょう．

定義:全順序集合

$(L, \leq)$ を半順序集合とする．L の任意の 2 元が比較可能な時，つまり $\forall a, b \in L$ に対して $a \leq b$ もしくは $b \leq a$ の少なくともどちらか一方が成立する時，$(L, \leq)$ を全順序集合という．

いくつか具体例を見てみましょう．

例 1: $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，順序は自然数に入る通常の順序とする．

- この時，半順序集合の定義をすべて満たしていることはすぐに分かる．また，今回は L の任意の 2 元が比較可能なので，これは特に全順序集合でもある．

例 2: $L = \{1, 2, 3, 4, 5, a\}$，順序は自然数に入る通常の順序とする．また a は他のどの元とも比較できないとする．

- この時，半順序集合の定義をすべて満たしていることはすぐに分かる．また，今回は L の元のうち，a だけ他のものとの比較ができないので，これは全順序集合ではない．

例 3: $L = \{1, 2, 3, 4, 5, a\}$，順序は自然数に入る通常の順序とする．ただし，a は $i = 1, 2, 3, 4, 5$ としたときに $i \leq a$ を満たすとする．

- この時，半順序集合の定義をすべて満たしていることはすぐに分かる．また，今回は L の任意の 2 元が比較可能なので，これは特に全順序集合でもある．

例 4: L は $\mathbb{C}^n$ の線形部分空間全体の集合とする．ただし，n は 2 以上の自然数とする．L の上の半順序は，$a,b \in L$ に対して $a \leq b$ を「a が b の部分空間である」こととして定める．

- この時，L が半順序集合であることは明らか．全順序集合でないことは，例えば $a = \{\alpha u \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$, $b = \{\beta v \mid \beta \in \mathbb{C}\}$，ただし $u, v \in \mathbb{C}^n$，ただし u, v は互いに一次独立 というものを持ってくれば良い．下図参照．

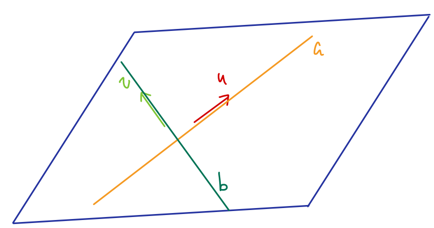


Figure 3.1: 例 4 に相当する図．ただし複素ベクトル空間ではなく実ベクトル空間として書いている．また見やすさのために a と u，b と v を少しずらして書いている．

上の例 2 と 3 からわかるとおり，順序集合というものは，集合によってのみ決まるものではなく，その上にどのような順序を我々が定義するかという点にも依存していることがわかると思います．

次に，半順序集合の「上界」などを定義しましょう．

定義:上界と下界

$(L, \leq)$ を半順序集合とする．

L のある部分集合 S とある L の元 a に対して，S のどんな元 x も $x \leq a$ となる時，a を S の上界であるという．

逆に，L のある部分集合 S とある L の元 a に対して，S のどんな元 x も $a \leq x$ となる時，a を S の下界であるという．

ここで，上界は (複数存在すれば) いくらでも大きく取れるし，下界は (複数存在すれば) いくらでも小さく取り直すことができるときもあります．また，そもそも上界もしくは下界，あるいはその両方が存在しないということもあります．例を見ましょう．

例 1: $L = \mathbb{R}$ とし，L の上の順序は通常の実数の大小関係と定める．また，$S = [0, 1]$ とする．

- 明らかに，S の上界の一つの例は 1 で下界の一つの例は 0 である．他に，上界として 3 を持ってきて，下界として -137 を持ってきても良い．

例 2: $L = \mathbb{R}$ とし，L の上の順序は通常の実数の大小関係と定め，$S = [0, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \infty\}$ とする．

- このとき，S に上界は存在しない．しかし下界は存在し，0 や -1 や -13.7 などが下界である．

例 3: L は $\mathbb{C}^n$ の線形部分空間全体の集合とする．ただし，n は 1 以上の自然数とする．L の上の半順序は，$a, b \in L$ に対して $a \leq b$ を「a が b の部分空間である」こととして定める．また，S は $\mathbb{C}^n$ の 1 次元の線形部分空間全体の集合とする．

- この時，S の上界は $\mathbb{C}^n$ である．また S の下界は一点集合 $\{0\}$ である．ただしここでの 0 はゼロベクトル，つまり $(0, 0, 0, \ldots, 0)$ を意味している．スカラーの 0 と記法が重複しているがさほど混乱の心配はないと判断し敢えて区別をすることはしない．

すべての例において，$\mathbb{C}^n$ の線形部分空間全体の集合というよくわからない難しい例を持ち出していますが，これにはちゃんと意味があります．量子力学において，「状態は Hilbert(ヒルベルト) 空間の元で書ける」という主張を目にしたことがあると思います．Hilbert 空間というのは，大まかに言えば内積の入ったベクトル空間です．それの一番わかりやすい例が $\mathbb{C}^n$ であるわけです．そして導入で述べた命題に対応する部分というものが，$\mathbb{C}^n$ の線形部分空間というわけなのです．したがって，$\mathbb{C}^n$ の線形部分空間全体というものは，なにか命題を考えるときに使えそうだ，となるわけです．この時点では色々と省略しているためよくわからないかも知れませんが，最後まで読んでいただければ理解できるはずです．

さて，話を戻すと，上の例 1 などで分かる通り，上界は存在すればいくらでも大きく取り直すことができるし，下界は存在すればいくらでも小さく取り直すことができることもあるわけです．したがって，本当に興味があるのは「一番小さい上界」や「一番大きい下界」であると予想されます．したがって，その興味あるものに名前をつけましょう．

定義:最小上界と最大下界

$(L, \leq)$ を半順序集合とし，S を L の部分集合とする．

S の上界全体の集合の最小元が存在する時，それを S の最小上界あるいは上限と呼ぶ．

同様に，S の下界全体の集合の最大元が存在するとき，それを S の最大下界あるいは下限と呼ぶ．

ただし，S に上界が存在しない場合，最小上界は存在しないものとする．下界についても同様．

ただし，半順序集合 A の最大元 a とは，A の任意の元 b に対して $b \leq a$ を満足するものであると定める．

同様にして半順序集合 A の最小元 c とは，A の任意の元 b に対して $c \leq b$ を満足するものであると定める．(これは全順序性を仮定していないことに注意．最大元や最小元以外の元同士の比較をしていないためである．)

先ほどと同じ例で最小上界や最大下界を確認してみましょう．

例 1: $L = \mathbb{R}$ とし，L の上の順序は通常の実数の大小関係と定める．また，$S = [0, 1]$ とする．

- この時，S の上界全体の集合は $[1,\infty[$ であり，したがってそれの最小元は 1 なので，最小上界は 1 である．同様に，S の下界全体の集合は $]-\infty,0]$ なので，最大下界は 0 である．

例 2: $L=\mathbb{R}$ とし，L の上の順序は通常の実数の大小関係と定め，$S=[0,\infty[=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\leq x<\infty\}$ とする．

- このとき，S に上界は存在しないため，最小上界も存在しない．最大下界は上と同じく 0.

例 3: L は $\mathbb{C}^n$ の線形部分空間全体の集合とする．ただし，n は 1 以上の自然数とする．L の上の半順序は，$a,b\in L$ に対して $a\leq b$ を「a が b の部分空間である」こととして定める．また，S は $\mathbb{C}^n$ の 1 次元の線形部分空間全体の集合とする．

- この時，S の上界は $\mathbb{C}^n$ であり，これが最小上界でもある．また S の下界は一点集合 $\{0\}$ であり，これが最大下界でもある．

以上より，例えばある順序集合の部分集合を見る時，その部分に対する最小上界や最大下界がそれぞれ存在するのかどうかが気になるというわけです．

さて，初めに言ったとおり，「束」というものを定義するためにいろいろな話を進めて来ました．ここまで来て，ようやく「束」の定義に入れます．

定義:束

$(L,\leq)$ を順序集合とする．ただし L は空でないとする．今後束の話をする限りにおいてすべて束は空集合ではないとする．L の 2 元 a,b を任意に取る．二点集合 $\{a,b\}=\{b,a\}$ に対して，いつも最小上界と最大下界が両方とも存在する時，$(L,\leq)$ を**束** (そく) という．英語では lattice(ラティス) という．
その時，$\{a,b\}$ の最小上界を $a\vee b$ と書き，「a と b の結び」と言う． また，$\{a,b\}$ の最大下界を $a\wedge b$ と書き，「a と b の交わり」と言う．
また，順序集合のときと同じように「$(L,\leq)$ を束とする」を単に「L を束とする」と表現することもある．

さて，いくつかの例を見てみましょう．

例 1: $L=\mathbb{R}$ とし，L の上の順序は通常の実数の大小関係と定める．

- この時，任意の L の元 a,b に対して，$\{a,b\}$ の最小上界は $\max\{a,b\}$ であり，最大下界は $\min\{a,b\}$ であることはすぐに分かる．したがって L は束になっている．

例 2: $L=\{1,2,3,4,5\}$ とし，L の上の順序は通常の実数の大小関係と定める．

- この時，任意の L の元 a,b に対して，$\{a,b\}$ の最小上界は $\max\{a,b\}$ であり，最大下界は $\min\{a,b\}$ であることはすぐに分かる．したがって L は束になっている．

例 3: $L=\{1,2,3,4,5,a\}$ とし，L の上の順序は通常の実数の大小関係と定める．また，a は他のどの元とも比較できないとしておく．

- この時，$i = 1, 2, 3, 4, 5$ とすると，$\{a, i\}$ というような集合の上界が存在しないことがわかる．実際，上界がもし存在すればそれは a 以上でかつ i 以上である必要があるが，順序の定義よりそのようなものが存在しないためである．したがって，L は束ではない．

例 4: L は $\mathbb{C}^n$ の線形部分空間全体の集合とする．ただし，n は 1 以上の自然数とする．L の上の半順序は，$a, b \in L$ に対して $a \leq b$ を「a が b の部分空間である」こととして定める．

- 実は L は束になっている．実際，$a, b \in L$ としたときに，$a \vee b := a + b,\ \ a \wedge b = a \cap b$ と定めれば良い．ただしここで，$a + b := \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in a,\ x_2 \in b\}$ と定める．

さて，束に関する性質をいくつか見てみましょう．

束の性質

$(L, \leq)$ を束とする．その時，以下が成立する．

$a, b, c \in L$ としたときに

性質 1(交換則): $a \vee b = b \vee a,\ \ a \wedge b = b \wedge a$

性質 2(結合則): $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c,\ \ a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

性質 3(吸収則): $a \vee (a \wedge b) = a,\ \ a \wedge (a \vee b) = a$

証明　まず交換則を証明する．$a \vee b$ は $\{a, b\}$ の最小上界であり，$b \vee a$ は $\{b, a\}$ の最小上界であったが，$\{a, b\} = \{b, a\}$ であるので，両者は一致する．残りも同様．

次に結合則を証明する．$a \vee (b \vee c)$ に注目すると，$b \vee c$ は $\{b, c\}$ の最小上界であり，これを d と書けば $a \vee (b \vee c) = a \vee d$ となる．$a \vee d$ は $\{a, d\}$ の最小上界であったので，これを e と書けば，$a \leq e,\ \ d \leq e$ となる．ここで，$b \leq d,\ \ c \leq d$ であるので，推移律より，$d \leq e$ ならば $b \leq e$ かつ $c \leq e$ となるが，実はこれの逆が成立する．実際，d は $b \leq x$ かつ $c \leq x$ となるような x のうち最小のものであったので，$b \leq e$ かつ $c \leq e$ ならば $d \leq e$ となるためである．よって，$a \leq e,\ \ d \leq e$ は実は $a \leq e,\ \ b \leq e,\ \ c \leq e$ と同値．したがって特に $a \leq e,\ \ b \leq e$ であることから，$\{a, b\} \leq e$ であり，これは $a \vee b \leq e$ に他ならない．更に $c \leq e$ であったので，まとめると，$(a \vee b) \vee c \leq a \vee (b \vee c)$ となる．次は $(a \vee b) \vee c$ に注目して同様の議論を繰り返せば逆向きの不等号が得られる．したがって，半順序の定義の 3 番 ($a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$) より，題意を得た．残りも同様．

最後に吸収則を証明する．まず，最小上界の定義より一般に $a \leq a \vee c$ であるので，c を $a \wedge b$ とすれば $a \leq a \vee (a \wedge b)$ となる．一方で，最大下界の定義より $a \wedge b \leq a$ であり，半順序の定義より $a \leq a$ なので，$a \vee (a \wedge b) \leq a \vee a = a$ となる．したがって半順序の定義の 3 番より題意を得た．残りも同様．　□

以上の性質は，束というものを半順序を用いて定義したときに成立する性質でした．しかし実は集合 L の

上で定義された，交換則と結合則及び吸収則を満足する抽象的な代数演算 $\vee$ と $\wedge$ が与えられたときに，それを用いて束を定義することもできます．それが以下の定理です．

定理:順序的な束と代数的な束の定義の同値性

集合 L の上に，$L \times L \to L$ なる抽象的な演算 $\vee$ と $\wedge$ が与えられていて，上に示した 3 つの性質 (交換則，結合則，吸収則) を満足するとする．その時，L の上に適切に半順序を定めることができ，L はその半順序に対して束となる．

証明　L の上の二項関係 $\leq$ を，$a \leq b$ とは $a = a \wedge b$ なることとして定義する．この時，$(L, \leq)$ が半順序集合になっていることをまず示す．

Step1:反射律が成立するか

$a \leq a$ を示すには，$a = a \wedge a$ を示せば良い．吸収則より，L の元 b を用いて $a = a \vee (a \wedge b)$ と書けるので，これを代入すると $a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge b))$ となる．ここで $a \wedge b$ を c と書くことにすると，$a \wedge (a \vee (a \wedge b)) = a \wedge (a \vee c)$ となるが，再び吸収則よりこれは a に等しい．したがって，$a \wedge a = a$ となり反射律が成立した．

Step2:推移律が成立するか

$a \leq b$ かつ $b \leq c$ を仮定する．まず，$a \leq b$ であるため，$a = a \wedge b$ となる．同じく $b \leq c$ なので，$b = b \wedge c$ となる．したがって，$a = a \wedge b = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c$ となるため，$a = a \wedge c$ となるが，これは $a \leq c$ にほかならない．よって推移律も成立した．

Step3:反対称律が成立するか

$a \leq b$ かつ $b \leq a$ を仮定する．先と同様に $a = a \wedge b$ であり，$b = b \wedge a$ であるが，交換則より $a \wedge b = b \wedge a$ なので，したがって $a = b$ を得た．よって以上より，L は半順序集合になっている．

Step4:最小上界と最大下界の存在

最大下界については最小上界の証明を繰り返すだけなので最小上界の存在についてのみ証明する．まずは上界の存在を示す．

吸収則より $a = a \wedge (a \vee b)$ であるが，これを $\leq$ を用いて書けば，$a \leq (a \vee b)$ と書ける．また，b についても同様にして $b \leq (a \vee b)$ と書ける．したがって，$a \vee b$ が二点集合 $\{a, b\}$ の上界になっている事がわかる．

次に，$\{a, b\}$ の別の上界 c を任意に持ってくる．このときに $a \vee b \leq c$ となれば，$a \vee b$ が $\{a, b\}$ の最小上界であることがわかるのでそれを示す．まず上界の定義より $a \leq c,\ \ b \leq c$ が成立するが，これ

は $a = a \wedge c, \quad b = b \wedge c$ と書ける．したがって，$a \vee c = (a \wedge c) \vee c = c$ となる．ただし 2 つ目の等号で吸収則を用いた．同様にして $b \vee c = c$ を得る．一方で Step1 と同様にして，$c = c \vee c$ を得るが，これに $c = a \vee c$ などを代入すれば，$c = c \vee c = (a \vee c) \vee (b \vee c)$ となるので，結合則と交換則より $c = (a \vee b) \vee (c \vee c) = (a \vee b) \vee c$ となる．したがって，$(a \vee b) \wedge c = (a \vee b) \wedge ((a \vee b) \vee c)$ と書けるが，吸収則より，これは $a \vee b$ に等しい．よって，$a \vee b = (a \vee b) \wedge c$ となるが，これは $a \vee b \leq c$ を意味する．よって $a \vee b$ が $\{a, b\}$ の最小上界であることがわかった． □

以上により，順序を用いて定義された束と，代数演算を用いて定義された束が実は同値であることがわかりました．したがって，以降束を考えるときに適宜自分の好きな方，考えやすい方を思い浮かべつつ考えていいということがわかります．以降私の趣味で順序を用いて束を定義したつもりで証明などを進めます．

さて，以上で束の定義や性質はわかりましたが，何も条件を課さない束はやや一般的すぎて，今回の話からは幾分それてしまいます．そこで，いくつかの条件を課した束というものを見ていきましょう．

定義:モジュラ束

L を束とする．L が以下の条件を満足する時，L を**モジュラ束**という．

任意の $M, N, K \in L$ に対して，もし $M \leq K$ ならば $M \vee (N \wedge K) = (M \vee N) \wedge K$

さて，途中で軽く触れたように，我々が最終的に興味を持っているのは Hilbert 空間がなす束であります．したがってそれのわかりやすい例として有限次元の時，つまり $\mathbb{C}^n$ の線形部分空間全体がなす束に対して，モジュラ束かどうかを確認してみましょう．

定理:$\mathbb{C}^n$ の線形部分空間のなす束はモジュラ束

L として，$\mathbb{C}^n$ の線形部分空間のなす束を考える．この時 L はモジュラ束である．

証明 $M \leq K$ を仮定する．半順序の性質より $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$ であったので，$M \vee (N \wedge K) = (M \vee N) \wedge K$ を示すには $M \vee (N \wedge K) \leq (M \vee N) \wedge K$ と $(M \vee N) \wedge K \leq M \vee (N \wedge K)$ の 2 つを証明すれば良い．

一応定義を確認しておくと，$M \wedge N = M \cap N$ であり，$M \vee N = M + N = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in M, \quad x_2 \in N\}$ である．

まず，$M \vee (N \wedge K) \leq (M \vee N) \wedge K$ を示す．$N \wedge K \leq N$ なので，$M \vee (N \wedge K) \leq M \vee N$ である．よって，$M \vee (N \wedge K) \leq K$ を示せば良いとわかる．しかしこれはすぐに分かる．実際， 仮定より $M \leq K$ で，更に $N \wedge K \leq K$ であるためである．よって $M \vee (N \wedge K) \leq (M \vee N) \wedge K$ を得た．(ここまでは任意の束に対して成立する議論である．)

次に $(M\vee N)\wedge K\leq M\vee(N\wedge K)$ を証明する．$x\in(M\vee N)\wedge K$ とする．この時, $\wedge$ の定義より $x\in(M\vee N)$ かつ $x\in K$ である．$x\in(M\vee N)$ なので，M のある元 y と N のある元 z を持ってきて，$x=y+z$ と書ける．したがって，$z=x-y$ となるが，ここで，$x\in K$ であり，仮定より $y\in M\subset K$ なので，x も y も K の元．ここで K が線形空間であったので，したがって $x-y$ も K の元になる．よって，$z\in K$ となる．しかし $z\in N$ でもあったので，よって $z\in N\cap K=N\wedge K$．よって，$x=y+z\in M\vee(N\wedge K)$ となる．したがって，$(M\vee N)\wedge K\leq M\vee(N\wedge K)$ が示された． □

次に，少し先のことを見据えて完備束というものを定義しましょう．その前に，なぜそれを定義するのかの説明を簡単にします．最終的に我々は「論理」や「命題」というものを考えたいというのがこの pdf の目標です．そこで，例えば「任意の x について，この命題が正しい」や「ある x に対して，この命題が正しい」ということも考えたいわけです．そのために，「任意」や「ある」という概念を定式化したいわけですね．そこで，まず「任意の自然数 x について，命題 $P(x)$ が正しい」という主張を考えてみましょう．ここで，「$P(x)$」と書いたものは各 x に対して真偽が定まる命題です．具体的には $P(x)$ は「x が実数である」などと思ってください．この場合，任意の自然数に対して確かにこの命題は正しいですね．これは全部を書いてしまえば，$P(1)$ が正しく $P(2)$ も正しく $P(3)$ も正しく... というふうに書くことができます．したがって，$\wedge$ で「かつ」を表すと思えば，$\forall x\in\mathbb{N},\ P(x)$ という主張は $P(1)\wedge P(2)\wedge\cdots$ とかけそうです．ただし今単に「$P(x)$」と書いた時，「$P(x)$ という主張が真である」を意味するものとしています．しかし，$P(1)\wedge P(2)\wedge\cdots$ というのは当然自然数が無限にあるので書ききることができません．そこで，それを $\displaystyle\bigwedge_{x\in\mathbb{N}}P(x)$ と省略して書いてしまいましょう．この記法は x が自然数全体を走る場合以外に対しても同様にして用いるとしましょう．

「任意」ではなく「ある」についてはどうでしょうか？例えば $P(x)$ を「x が 3 の倍数である」としてみましょう．たしかにある自然数 x に対してこれは正しい主張になっています．そこで，$\vee$ が「または」を表すと思えば，これは $P(1)\vee P(2)\vee P(3)\vee\cdots$ と書けそうだという気分になります．先ほどと同様にしてこれを $\displaystyle\bigvee_{x\in\mathbb{N}}P(x)$ と書くことにしましょう．これにより，「任意」や「ある」という概念を定式化できたような気分になります．ただし注意すべき点があります．$P(x)$ を束 L の，添字 x によって定まる元としたときに，I が有限集合 (元の数が有限な集合) であるとすれば，$\displaystyle\bigwedge_{x\in I}P(x)$ は L の元になっていることがわかります．一方で I が無限集合のとき，$\displaystyle\bigwedge_{x\in I}P(x)$ に対応する L の元が本当に存在しているかどうかはわかりません．そこで，どんな I に対しても $\displaystyle\bigwedge_{x\in I}P(x)$ などが存在する束のことを「完備束」といいます．

定義:完備束

L を束とする．L の任意の部分集合 $\{a_\alpha \mid \alpha \in I\}$ に対して，それの最小上界と最大下界がいつも存在する時，L を**完備束**と言う．また L が完備束であるときに $\{a_\alpha \mid \alpha \in I\}$ の最小上界を $\displaystyle\bigvee_{\alpha\in I} a_\alpha$ と書き，最大下界を $\displaystyle\bigwedge_{\alpha\in I} a_\alpha$ と書く．
また，束 L が任意の可算無限部分集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に対して，それの最小上界と最大下界がいつも存在する時，L を**σ 完備束**と言う．

上で「L の任意の部分集合」とした部分についてですが，特に有限集合ならば明らかに条件は成立することから特に無限集合について成立するかどうかが大事なわけです．上の定義から明らかに，完備束は σ 完備束[5]です．完備束について一つ定理を見てみましょう．

定理:完備束

完備束は最大元と最小元を持つ．

証明　完備束 L の任意の部分集合として L 自身を持ってくれば完備束の定義より $\displaystyle\bigwedge_{a\in L} a$ と $\displaystyle\bigvee_{a\in L} a$ が存在するが，それぞれが最小元と最大元になっている．　□

さて，少し前に，線形部分空間が命題に対応するという話をしました．話の都合上，一度それを受け入れてください．その時，例えばある命題があったとして，それが真なる部分を M と書いたときに，それが偽になるような部分はどのように書けるでしょうか．これを定式化するために，新しい概念を定義します．

定義:$\neg M$

L を $\mathbb{C}^n$ の線形部分空間がなす束とし，$M \in L$ とする．この時，M の直交補空間 $M^\perp$ は
$M^\perp = \{v \in \mathbb{C}^n \mid \forall u \in M, \ \ (u, v) = 0\}$
として定義されるが，これを $\neg M$ と定める．ただし $(u, v) := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}$ は内積である．

物理だと内積は $(u, v) := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} v_i$ とすることのほうが多いですが，どちらでも良いので今は上のように定義しましょう．さて，この $\neg$ についていくつかの性質を見てみましょう．

[5] あまり自信がないのだが，数学で「σ」という接頭辞は「可算無限」を表しているような感じがする．例えば測度論などで「σ-algebra」や「σ 加法性」という概念が出てくるがどちらも可算無限に対する性質を有している．

定理:¬ の性質

L を $\mathbb{C}^n$ の線形部分空間がなす束とする．この時，以下が成立する．

$M, M_1, M_2 \in L$ としたときに

性質 0: $\neg M \in L$

性質 1: $M \wedge (\neg M) = \{0\}$,　$M \vee (\neg M) = \mathbb{C}^n$

性質 2: $M_1 \leq M_2$ ならば $\neg M_2 \leq \neg M_1$

性質 3: $\neg(\neg M) = M$,　$\neg\{0\} = \mathbb{C}^n$,　$\neg\mathbb{C}^n = \{0\}$

証明　それぞれの性質について個別に証明していく．

性質 0 の証明

$\neg M$ が $\mathbb{C}^n$ の部分集合であることは明らかなので，線形空間であることを示せばいい．したがって，和とスカラー倍について閉じていて，かつ $0 \in \neg M$ を示せば良い．ただし重ねて注意するがここでの 0 はゼロベクトル，つまり $(0, 0, 0, \ldots, 0)$ を意味している．

任意の $u \in \mathbb{C}^n$ に対して，$0 = 0v$ なので，$(u, 0) = 0(u, v) = 0$ となる．よって，特に $u \in M$ とすれば，$0 \in \neg M$ がわかる．

$v, w \in \neg M$ とする．その時，任意の $u \in M$ に対して，$(u, v) = 0$,　$(u, w) = 0$ であるが，内積の線形性より $(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$ なので，$(u, v + w) = 0$ となり，よって和について閉じている．

$v \in \neg M$,　$\alpha \in \mathbb{C}$ とする．任意の $u \in M$ に対して $(u, \alpha v) = \overline{\alpha}(u, v) = \overline{\alpha}0 = 0$ なので，$\alpha v \in \neg M$ となる．

以上より，$\neg M$ は線形空間なので，よって題意を得た．

性質 1 の証明

まず前者を示す．$u \in M \wedge (\neg M)$ と仮定すると，$u \in M$ で，かつ $u \in \neg M$ なので，$(u, u) = 0$ となる．よって内積の公理より $u = 0$ となる．したがって $M \wedge (\neg M) = \{0\}$ である．

次に後者を示す．$\mathbb{C}^n$ の任意の元 x に対して，M と $\neg M$ のある元 y, z が存在して，$x = y + z$ と書けることを示したい．まず，M には正規直交基底が存在するので，それを $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ としておく．ここで，$y = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}(x, v_i)v_i$,　$z = x - y$ とする．これらが求めるものであることを示す．
任意の i に対して，(x, v_i) はただの複素数であり，したがって，$(x, v_i)v_i$ は M の元．よって y も M の元であることはわかる．

次に，$z \in \neg M$ を示す．そのためには，任意の $u \in M$ に対して，$(u,z) = 0$ を示せば良い．今 $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ が M の基底であると定めておいたので，任意の $u \in M$ は $u = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i$ と書くことができる．すると，$(u,z) = \sum_{i=1}^{m} a_i(v_i, z) = \sum_{i=1}^{m} a_i(v_i, x-y)$ となる．ここで $(v_i, x-y)$ を計算すると，$(v_i, x-y) = (v_i, x) - (v_i, y) = (v_i, x) - \sum_{j=1}^{m} \overline{(x, v_j)}(v_i, v_j) = (v_i, x) - \sum_{j=1}^{m} (v_j, x)\delta_{ij} = (v_i, x) - (v_i, x) = 0$ となるので，よって $(u,z) = 0$ とわかる．したがって $z \in \neg M$ となる．$x = y + z$ となることは定義より自明．したがって題意を得た．

少し補足をしておく．上で行ったような，$x \in \mathbb{C}^n$ を M と $\neg M$ の元の和で表すような表し方は実は一意である．実際，$x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$，$y_1, y_2 \in M$，$z_1, z_2 \in \neg M$ というように二種類の表示があったと仮定すると，$y_1 - y_2 = z_2 - z_1$ となるが，左辺は M の元で右辺は $\neg M$ の元なので，$y_1 - y_2, z_2 - z_1 \in M \cap \neg M$ となるが，$M \cap \neg M = \{0\}$ だったので，$y_1 = y_2$，$z_1 = z_2$ となる．

性質 2 の証明

$M_1 \leq M_2$ とすると，これは $M_1 \subset M_2$ である．$u \in \neg M_2$ とすると，任意の M_2 の元 v に対して，$(u,v) = 0$ となるが，特に v を M_1 から持ってくると，$u \in \neg M_1$ とわかる．

性質 3 の証明

まず，$a \in M$ を任意に取ってくる．任意の $b \in \neg M$ に対して，$(a,b) = 0$ となっていることから，$a \in \neg(\neg M)$ となるので，$M \leq \neg(\neg M)$ がわかる．次に逆の包含を示す．$a \in \neg(\neg M)$ とする．この時，特に $a \in \mathbb{C}^n$ であることから，性質 1 の 2 つ目の式を用いて，$a = a_1 + a_2$，$a_1 \in M$，$a_2 \in \neg M$ と分解することができる．ところで，a は $\neg(\neg M)$ の元であるので，$\neg M$ の任意の元と直交するので，特に a_2 とも直交する．つまり $(a, a_2) = 0$ となる．内積の線形性より，$(a, a_2) = (a_1, a_2) + (a_2, a_2) = 0 + \|a_2\|^2$ となるので，したがって $\|a_2\|^2 = 0$ となる．これは $a_2 = 0$ を意味し，したがって $a = a_1 \in M$ となるので，逆の包含も示された．残りの式は自明．実際，任意の $u \in \mathbb{C}^n$ との内積が 0 になるものはゼロベクトルしか無いので一番最後の式がわかる．真ん中の式は最後の式と最初の式を組み合わせればわかる．

さて，上で示した性質の特に 2 と 3 より以下が成立します．

定理:$\neg$ の性質 (De Morgan(ド・モルガン) の法則)

L を $\mathbb{C}^n$ の線形部分空間がなす束とし，$M_1, M_2 \in L$ とする．この時，以下が成立する．

$\neg(M_1 \wedge M_2) = (\neg M_1) \vee (\neg M_2)$，$\neg(M_1 \vee M_2) = (\neg M_1) \wedge (\neg M_2)$

証明　$\neg(M_1 \wedge M_2) = (\neg M_1) \vee (\neg M_2)$ の証明．

Step1: $(\neg M_1) \vee (\neg M_2) \leq \neg(M_1 \wedge M_2)$ を示す．

最大下界の定義より，$(M_1 \wedge M_2) \leq M_1$，$(M_1 \wedge M_2) \leq M_2$ である．したがって，上の定理の 2 より $\neg M_1 \leq \neg(M_1 \wedge M_2)$，$\neg M_2 \leq \neg(M_1 \wedge M_2)$ となるので, 最小上界の定義より $(\neg M_1) \vee (\neg M_2) \leq \neg(M_1 \wedge M_2)$ となる．

Step2: $\neg(M_1 \wedge M_2) \leq (\neg M_1) \vee (\neg M_2)$ を示す．

$y \in \neg((\neg M_1) \vee (\neg M_2))$ とすると，これは任意の $z \in (\neg M_1) \vee (\neg M_2)$ と直交する．$\vee$ の定義より $\neg M_1 \leq (\neg M_1) \vee (\neg M_2)$，$\neg M_2 \leq (\neg M_1) \vee (\neg M_2)$ なので，y は特に任意の $\neg M_1$ の元と直交し，更に任意の $\neg M_2$ の元とも直交する．よって，$y \in (\neg(\neg M_1)) \wedge (\neg(\neg M_2))$ となる．上の定理の 3 より，これは $M_1 \wedge M_2$ にほかならず，したがって $\neg((\neg M_1) \vee (\neg M_2)) \leq M_1 \wedge M_2$ となる．あとは両辺に $\neg$ を作用させて，上の定理の 2 と 3 を用いれば題意を得る．

以上より題意を得た．残りも同様にしてやれば良い． $\square$

さて，上の性質はいかにも De Morgan の法則と同じと思えそうです．De Morgan の法則と違う点があるとすれば，$\neg$ ではなくて補集合だったという点くらいでしょう．しかし，上の定理によって，我々が線形空間の上で命題を考える時，$\neg$ というものが集合で言うところの補集合，つまりある命題が成立しないもの全体の集まりであるとみなせそうです．

さて，具体的に直交補空間によって $\neg$ を定義しましたが，一般化しましょう．

定義:一般化した ¬(直補元)

L を最大元と最小元を持つ束とする．最大元を”1_L”，最小元を”0_L”と書くことにする．この時，もし以下の 3 条件を満たす L から L への写像 $\neg$ が存在し，L の各元 M に対して $\neg M$ が定まる時，L を直可補束といい，$\neg M$ は M の直補元と呼ぶ．

$M, M_1, M_2 \in L$ としたときに

条件 1: $M \wedge (\neg M) = 0_L$，$M \vee (\neg M) = 1_L$

条件 2: $M_1 \leq M_2$ ならば $\neg M_2 \leq \neg M_1$

条件 3: $\neg(\neg M) = M$

さて，上のようにして一般に $\neg$ という構造を束の中に入れることができました．今のところ，束の中には，もとから入っている順序”$\leq$”と順序から定まる”$\vee$”,”$\wedge$”及び”$\neg$”という構造が入っていることになります．あるいは束を代数的に捉えるならもとから入っている代数演算”$\vee$”,”$\wedge$”と代数演算から定まる”$\leq$”及び”$\neg$”という構造が入っているとみなしてもいいわけです．この 4 つを使って，新しい束を定義しましょう．

定義:オーソモジュラ束

L を直可補束とする．L が以下の条件を満足する時，L を**オーソモジュラ束**という．

任意の $M, N \in L$ に対して，もし $N \leq M$ ならば $M = N \vee (M \wedge (\neg N))$

さて，以上によりオーソモジュラ束[6]というものが定義できました．具体的にオーソモジュラ束というものはどういう物があるでしょうか．

定理:オーソモジュラ束の具体例

L を $\mathbb{C}^n$ の部分空間全体のなす束とする．L はオーソモジュラ束である．

証明　$N, M \in L,\ \ N \leq M$ とする．この時，$M \wedge (\neg N) \leq M$ であり，さらに仮定より $N \leq M$ なので，したがって最小上界の定義より $N \vee (M \wedge (\neg N)) \leq M$ である．(ここまでは一般の束に対して成立する．) したがって，あとは $M \leq N \vee (M \wedge (\neg N))$ を示せば良い．$x \in M$ とする．この時，特に $x \in \mathbb{C}^n$ なので，$x = y + z,\ \ y \in N,\ \ z \in \neg N$ と分解することができる．その時，$N \leq M$ なので，$y \in M$ でもある．したがって，$x - y \in M$ となり，$z \in M$ となる．よって $z \in M \wedge (\neg N)$ となるが，$y \in N$ であったので，$y + z \in N \vee (M \wedge (\neg N))$ となり，$M \leq N \vee (M \wedge (\neg N))$ が示された．　$\square$

さて，最後に分配束というものを定義します．

定義:分配束

L を束とする．L が以下の条件を満足する時，L を**分配束**という．

任意の $M, N, K \in L$ に対して，$M \vee (N \wedge K) = (M \vee N) \wedge (M \vee K)$

さて，今までよく考えていた (量子系における命題と対応しているらしい) 線形部分空間のなす束は分配束になっているでしょうか？

定理:線形部分空間

L を $\mathbb{C}^n$ の部分空間全体のなす束とする．ただし $n \geq 2$ とする．L は分配束ではない．

証明　実際に反例を一つ挙げれば良い．$u = (1, 0, 0, 0, \cdots),\ \ v = (0, 1, 0, 0, \cdots),\ \ w = (1, 1, 0, 0, \cdots)$ とし，M, N, K はそれぞれ u, v, w の貼る一次元の線形空間とする．この時，v と w が平行ではないので，$N \wedge K = \{0\}$ である．したがって $M \vee (N \wedge K) = M$ となる．一方，$C^2 := \{(a, b, 0, 0, \cdots) \mid a, b \in \mathbb{C})\}$ としておけば，$M \vee N = M \vee K = C^2$ であるので，$(M \vee N) \wedge (M \vee K) = C^2 \neq M = M \vee (N \wedge K)$ となる．　$\square$

---

[6] 名前は似ているが，オーソモジュラ束とモジュラ束は別物である

分配束を最後に定義してしまいましたが，実は分配束とモジュラ束は密接に関連しています．それが以下の定理です．

定理:分配束はモジュラ束である

L を束とする．L が分配束であるなら L はモジュラ束である．

証明　$M, N, K \in L$ を任意に持ってくる．ただし $M \leq K$ とする．L が分配束であるので，$M \vee (N \wedge K) = (M \vee N) \wedge (M \vee K)$ を満たすが, $M \leq K$ であるので, $M \vee K = K$ となる．したがって, $M \vee (N \wedge K) = (M \vee N) \wedge K$ となるが，これは L がモジュラ束であることを意味する．　$\square$

3.2 量子論で用いる解析学について

さて，数学の方で特に必要な言葉は最低限定義できました．今から少しずつ物理の方に戻ります．そのために，量子力学の一番最初に聞く「状態がベクトルで表される」あるいは「函数はベクトルである」という主張を改めて見直してみましょう．

定義:ベクトル空間

K を係数体とする．(K は $\mathbb{R}$ もしくは $\mathbb{C}$ と思えば良い．) 集合 X が以下の条件を満足する時，X は K 上のベクトル空間あるいは線形空間 [7] であるという．

$u, v, w \in X$ と $a, b \in K$ に対して，$u + v \in X$(和) 及び $au \in X$(スカラー倍) が定義されており，(この，和とスカラー倍を施したものが再び X の元になっているという性質を，「和とスカラー倍について閉じている」などと表現する．)

性質 1(和の結合法則): $(u + v) + w = u + (v + w)$

性質 2(和の交換法則): $u + v = v + u$

性質 3(ゼロベクトルの存在): ある特別な $0 \in X$ が存在し，
任意の $u \in X$ に対して $0 + u = u$ となる．

性質 4(逆元の存在): 任意の $u \in X$ に対して，ある $u' \in X$ が存在し，$u + u' = 0$ となる．
この u' を特に $-u$ と書く．

性質 5(スカラー倍の結合法則): $(ab)u = a(bu)$

性質 6: $1u = u$

性質 7(ベクトルの分配法則): $a(u + v) = au + av$

性質 8(スカラーの分配法則): $(a + b)u = au + bu$

この時，X の元をベクトル，K の元をスカラーなどと呼ぶ．

さて，我々のよく知っている $\mathbb{C}^n$ などは特に「数ベクトル空間」などとも呼ばれますが，これが上のベクトル空間の定義を満たしていることはすぐに分かります．逆に，数ベクトル空間でなくても和とスカラー倍が定義されており，上のすべてを満足するならばそれは「ベクトル空間である」と言えるわけです．さて，その上で函数はベクトルとみなせるでしょうか？

量子力学を念頭に置いているため，函数と言っても何でもかんでも持ってきて良いと許すのは少々厳しいです．そこで，函数の「枠組み」のようなものを先に定めてしまいましょう．量子力学において，1 粒子の波動函数の絶対値を二乗したものは確率密度と思えて，したがって全体に渡って積分[8]したものは 1 になっている，

---

[7] なんらかの形容詞 (「部分」や「内積」) がかかる場合は単に空間と言ったりする．

[8] 本来はこの積分は Lebesgue(ルベーグ) 積分というものを通して定義される．今回はそこをあまり深く掘り下げないので通常の Riemann

というのはよく聞く話です．したがって，例えば $\mathbb{R}$ 上の $f(x) = x$ のような函数は今枠組みから省いてしまっても差し支えないでしょう．そこで，L^2 空間[9] と呼ばれるものを以下のように定義します．

定義:L^2 空間

Ω を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とする．Ω の上で二乗可積分な函数全体の集合を $L^2(\Omega)$[10] と書く．
つまり，$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_\Omega |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$ とする．
混乱の恐れがない場合に限り $L^2(\Omega)$ を L^2 と略記することもある．

ここで，積分の値が有限であることは課しましたが，=1 になることまでは課していません．実は $L^2(\Omega)$ がベクトル空間になっていて，そのため (積分値が 0 でない限り) 適宜 $f(x)$ を何倍かしてやることでいつでも積分値を 1 にできるからです．余談ですが，二乗なので L^2 と書いたわけです．もし三乗可積分なものを考えるなら L^3 などと書きます．

さて，今すでに結論を言ってしまいましたが，$L^2(\Omega)$ がベクトル空間になっていることをちゃんと確かめてみましょう．

定理:L^2 空間はベクトル空間である

$f, g \in L^2(\Omega)$ と，$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$，$(\alpha f)(x) := \alpha(f(x))$ と定める．その時 $L^2(\Omega)$ はベクトル空間になっている．

証明　Step1:和とスカラー倍で閉じているか

まず，$f, g \in L^2(\Omega)$ に対して，$f+g$ が $L^2(\Omega)$ に入っていることを確かめる．

$|f(x)+g(x)|^2 \leq (|f(x)|+|g(x)|)^2 \leq 2(|f(x)|^2+|g(x)|^2)$ が示せれば十分である．実際，もしこれが成立するならば，$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^2 dx \leq 2\int_\Omega |f(x)|^2 dx + 2\int_\Omega |g(x)|^2 dx$ となっており，右辺は $f, g \in L^2(\Omega)$ であることから有限であるとわかるので，左辺が有限になっており，それは $f+g \in L^2(\Omega)$ を意味するためである．

$t \geq 0$ に対して，函数 $(1+t)^2/(1+t^2)$ というものを考える．これは $t=1$ で最大値 2 を取るので，$(1+t)^2/(1+t^2) \leq 2$ となる．ここで $a, b \geq 0$ に対して $t = b/a$ とおけば $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ となる．

積分と同じと思って差し支えない．

[9] ここでの L という文字は Lebesgue に由来する．束の L とは無関係である．

[10] 本来は Lebesgue 積分を通して定義するため，「ほとんど至るところ」同じ函数を同一視したりする．このことは「ほとんど至るところ」同じ波動函数を同一視することにつながっていて，物理的にも意味を持っているのだが紙面の都合上どうしても省かざるを得なくなってしまった．

$|f(x)+g(x)|^2 \leq (|f(x)|+|g(x)|)^2 \leq 2(|f(x)|^2+|g(x)|^2)$ のうち，1 つ目の不等号は自明であり，2 つ目の不等号は，$|f(x)|=a,\ \ |g(x)|=b$ としてやれば $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ から従う．

したがって，$f+g \in L^2(\Omega)$ がわかる．

次に，$\alpha \in \mathbb{C}$ と $f \in L^2(\Omega)$ に対して，$\alpha f \in L^2(\Omega)$ を確かめる．

$$\int_\Omega |(\alpha f)(x)|^2 dx = \int_\Omega |\alpha (f(x))|^2 dx = \int_\Omega |\alpha|^2 |f(x)|^2 dx = |\alpha|^2 \int_\Omega |f(x)|^2 dx < \infty$$

となるので，$\alpha f \in L^2(\Omega)$ がわかる．

Step2:ベクトル空間の定義を満たしているか.

ゼロベクトルとして恒等的に 0 という函数を持ってきて，$-f$ を $(-f)(x)=-(f(x))$ と定めれば良い．

他の性質を満たしていることは直ちに分かる．　□

上の定理によって，ちゃんと「函数がベクトルである」ということがわかりました．その上で，Hilbert 空間というものを定義するためにノルムや内積というものを考えましょう．

定義:ノルム

X を，K を係数体とする一般のベクトル空間とする．X の任意のベクトル u に対して，実数 $\|u\|$ が対応していて，以下の 4 条件を満足する時，X にノルムが定義されているといい，$\|u\|$ を u のノルムという．

$u, v \in X$ と $\alpha \in K$ に対して，

条件 1(正定値性): $\|u\| \geq 0$

条件 2(非退化性): $\|u\|=0$ であれば $u=0$ であり，また逆に $u=0$ であるなら $\|u\|=0$

条件 3(斉次性): $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$

条件 4(劣加法性，三角不等式): $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$

ノルムの定義されたベクトル空間を，ノルム空間という．いつものように，本来は $(X, \|\cdot\|)$ の組をノルム空間と呼ぶが，混乱の恐れがないときに限り「X がノルム空間である」という．

さて，例を見てみましょう．

例 1: $X=\mathbb{R}$ とし，$u=X$ に対して，$\|u\|=|u|=(u$ の絶対値$)$ と定めるとこれはノルム空間になっている．

- 証明は省略する．

例 2: $X=\mathbb{R}^3$ とし，$u=(u_1,u_2,u_3) \in X$ に対して，$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} |u_i|^2}$ と定めるとこれはノルム空間になっている．

- 証明は省略する．

例 3: $X=\mathbb{R}^3$ とし，$u=(u_1,u_2,u_3)\in X$ に対して，$\|u\|_1=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}|u_i|$ と定めるとこれはノルム空間になっている．

- 劣加法性以外は自明．劣加法性も成分ごとの劣加法性に書き換えることですぐに分かる．

例 4: $X=C([a,b])=([a,b]$ 上で連続な函数全体$)$ とし，$u\in X$ に対して，$\|u\|_2=\sqrt{\displaystyle\int_a^b|u(x)|^2dx}$ と定めるとこれはノルム空間になっている．ただし，a も b も有限の数とする．

- 証明は省略する．

例 5: $X=C([a,b])=([a,b]$ 上で連続な函数全体$)$ とし，$u\in X$ に対して，$\|u\|_1=\displaystyle\int_a^b|u(x)|dx$ と定めるとこれはノルム空間になっている．ただし，a も b も有限の数とする．

- 証明は省略する．

例 6: $X=L^2(\Omega)$ とし，$u\in X$ に対して，$\|u\|_2=\sqrt{\displaystyle\int_\Omega|u(x)|^2dx}$ と定めるとこれはノルム空間になっている．ただし，Ω は $\mathbb{R}^d$ の部分集合とする．

- 証明は省略する．

上の例でわかるように，ベクトル空間が同じであってもその上に複数のノルムを定義することができます．さて，ノルムはある 2 つのものが「どの程度近いのか」ということを表す値です．そこで，「どんどん間隔が狭まっていく点の列」や「ある点に無限に近づく点の列」というものを考えることができるようになります．それらを定義しましょう．

定義:Cauchy 列及び収束列

X をノルム空間とする．$u_n\in X\ \ (n=1,2,3,\cdots)$ に対して，$\displaystyle\lim_{n,m\to\infty}\|u_n-u_m\|=0$ となる時，$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は **Cauchy(コーシー) 列**であるという．
また，X の点列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $u\in X$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|=0$ となる時，$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列であるといい，この時 u は $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限であるという．これを $\displaystyle\lim_{n\to\infty}u_n=u$ や $u_n\to u\ (n\to\infty)$ などと書く．また誤解の恐れがないときには $u_n\to u\ (n\to\infty)$ を単に $u_n\to u$ とも書く．

Cauchy 列と収束列が違う概念であるということは大学一年の数学で習ったと思いますが，一応復習のため，一つだけ例を見てみましょう．

例: $X=[0,1[$ とし，$u=X$ に対して $\|u\|=|u|$ としてノルムを定める．

この時，$u_1=0.9,\ \ u_2=0.99,\ \ u_3=0.999,\ \ \cdots,\ \ u_n=0.99\ldots9$ (9 が n 個ある) と定めると，これは Cauchy 列であるが収束列ではない．

- Cauchy 列であることの証明は省略．収束先は (より広い空間を考えれば) 明らかに 1 だが，$1 \notin X$ なので，これは X の中では収束先を持たず，したがって収束列ではない．

さて，上の例で分かる通り，任意のノルム空間に対し，任意の Cauchy 列が収束するわけではありません．そこで，完備性[11)]という概念を定義します．

定義:完備性

X をノルム空間とする．X の任意の Cauchy 列が X の中に極限を持つ時，X は完備であるという．また，完備なノルム空間を **Banach(バナッハ) 空間**という．

先程見た例では X が完備ではないというわけです．さて次に一般的な内積を定義します．今まで何度か内積は用いましたが，それらはすべて数ベクトル空間の内積でした．今から考えたいのは函数を元に持つベクトル空間なので，その定義は使えないためです．

定義:内積

X を，$\mathbb{C}$ を係数体とするベクトル空間とする．X の任意の 2 つの元 u, v に対して複素数 (u, v) が対応しており，以下の 5 つの条件を満足する時，X に内積が定義されているといい，(u, v) を u, v の内積という．またその時 X を内積空間という．

任意の $u, v, w \in X$ と任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

条件 1(エルミート対称性): $(u, v) = \overline{(v, u)}$

条件 2(第一引数に対する線形性 1): $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$

条件 3(第一引数に対する線形性 2): $(u + w, v) = (u, v) + (w, v)$

条件 4(正定値性): $(u, u) \geq 0$

条件 5(非退化性): $(u, u) = 0$ であるなら $u = 0$ であり，逆に $u = 0$ ならば $(u, u) = 0$

我々のよく知っている数ベクトル空間の上の通常の内積がこの条件を満足していることはすぐに分かります．函数に対してはどうでしょうか．例えば $f, g \in L^2(\Omega)$ に対して，$(f, g) := \displaystyle\int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx$ と定めれば，この積分が絶対収束し更に上の五条件を満足することがわかります．したがって函数に対しても内積を定義することができました．

さて，次に内積とノルムの関係を見てみます．

11) 完備性という言葉は数学でいろいろな意味で使われる．したがって，「完備性」と書かれてあっても今回定義した意味とは異なる意味である可能性があることには注意されたい．実際，先程定義した「完備束」という言葉での「完備性」は今回の実数の完備性とは異なる定義である．

定理:内積とノルムの関係

X を内積空間とする．任意の $u \in X$ に対して，$\|u\| = \sqrt{(u,u)}$ と定めると，これは X の上のノルムとなる．これを便宜的に「内積から導かれるノルム」と呼ぶことにする．

証明　そのように定義した $\|\cdot\|$ が劣加法性以外を満たしていることはすぐに分かる．劣加法性については Schwarz の不等式より従う．Schwarz の不等式の証明は省略する．　□

最後に Hilbert 空間というものをちゃんと定義しましょう．

定義:Hilbert 空間

X を内積空間とする．X が内積から導かれるノルムに対して完備であるとき，X を **Hilbert 空間**であるという．

以上により，量子力学を記述するための言葉は最低限定義できました．その上で，「状態は Hilbert 空間の元で書ける」という主張を見直してみます．

定理:$L^2(\Omega)$ は Hilbert 空間である

Ω を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とし，$X = L^2(\Omega)$ とする．ただし d は 1 以上の自然数である．この時，$f, g \in X$ に対して，$(f,g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx$ とすると，これは内積になっていて，更にこの内積から導かれるノルムに対して X は Hilbert 空間になっている．

証明　(f,g) が内積になっていることは先に述べた．また，完備性についてであるが，証明には Lebesgue 積分の定理をいくつか用いる必要があるため省略する．気になる人は函数解析の入門書などを参考にしていただきたい．具体的には「Lebesgue の優収束定理」と呼ばれる定理などを主に用いて証明する．　□

さて，紙面の都合で省略した部分も多いですが以上により「量子状態は Hilbert 空間の元で記述される」という主張が確認できました．[12)][13)]

後のために，一つだけ用語を定義しましょう．

---

12) 量子力学に慣れた人は，例えば $\mathbb{R}$ 上の平面波 $(\exp(ikx))$ などが $L^2(\mathbb{R})$ の元でないことに気づいたかも知れない．その問題は大変に難しいので今回は触れないことにする．

13) $\phi \in L^2(\Omega)$ を $|\phi\rangle$ と書けばケットはうまく定義された．ではブラはどのように定義されるかというと，これは実は $L^2(\Omega)$ 上の汎函数 ($L^2(\Omega) \to \mathbb{C}$ なる函数) として定義される．そして，Riesz(リース) の表現定理という定理により，Hilbert 空間上の汎函数はすべて Hilbert 空間のある元と同一視することができる．その定理によりブラケット記法の正当性が担保されている．

定義:部分空間の生成

X を複素線形空間，A を X の空でない部分集合とする．A から有限個のベクトル $u_1, \cdots, u_n$ を任意に取り出し，それらの線形結合 $v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k$ を作る．ここで取り出すベクトルの数 n と取り出すベクトル u_k 及び係数 α_k を任意に変えてベクトルを作り，そのようにして作られるベクトル全体の集合を $\mathrm{span}(A)$ と書く．

つまり，$\mathrm{span}(A) = \left\{ v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k \;\middle|\; n = 1, 2, \cdots, \quad u_k \in A, \quad \alpha_k \in \mathbb{C} \right\}$ である．

3.3 量子論理について

さて，今まで定義した函数論の言葉を用いつつ束の話に戻りましょう．今までは束として $\mathbb{C}^n$ の線形部分空間からなるものを考えていましたがこれを新しく定義し直します．

定義:量子論理

有限次元あるいは可分[14)]な無限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を一つ固定する．$\mathcal{H}$ の閉部分空間全体を Q と書く．これを量子論理と呼ぶ．ただし閉部分空間とは，集合として $\mathcal{H}$ の中で閉であるような線形部分空間のことである．

$M_1, M_2 \in Q$ に対して，$M_1 \le M_2$ を，$M_1 \subset M_2$ であることとして定めると，これは Q の上の半順序になっており，Q はこの半順序に対して束をなす．また，$\mathcal{H}, \{0\} \in Q$ であり，したがって Q は最大元と最小元を持つので，$\neg$ を考えることもでき，$M \in Q$ に対し $\neg M$ を $\{u \in \mathcal{H} \mid \forall v \in M, \quad (u, v) = 0\}$ として定めるとこれは $\neg$ の定義を確かに満たす．また，$\mathcal{H} \in Q$ を 1_Q，$\{0\} \in Q$ を 0_Q などと呼ぶこともある．

量子論理というものがこれで定義されました．$\mathbb{C}^n$ のときと違うのは「閉」部分空間を考えているという点です．これはもし $\mathcal{H}$ が無限次元だったときのために書いているものであり，あまり深く気にしないでも構いません．我々が Q を論理であると考える時，1_Q は真を意味し，0_Q は偽を意味し，それ以外の元は真でも偽でもない中間の真理値を与えるものであると考えることができそうです．さて，すでに Q には順序が定まっていますが，この時”$\vee$”や”$\wedge$”はどのように与えられるでしょうか．確認してみましょう．また，以降単に Hilbert 空間といったときには有限次元あるいは可分な無限次元 Hilbert 空間を考えることにします．

14) 高々可算な基底があるという意味だと思えば良い．あまり深く気にしなくてもいい．

定義:量子論理の上の $\vee$ と $\wedge$

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を一つ固定し，Q をその上の量子論理とする．$M_1, M_2 \in Q$ に対し，$M_1 \vee M_2 = \overline{M_1 + M_2} = \overline{\{x_1 + x_2 \mid x_1 \in M_1,\ \ x_2 \in M_2\}}$ とし，$M_1 \wedge M_2 = M_1 \cap M_2$ とすると，これは Q の上の順序と整合的である．ただし，$\overline{M_1 + M_2}$ は $M_1 + M_2$ の，$\mathcal{H}$ のノルムに対する閉包を意味する．

ただしノルム空間 X の部分集合 M と $x \in X$ に対して，$d(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|$ として点と集合の距離を定めたときに，$d(x, M) = 0$ となる点すべての集合を M の閉包と呼ぶ．

上の $\vee$ の定義でもやはり閉包を取っていました．これも $\mathcal{H}$ が無限次元のときのために取っているだけで，あまり深く気にしなくても構いません．[15][16]

さて，量子論理が束であることはすぐにわかります．では，それ以上の構造を持つでしょうか．見ていきましょう．以下，Hilbert 空間の係数体を $\mathbb{C}$ とします．ただし，$M_1 + M_2 + M_3 + \cdots$ を $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$ と略記することにします．本来これは直和の記号であり，その意味では間違った使い方をしていますが，目をつぶりましょう．

定理:量子論理は σ 完備である

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を一つ固定し，Q をその上の量子論理とする．そのとき，Q は σ 完備束である．

証明　$M_n \in Q$ $(n \in \mathbb{N})$ とする．

まず，最大下界が Q の中に存在することを示す．閉集合の公理より，$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$ は閉集合である．したがって任意の $u, v \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$, と任意の $a \in \mathbb{C}$ に対して，$au + v \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$ ならば $\{M_n\}$ の下界が Q の中に存在するとわかる．なぜならもし $au + v \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$ が示せたならば $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$ が $\mathcal{H}$ の閉部分空間になっており，かつ任意の M_m の部分空間になっているためである．しかし，$u, v \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$, より，任意の自然数 m と任意の複素数 α に対して，$au + v \in M_m$ であり，したがって $au + v \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$ がわかる．最後に最大性を見る．つまり $\{M_n\}$ の下界を任意に持ってきたときに，それが $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$ に含まれることを示せば良い．$\{M_n\}$ の任意の下界を N とする．このとき，定義より任意の n に対して，N は M_n の部分集合になっている．したがって，$N \leq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$ と

---

[15] 例えば Hilbert 空間として二乗総和が有限になるような数列空間 $\ell^2 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$ を持ってきておいて，それの標準的な基底を $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ とする．ただしこの脚注では自然数は $\{0, 1, 2, \cdots\}$ としている．その上で $x_n := e_{2n}$，$y_n := e_{2n} + e_{2n+1}/(n+1)$ と定め，M は $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の貼る空間の閉包，N は $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の貼る空間の閉包と定めたときに，$M + N$ の閉包は X 自身に一致するが，$z := \sum_{n=0}^{\infty} e_{2n+1}/(n+1)$ は $M + N$ には属していない．

[16] それならいっそのこと，Q を $\mathcal{H}$ の部分空間全体のなす束と定義すればいいと思われるかも知れないが，実は部分空間 M が閉でなくても直交補空間 $\neg M$ はいつも閉になってしまう．したがって $\neg(\neg M)$ も閉になるので $\neg(\neg M) = M$ となるために閉であることが重要となるわけである．

なるので，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n$ が最大下界であることがわかる．よって $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n$ を $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} M_n$ と書けば良い．

次に最小上界を考える．$\overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n}$ は明らかに閉集合．また，閉包の定義より，任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $u \in \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n}$ に対して，ある $u_\varepsilon \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$ が存在し，$\|u - u_\varepsilon\| < \varepsilon$ となる．この u_ε は，$u_\varepsilon = u_\varepsilon^{(1)} + u_\varepsilon^{(2)} + u_\varepsilon^{(3)} + \cdots$，$u_\varepsilon^{(n)} \in M_n$ と書くことができる．(ただしこのような分解は一般に一意とは限らない．) これは任意の $v \in \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n}$ に対しても全く同様である．今，任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，$\alpha u_\varepsilon + v_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_\varepsilon^{(n)} + v_\varepsilon^{(n)}$，$\alpha u_\varepsilon^{(n)} + v_\varepsilon^{(n)} \in M_n$ となる．ただし後半の式は M_n がベクトル空間であることからわかる．よって，$\|\alpha u + v - (\alpha u_\varepsilon + v_\varepsilon^{(n)})\| \leq |\alpha|\|u - u_\varepsilon^{(n)}\| + \|v - v_\varepsilon^{(n)}\| \leq (1 + |\alpha|)\varepsilon$ となるので，$\alpha u + v \in \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n}$ がわかる．よって，これは Q の元であり，更に $\{M_n\}$ の上界になっている．次に最小性だが，任意に $\{M_n\}$ の上界 R を持ってくると，これは任意の M_n に対して，$M_n \leq R$ を満たすため，$u_n \in M_n$ と係数 $\alpha_n \in \mathbb{C}$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ がもし収束しているなら，これが R に入らねばならない．したがって $\overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n} \leq R$ となり，最小性も示された． □

定理:量子論理はオーソモジュラである

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を一つ固定し，Q をその上の量子論理とする．そのとき，Q はオーソモジュラ束である．

証明　証明は $\mathbb{C}^n$ の部分空間のなす束がオーソモジュラであることの証明と全く同様である． □

以上により，量子論理は σ 完備オーソモジュラ束であることがわかりました．[17] さて，我々はモジュラ束や分配束という他の束も定義をしていました．量子論理はモジュラ束だったり分配束だったりするでしょうか？

定理:量子論理はモジュラ束ではない

無限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を一つ固定し，Q をその上の量子論理とする．そのとき，Q はモジュラ束ではない[18]．

証明　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，それの正規直交基底を $\{e_n\}_{n=1,2,\cdots}$ とする[19]．ここで，$n = 1, 2, \cdots$ に対し，$x_n := \frac{e_1}{10^n} + e_{2n} + \frac{e_{2n+1}}{10^{2n}}$，$y_n = e_{2n}$ と定め，$A := \overline{\mathrm{span}\{x_n\}}$，$B := \overline{\mathrm{span}\{y_n\}}$，$C := \overline{\mathrm{span}\{e_1, x_n\}}$ と定める．この時 $A \leq C$ は明らかに成立する．また，$A \vee B = \overline{A + B} = \mathcal{H}$ となることもすぐに分かる．したがって

17) 厳密には σ 完備オーソモジュラ束を論理と呼ぶため，上の 2 つの定理を証明して初めて量子「論理」と呼ぶことができる．

18) 有限次元のときはモジュラ束であったことを思い出してみると，有限次元と無限次元は大きく異なることがわかる．

19) $\{e_n\}$ の存在は Zorn の補題より従う．

$(A \vee B) \wedge C = C$ となる．一方で，$B \wedge C$ を考える．$x \in B \wedge C$ とすると，特に $x \in B$ なので，$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_{2n}$ と書ける[20]．一方で $x \in C$ でもあるので，$x = ce_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = ce_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{e_1}{10^n} + e_{2n} + \frac{e_{2n+1}}{10^{2n}} \right) = \left(c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{10^n} \right) e_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(e_{2n} + \frac{e_{2n+1}}{10^{2n}} \right)$ となるが，x の 2 つの表式に対し，e_{2m-1} との内積を取ると，x を B の中で展開したものは 0 になるが，x を C の中で展開したものは c_n あるいは $\left(c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{10^n} \right)$ となるので，比較して $x = 0$ となる．これは $B \wedge C = \{0\}$ を意味する．したがって，$A \vee (B \wedge C) = A$ となるが，$e_1 \notin A$ である一方，$e_1 \in C$ なので，$A \neq C$ となる．これは量子論理がモジュラ束ではないことを意味する． □

少し前に，束がもし分配束であるならばモジュラ束になることを示しました．今，無限次元 Hilbert 空間に対応する量子論理はモジュラ束ではないので，そのことから分配束でもないことがわかります．また，有限次元の線型部分空間がなす束のときはすでに示した (18 ページにあるこの定理) とおり，これも分配束にはなっていません．

さて，物理の話をしましょう．今我々は量子論理が分配束でもモジュラ束でもないことを確認しましたがそれはなにか物理的に意味があるでしょうか？[21] まず，分配束でないことに対応する物理的な状況を見てみましょう．

スピン 1/2 の粒子を考えます．ただし $\hbar = 1$ という単位系で話をすすめることにします．この粒子の x, y, z それぞれの方向のスピンを測定すると $+1/2$ か $-1/2$ のみが観測されます．$+1/2$ を単に $+$，$-1/2$ を単に $-$ と呼ぶことにしましょう．x の向きで測定して確率 1 で $+$ になる状態がなす閉部分空間を M とし，x の向きで測定して確率 1 で $-$ になる状態がなす閉部分空間を N とします．ただし，ゼロベクトルを空間のうちに含めておいて，ゼロベクトルに対しては測定はできないとしておきます．単に考えているものをベクトル空間にしたいためです．すべての状態は x 方向のスピンを測定してやると必ず $+$ か $-$ のみを返すため，全空間 (Hilbert 空間) を H と書くことにすれば $H = M + N$ と書くことができます．物理的にはすべての状態が，x 方向が $+$ な状態と x 方向が $-$ な状態の重ね合わせで書けることに対応しています．さらに，M の任意の状態と N の任意の状態が直交していることもわかります．よって，$M = \neg N$ となっていることがわかります．ここで更に y の向きで測定して確率 1 で $+$ になる状態がなす閉部分空間を M' としましょう．$M \wedge M'$ という空間を考える

[20] 本当は無限和というものをまだ定義していないのでこの書き方は良くない．有限和の極限を通して，つまり $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} b_n e_{2n}$ のように書くべきではある．無限次元と有限次元の違いの一つは収束性にあると思う．有限次元ならば基底がたかだか有限個なので，それのすべての和を定義することができるが，無限次元だと無限個基底が存在するので，それらすべての和をそのまま定義することができない．そこで本来は極限などを用いて真剣に定義する必要がある．無限次元を扱っている以上，そこの話をするべきなのだが，紙面の都合上省かざるを得なくなってしまった．詳しく知りたい人がいれば是非質問を送ってほしい．

[21] 数学の力を借りて今までの議論を行ってきたが，物理的な制約などをすべて忘れて，「数学的に考えることのできる閉部分空間をすべて考える」ということをやってきたため，ある数学的な結論にちゃんと物理的な対応物が存在するかどうかはわからない．

と，これは x で測定すると必ず $+$ であり，y で測定しても必ず $+$ になる状態全部の集まりです．

そのような状態は存在するでしょうか？ x の向きに対して確率 1 で $+$ になる状態を $|x_+\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とし，x の向きに対して確率 1 で $-$ になる状態を $|x_-\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ としましょう．この時，x の向きのスピンを測定する作用素は $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となっています．実際に，この作用素を $|\uparrow\rangle$ に作用させてやれば固有値 $+1/2$ が得られることがわかります．したがって，M は，$|x_+\rangle$ の貼る線形空間であるとわかります．

M' についてはどうでしょうか？量子力学になれた方ならすぐに分かる通り，y の向きに測定して確率 1 で $+$ になる状態は $|y_+\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書けます．[22] したがって，M' は $|y_+\rangle$ の貼る空間です．

しかし $|x_+\rangle$ と $|y_+\rangle$ は明らかに線形独立であるので，$M \wedge M' = \{0\}$ であるとわかります．同様にして $N \wedge M' = \{0\}$ もわかります．このことを，物理において「(スピンの) 不確定性関係」と呼んだ訳です．したがって，$(M \wedge M') \vee (N \wedge M') = \{0\} \vee \{0\} = \{0\}$ となります．一方．$M \vee N = H$ だったので，$(M \vee N) \wedge M' = H \wedge M' = M'$ となります．しかし y 方向に測定して必ず $+$ を返す状態は存在しますので $M' \neq \{0\}$ であり，よって量子論理は確かに分配束ではないです．

同様にして，量子論理がモジュラ束になっていないことの物理的な具体例はあるでしょうか？わからなかったので今後の課題とします．[23]

すこし流れからそれますが射影作用素[24]の話をしましょう．

定理:直和分解

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間 M を任意に持ってくる．そのとき，任意の $x \in \mathcal{H}$ は $x = y + z, \quad y \in M, \quad z \in \neg M = M^\perp$ と一意に分解することができる．

証明　$\neg$ の性質の性質 3 と同様にすれば良い．　□

上のように $\mathcal{H}$ とその閉部分空間 M を一つ定めると，任意の $x \in M$ に対して $y \in M$ と $z \in M^\perp$ が一意に決

[22] 多くの量子論の本などにおいては，z 方向のスピンを測定する作用素を対角化するようにしているが，今回は x 方向のスピンを測定する作用素を対角化させているため少し混乱するかもしれない．その時は本文の x を z と思い，y を x と読み替えていただければと思う．

[23] 分配束でないことの物理的な例はスピン 1/2 なので有限次元の線形代数的な話である．一方，モジュラ束でないことの証明は ($\mathbb{C}^n$ の部分空間がなす束がモジュラ束であったことを思い出すと) 無限次元性が本質的に効いていることがわかる．したがってスピンのような，有限個の測定結果しか持たない測定を考える限りモジュラ束でないことの例は存在しないとわかる．$M \leq K$ なので，M と K は同じ作用素に対応させ，かつ $M \vee N$ が「ギリギリ」全体になるような例を持ってくればうまく反例を構成できるように感じられるのだが．

[24] 物理の文脈だと射影演算子と呼ばれることのほうが多い．

まります．よってこれをなにか函数のような対応関係にあると思うのは自然でしょう，それを以下で定めます．

定義:射影演算子

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間 M を任意に持ってくる．そのとき，任意の $x \in \mathcal{H}$ は $x = y + z,\ \ y \in M,\ \ z \in \neg M = M^{\perp}$ と一意に分解することができるが，ここで M の上への**射影演算子** P_M を，$P_M x = y$ のようにして定める．

上で定義された射影演算子は $\mathcal{H}$ の元を受け取って M の元を返す作用素なのですが，$M \subset \mathcal{H}$ であることから，$\mathcal{H}$ の元を一つ受け取って $\mathcal{H}$ の元を返すとみなすことができます．さて，ある作用素が射影作用素であるかどうかを判定する方法はあるでしょうか？それが以下の定理です．

定理:射影作用素

P を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への連続[25)]な作用素とする．その時，P が射影作用素であるための必要十分条件は，$P^2 = P^* = P$ となることである．ただし P^* は P の共役作用素 (エルミート共役) である．

証明　必要性

$P^2 = P$ は自明．P を $\mathcal{H}$ の閉部分空間 M の上への射影とすると，$u, v \in \mathcal{H}$ の元を $u = u_1 + u_2,\ \ v = v_1 + v_2$ と分解してやると，$(Pu, v) = (u_1, v_1 + v_2) = (u_1, v_1) + (u_1, v_2) = (u_1, v_1) = (u_1 + u_2, v_1) = (u, Pv) = (P^*u, v)$ なので $P = P^*$ となる．

十分性

$\mathrm{Ran}(P) = \{Px \mid x \in \mathcal{H}\}(= P$ の値域) を M とかく．この時，P が M の上への射影であることを示す．まず，$u \in M$ ならば $Pu = u$ が成立することは自明．実際 $u \in M$ ゆえ，ある $v \in \mathcal{H}$ が存在し，$u = Pv$ と書けるが，$Pu = P^2 v = Pv = u$ となるためである．次に M が閉部分空間であることを示す．実際，$u_n \in M,\ \ u_n \to v \in \mathcal{H}$ とすると，$u_n = Pu_n$ で，$n \to \infty$ とすると，P が連続なので $u = Pu \in M$ となる．最後に $u \in M^{\perp}$ ならば $Pu = 0$ を示す．これは任意の $v \in \mathcal{H}$ に対して，$(Pu, v) = (P^*u, v) = (u, Pv) = 0$ であることからわかる．よって確かに P は M の上への射影．
□

さて，論理の話を考えましょう．今まで見てきたとおり，量子論理は束の構造を持っています．したがって，束に対して行うことのできる議論はすべて行うことができます．それをもとに推論図などを考えてみましょう．

[25)] 作用素の連続性などは定義していないが，定義が面倒なので，今はあまり気にしなくてもいい．「良い性質を持っている」程度に思ってもらえれば構わない．

$M, N \in Q$ に対して，$M \Rightarrow N$ を，$M \leq N$ と定め，「M ならば N である」とよみます．これは M がある命題 P_1 を真にするような集合とし，N もある命題 P_2 を真にするような集合とすると，M の元は N の元でもあるので，必ず P_2 を真にするという状況を考えてもらえばわかりやすいかと思います．

簡便のために，以下のような記法を定義します．まず量子論理 Q を固定します．その元の集合を，Γ や Σ などの大文字のギリシャ文字で表すことにします．つまりこれらは Q の部分集合です．例えば $\Gamma = \{a, b\}$ とします．この時，$\Gamma_\vee$ で $a \vee b$ を表すと定めます．同様に $\Gamma_\wedge$ で $a \wedge b$ を定めます．同様の記法を無限部分集合に対しても定めましょう．その上で，$\Gamma_\wedge \Rightarrow \Sigma_\vee$ を，「Γ の元がすべて成立しているならば Σ の元の少なくとも 1 つが成立する」こととみなします．その上で，以下のような推論図と呼ばれるようなものを定めます．

$$\frac{\Gamma_\wedge \Rightarrow \Delta_\vee}{\Pi_\wedge \Rightarrow \Lambda_\vee}$$

これは，$\Gamma_\wedge \Rightarrow \Delta_\vee$ が正しいならば $\Pi_\wedge \Rightarrow \Lambda_\vee$ も正しいことが導かれる事を意味し，「$\Gamma_\wedge \Rightarrow \Delta_\vee$ 故に $\Pi_\wedge \Rightarrow \Lambda_\vee$ である」などと読みます．

さて，量子論理に限らずすべての束に対して成立するような命題というものはどのように書けるでしょうか．まず，束の元 a に対して，$a \Rightarrow a$ という形は何度用いてもいいこととします．次に，以下に示す形の推論図を有限回用いて得られるすべての命題は，任意の束について成立するということが知られています．

$$\text{増左} \qquad \frac{\Gamma_\wedge \Rightarrow \Delta_\vee}{(a \wedge \Gamma_\wedge) \Rightarrow \Delta_\vee}$$

$$\text{増右} \qquad \frac{\Gamma_\wedge \Rightarrow \Delta_\vee}{\Gamma_\wedge \Rightarrow (a \vee \Delta_\vee)}$$

$$\text{換左} \qquad \frac{(a \wedge b \wedge \Gamma_\wedge) \Rightarrow \Delta_\vee}{(b \wedge a \wedge \Gamma_\wedge) \Rightarrow \Delta_\vee}$$

$$\text{換右} \qquad \frac{\Gamma_\wedge \Rightarrow (a \vee b \vee \Delta_\vee)}{\Gamma_\wedge \Rightarrow (b \vee a \vee \Delta_\vee)}$$

$$\text{減左} \qquad \frac{(a \wedge a \wedge \Gamma_\wedge) \Rightarrow \Delta_\vee}{(a \wedge \Gamma_\wedge) \Rightarrow \Delta_\vee}$$

$$\text{減右} \qquad \frac{\Gamma_\wedge \Rightarrow (a \vee a \vee \Delta_\vee)}{\Gamma_\wedge \Rightarrow (a \vee \Delta_\vee)}$$

$$\text{三段論法} \qquad \frac{\Gamma_\wedge \Rightarrow a, \quad a \Rightarrow \Delta_\vee}{\Gamma_\wedge \Rightarrow \Delta_\vee}$$

さて，これらはすべて意味を考えてやるとどれもが自明に思えます．例えば増左は，「Γ の元がすべて成立すれば Δ の元の少なくとも 1 つが成立する」ときに，Γ の元がすべて成立し更に a も成立するときに Δ の元の少なくとも 1 つが成立するというのは尤もに思えると思います．

さて，$a \Rightarrow a$ という形から出発し，上の形を有限回使い得られた命題はすべての束について成立します．

では量子論理の体系で成立するすべての命題を分類することはできるでしょうか？少なくとも私の調べた範囲において，これは未解決らしいです．したがって一般に $\wedge$，$\vee$，$\neg$ を含む $\Gamma_\wedge \Rightarrow \Delta_\vee$ という形の論理式が量子論理で常に成立するかという問題さえわかっていません．わかっていることは一般に $\Gamma_\wedge \Rightarrow \Delta_\vee$ という形の論理式が $\neg$ を含まないときに，上の推論図を有限回使って示せるならば量子論理でも成立する，ということだけです．つまり一般の束とほとんど同じことしかわかっていません．当然，個別に成立するあるいはしないということがわかっているものもあります．例えば以下のような命題です．

$A \Rightarrow \neg\neg A$，$\neg\neg A \Rightarrow A$

$\Rightarrow A \vee (\neg A)$

などです．ただし $\Rightarrow A \vee (\neg A)$ は $A \vee (\neg A)$ がいつも真であるとみなします．$\Rightarrow$ の左側になにもないので，何も仮定しなくても成立するという意味です．しかしこれらは量子論理の定義に立ち戻れば自明に成立する式であることがわかると思います．

さて，発表の結論として非常に心細いものになってしまいましたが，量子論理というものが非常に難解であることが雰囲気だけでも知っていただけたなら幸いです．

4　付録 (量子論理の決定性について)

一般に $\Gamma_\wedge \Rightarrow \Delta_\vee$ という形の論理式が $\neg$ を含まないときに，上の推論図を有限回使って示せるならば量子論理でも成立する，というのを以下で証明します．この証明は Denneau 氏の学位論文に基づきます．以下，これらを証明するための準備などをしばらく行います．また，今までは一応日本語の本を中心にしてこの pdf を書いてきたのですが，これ以降はほとんど英語の文章のみを参考に書いています．そのため，特に専門用語の和訳が間違っている可能性は大いにあります．もし間違いがあればお知らせいただければ幸いです．また，この節は色々と函数解析の内容なども前提にしてしまっています．できることならそこも補足したかったのですが，紙面の都合で無理でした．参考資料を適宜読んでください．

4.1　一般化束など

まず，lattice polynomial，あるいは word と呼ばれるものを定義します．

定義:word

変数の可算無限集合 $V = \{x, y, z, \cdots\}$ をまず用意する，それに対し，$S_0 := V$，$S_{n+1} = \{(p \vee q), (p \wedge q) \mid p, q \in S_n\} \cup S_n$ として次々に集合 S_n を定め，$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ を定める．この時，S の元を **word**[26] あるいは lattice polynomial と呼ぶ．また，word の部分列でありそれ自身が再び word であるようなものを，**subword** と呼ぶ．

また，2 つの word ϕ, ξ に対し，$\phi = \xi$ という形を **equation** と呼ぶ．

また，$\phi \leq \xi$ という形を **partial order relation** あるいは単に関係と呼ぶ．

すこし噛み砕いて見ましょう．word ですが，これは簡単に言ってしまえば，変数 $x, y, z, \cdots$ と 2 つの記号 $\wedge, \vee$ 及び括弧が「良い順番で」並んだ列のことを指します．具体的には $((x \wedge y) \wedge z)$ は word ですが，$x \vee \wedge$ や $y \wedge)(\vee$ などは word ではありません．また，本当は $(x \wedge y)$ が word である一方，$x \wedge y$ などは word ではないのですが，適宜括弧の数を省略する目的で $x \wedge y$ というような簡略化した表記を許すことにします．また，equation や関係において，ここまではまだ束などが登場していないため，$\leq$ や $=$ という記号も $\wedge$ も $\vee$ もただの記号でしか無いことに注意しましょう．また，subword についてですが，word として $((a \wedge c) \vee b) \vee (a \vee d)$ というようなものを持ってくると，a や $(a \vee d)$ や $((a \wedge c) \vee b)$ はそれに含まれており，更にそれ自身が再び word なので，これは $((a \wedge c) \vee b) \vee (a \vee d)$ の subword です．

[26] 現代的には，自由束 (free lattice) などと呼ばれるらしい．情報科学科の友人に教えていただいた．

定義:valid

2 つの word $\phi(a, b, \cdots)$ と $\xi(a, b, \cdots)$ に対して，ある束 L と，L のある元 $A, B, \cdots$ が存在し，L の上の順序や $\vee, \wedge$ に対して $\phi(A, B, \cdots) \leq \xi(A, B, \cdots)$ となる時，これを $L \models \phi(A, B, \cdots) \leq \xi(A, B, \cdots)$ とかく．更に，$\phi \leq \xi$ という関係が，束 L のいかなる元を変数に代入しても成立する時，$\phi \leq \xi$ が L の中で **valid**[27] であると呼び，それを $L \models \phi \leq \xi$ と書く．更に，もし $\phi \leq \xi$ が任意の束の中で valid である時，$\phi \leq \xi$ は **universally valid** であるといい，それを $LT \models \phi \leq \xi$ と書く．

最も簡単な具体例として，$\phi = a$, $\xi = a$ として $\phi \leq \xi$ という関係を考えてみましょう．その時，この関係が universally valid であることがわかると思います．

定理 1:universally valid な word の集合は決定可能

universally valid な word の集合は決定可能である．つまり，任意の word ϕ, ξ に対して，ある手順が存在し，有限回のステップで $\phi \leq \xi$ という関係がすべての束の中で valid かどうかを判定することができる．特に $\phi \leq \xi$ が universally valid である必要十分条件は $\lambda \leq \lambda$ なる形から出発し，以下の 4 つの法則により $\phi \leq \xi$ を導くことができることである．ただし，式が 2 つ並んでいるときは，2 つの条件がともに成立するときであるとみなす．

$$\frac{\theta \leq \tau}{(\theta \wedge \rho) \leq \tau}$$

$$\frac{\theta \leq \tau \quad \theta \leq \rho}{\theta \leq (\rho \wedge \tau)}$$

$$\frac{\theta \leq \tau \quad \rho \leq \tau}{(\theta \vee \rho) \leq \tau}$$

$$\frac{\theta \leq \rho}{\theta \leq (\rho \vee \tau)}$$

証明　例えば，$(a \vee b) \leq (p \vee q)$ という式を考える．この時，$(a \vee b) \leq (p \vee q)$ と必要十分な条件は『「$a \leq (p \vee q)$ かつ $b \leq (p \vee q)$」もしくは「$(a \vee b) \leq p$」もしくは「$(a \vee b) \leq q$」』となることである．このようにして，どのような式でも分解できることがわかる．実際，ϕ と ξ に含まれる変数の数をそれぞれ w, w' とおけば，$\phi \leq \xi$ という関係は，$4^{w+w'}$ 回か，それ以下のステップで証明できることがわかる．　$\Box$

[27] 日本語では「恒真」や「正しい」などと表現してあるのが観測された．

定義:一般化された word

以下のようにして w_n を定義する．ただし word の定義と同様に，変数の可算無限集合 V が存在し，各変数は V の元であると定める．

$w_1 = a$ とする．ただし a は変数．

$w_{n+1} = (w_n^1 \vee w_n^2) \wedge (w_n^3 \vee w_n^4)$ とする．ただし w_n^i は，w_n^i と w_n^j が同じ変数を含まないように変数を変えた w_n であるとする．

また，w_n を**ランク n の一般化された word (generic word of rank n)** と呼ぶ．

具体例を見てみましょう．ランクが 3 までのものを書いてみます．

$w_1 = a$

$w_2 = (a \vee b) \wedge (c \vee d)$

$w_3 = (((a_1 \vee b_1) \wedge (c_1 \vee d_1)) \vee ((a_2 \vee b_2) \wedge (c_2 \vee d_2))) \wedge (((a_3 \vee b_3) \wedge (c_3 \vee d_3)) \vee ((a_4 \vee b_4) \wedge (c_4 \vee d_4)))$

こんな感じです．

定義

ϕ, ξ を任意に与えられた word とする．ϕ の中に現れていないすべての ξ の変数を 0 で置き換えて，更に以下の法則を用いて ξ を変形したものを，ξ_ϕ と書く．

法則:$0 \vee \rho = \rho \vee 0 = \rho, \quad 0 \wedge \rho = \rho \wedge 0 = 0$

例を見てみます．例えば $\phi = a \vee b$ で $\xi = c \vee (a \vee (b \wedge d))$ のとき，c, d は ϕ の中に現れていませんので，それらを 0 で置き換えて $\xi_\phi = 0 \vee (a \vee (b \wedge 0)) = 0 \vee (a \vee 0) = 0 \vee a = a$ となるわけです．

定理 2

ϕ, ξ を word とし，L を任意に与えられた最小元を持つ束[28]とする．関係 $\phi \leq \xi$ が L の中で valid であることの必要十分条件は，関係 $\phi \leq \xi_\phi$ が L の中で valid であることである．

証明　$\phi \leq \xi$ が L の中で valid であるとする．その時，ϕ, ξ の引数には L の任意の元を代入して良いので，ϕ の中に現れていないすべての ξ の変数には最小元 0 を代入する．そうすれば $\phi \leq \xi$ から明らかに $\phi \leq \xi_\phi$ が得られる．

---

[28] もとの論文では，"if L is any lattice" とあり，最小元の存在は仮定されていなかった．しかし最小元が存在しないと 0 の意味が無いため，これは間違いであると考えた．もし任意の束で成り立つことを知っている人がいればぜひ教えていただきたい．追記:出典が Wikipedia になってしまうのであまりよろしくないのだが，「有界束」を単に「束」と呼ぶことも多いらしく，ここでもその用法が用いられている可能性があることを友人の実数さんに指摘いただいた．

逆に，$\phi \leq \xi_\phi$ であるとする．このとき，ξ_ϕ の構成法および "0" との演算のルールにより，ξ の，ϕ に含まれないすべての変数に束の最小元を代入したものを ξ_0 と書けば，$\phi \leq \xi_0$ は真である．また，任意の束の元 a, b に対して，$a = a \vee 0 \leq a \vee b,\ \ 0 = a \wedge 0 \leq a \wedge b$ なので，$\xi_0 \leq \xi$ も valid である．したがって，$\phi \leq \xi$ が L の中で valid であることがわかる．　□

上の定理により，$\phi \leq \xi$ という関係を考える際には適宜 ξ の変数はすべて ϕ の中にも現れていると仮定して良いことがわかります．

あらたな word を定義しましょう．

定義

$\phi(a, b, \cdots),\ \xi(a, b, \cdots)$ を word とする．その時，新しい word $\hat{\phi}$ と $\xi^{\hat{\phi}}$ を以下の操作を通して定義する．

Step1: ϕ の中に現れるすべての subword θ を $\theta \vee \theta$ あるいは $\theta \wedge \theta$ という形で置き換え，ϕ が (文字の繰り返しを除いて) 一般化された word のかたちになるようにする．便宜的に，これを「調整された ϕ」と呼ぶことにする．

Step2: 調整された ϕ を左から見ていき，例えば初めに現れた a を a_1 で置き換え，次に現れた a を a_2 で置き換えるというような操作をすべての変数に対して行う．この結果として得られた word を $\hat{\phi}$ と呼ぶ．これは操作より明らかに一般化された word である．

Step3: ξ に現れるすべての a を $a_1 \vee a_2 \vee \cdots$ で置き換え，すべての b を $b_1 \vee b_2 \vee \cdots$ で置き換え，$\cdots$ という操作をする．この結果得られた word を $\xi^{\hat{\phi}}$ とかく．

例えば，$\phi = a \wedge (a \vee b),\ \ \xi = a \vee (b \wedge a)$ なるときには，$\phi = a \wedge (a \vee b) = (a \vee a) \wedge (a \vee b)$ なので，$\hat{\phi} = (a_1 \vee a_2) \wedge (a_3 \vee b)$ です．ただし最後の b については一つしか無いため，本来は b_1 とすべきですが，しなくても混乱しないため単に b と書いています．またこの時，$\xi^{\hat{\phi}} = (a_1 \vee a_2 \vee a_3) \wedge (b \wedge (a_1 \vee a_2 \vee a_3))$ となります．$(a_1 \vee a_2 \vee a_3)$ という形は本来 word ではないと思われるかも知れませんが，最終的に束の元を代入し，その上の $\vee$ などを通して考えるため，$(a_1 \vee a_2) \vee a_3 = a_1 \vee a_2 \vee a_3$ などとなるため，実際には問題になりません．

定理 3

$\phi(a, b, \cdots),\ \xi(a, b, \cdots)$ を任意の word とし，L を任意の束とする．$\phi \leq \xi$ なる関係が L の中で valid であることの必要十分条件は $\hat{\phi} \leq \xi^{\hat{\phi}}$ が L の中で valid であることである．

証明　まず，$\hat{\phi} \leq \xi^{\hat{\phi}}$ が valid なるときに，$\phi \leq \xi$ もまた valid であることを背理法を用いて示す．$\phi \leq \xi$ が束 L の中で valid でないとする．その時，ある L の元 $A, B, \cdots$ が存在し，ϕ や ξ の変数 $a, b, \cdots$ にそれを代入することにより，$\phi(A, B, \cdots) \leq \xi(A, B, \cdots)$ を偽にすることができる．この時，$\hat{\phi}$ と $\xi^{\hat{\phi}}$ の，$a_1, a_2, \cdots$ すべて

に A を，$b_1, b_2, \cdots$ すべてに B を代入し，他も同様にすることにより明らかに $\hat{\phi}(A, A, \cdots, A, B, \cdots, B, \cdots) \leq \xi^{\hat{\phi}}(A, A, \cdots, A, B, \cdots, B, \cdots)$ が偽となることがわかる．したがって，$\hat{\phi} \leq \xi^{\hat{\phi}}$ は valid ではない．

次に $\phi \leq \xi$ が valid であるときに $\hat{\phi} \leq \xi^{\hat{\phi}}$ も valid であることを同じく背理法で示す．$\hat{\phi} \leq \xi^{\hat{\phi}}$ が valid でないとすると，$\hat{\phi}$ と $\xi^{\hat{\phi}}$ の変数 $a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$ にある L の元 $A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots$ を代入してやることで $\hat{\phi}(A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots) \leq \xi^{\hat{\phi}}(A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots)$ を偽にすることができる．ここで，$A = A_1 \vee A_2 \vee \cdots$， $B = B_1 \vee B_2 \vee \cdots$ と定めてやると，これは L の元になっているが，この時 $\phi(A, B, \cdots) \leq \xi(A, B \cdots)$ が偽になっているということを証明したい．構成方法より，$\xi^{\hat{\phi}}(a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots) = \xi(a_1 \vee a_2 \vee \cdots, b_1 \vee b_2 \vee \cdots, \cdots)$ である．したがって，$\xi^{\hat{\phi}}(A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots) = \xi(A_1 \vee A_2 \vee \cdots, B_1 \vee B_2 \vee \cdots, \cdots) = \xi(A, B, \cdots)$ という equation は成立する．さらに，$A, B, \cdots$ の定義より，$\hat{\phi}(A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots) \leq \hat{\phi}(A, A, \cdots, B, B, \cdots)$ という関係が成立するが，$\hat{\phi}(A, A, \cdots, B, B, \cdots)$ は $\phi(A, B, \cdots)$ にほかならず，よって，$\phi(A, B, \cdots) \leq \xi(A, B \cdots)$ が偽であることがわかった． □

定理 4

束 L が，「すべての word ξ とすべての一般化された word w_n に対して，$w_n \leq \xi$ という関係が universally valid であることの必要十分条件が，$w_n \leq \xi$ が L の中で valid であることである」という性質を有しているとする．その時，更に L は「任意の word ϕ, ξ に対して，$\phi \leq \xi$ という関係が universally valid であることの必要十分条件が，$\phi \leq \xi$ が L の中で valid であることである」という性質も有する．

証明　上の定理より自明である．実際，$\hat{\phi}$ は一般化された word であり，$\xi^{\hat{\phi}}(A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots) = \xi(A, B, \cdots)$ という関係式もうまく作れたためである． □

一度 word の話から離れて別の話をします．

定義:ダイアグラム

D を有限の文字の集合とする．また R_D を，$p, q, r \in D$ に対して，$p \leq (q \vee r)$ というような形の関係の集合とする．また，この時 $p \leq (q \vee r)$ は「p は真に q と r の間にある」[29] と呼ぶことにする．また，R_D はつぎの 2 条件を満足するとする．

条件 1: もし R_D の中に $p \leq (q \vee r)$ という形の元があれば，$p \leq (r \vee q)$ という形の元もやはり R_D の中に存在する．

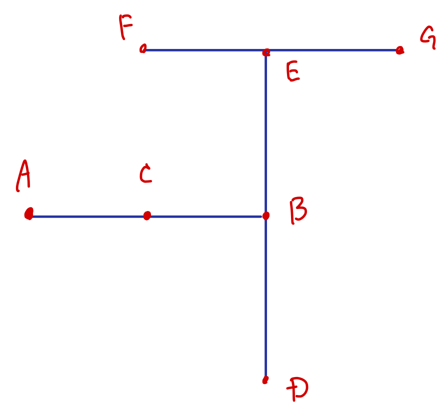
条件 2: もし R_D の中に $p \leq (q \vee r)$， $q \leq (s \vee t)$， $r \leq (s \vee t)$ という形の元がすべて存在するならば，$p \leq (s \vee t)$ という形の元もやはり R_D の中に存在する．

このようにして定めた D と R_D のペア (D, R_D) を $\mathcal{D}$ と書き，ダイアグラムと呼ぶ．また，このとき D

の元を $\mathcal{D}$ の**原子 (atom of D)**[30] と呼び，R_D の元を $\mathcal{D}$ の**原子的関係 (atomic rule)** と呼ぶ．

ダイアグラムと言われると，なんとなく図を書きたくなります．実際図を書くこともできます．その時は D の元をすべて異なる場所に起き，$p \leq (q \vee r)$ であるときには q と r を線分で結び，p をその線分の上に書くことと定めます．具体的に見てみましょう．

例えば，$\mathcal{D} = (\{A, B, C, D, E, F, G\}, \{C \leq (A \vee B), C \leq (B \vee A), B \leq (D \vee E), B \leq (E \vee D), E \leq (F \vee G), E \leq (G \vee F)\})$ とすると，これはちゃんとダイアグラムの条件を満足しています．この時 $\mathcal{D}$ を図に書くと例えば



のようになります．さて，このダイアグラムの部分集合に注目したいのですが，そのために「閉」という概念を定義します．量子論理のときに考えた「閉」とは異なる概念であることに注意してください．

定義:ダイアグラムの閉部分集合

$\mathcal{D} = (D, R_D)$ をダイアグラムとする．D の部分集合 Γ が閉であるとは，$q, r \in \Gamma$ で，$p \leq (q \vee r)$ という形の元が R_D の元であるときに，$p \in \Gamma$ となることとして定める．

これはダイアグラムの図で考えると「2 つの点の中間の点を (D の中から取れるときに) 取るという操作に対して閉じている」ということです．例えば上の図のダイアグラムだと $\{E\}$, $\{A, B, C, F\}$ は閉ですが，$\{E, D\}$ は閉ではないです．ただし注意してほしいのは，$\Gamma = \varnothing$ の場合も認めているということです．このときは $q, r \in \Gamma$ というものが持ってこれないので混乱するかも知れませんが，$\varnothing$ はいつも閉集合であると定めておきましょう．

上の例で分かる通り，任意の D の部分集合が $\mathcal{D}$ の中で閉とは限りません．そこで，任意に与えられた部分

---

[29] もとの論文では，"p is properly between q and r" とある．

[30] 量子物理学班の発表なので混乱を招くかも知れないが，物質を構成している方の原子とは別物である．ある意味において，(物質やダイアグラムを) 細かく分割したときに「それ以上分けることができないもの」という雰囲気はあるが，関係しているかどうかはわからなかった．

集合を含むような閉集合を考えたくなります．一番広く取るなら D そのものが閉であるため，D を持ってくればいいのですがそれはあまりに面白くないため，できるだけ狭いものを考えたくなります．そこでつぎの概念を定義します．

定義:閉包

$\mathcal{D} = (D, R_D)$ をダイアグラムとし，Γ を D の部分集合とする．$\mathcal{D}$ の中で Γ を含む最小の閉部分集合を，$\mathrm{clos}(\Gamma)$ と書き，Γ の閉包という．

さて，閉包という概念を定義したのでそれに関するいくつかの定理を見てみます．

定理 5

$\mathcal{D} = (D, R_D)$ をダイアグラムとし，Γ を D の任意の部分集合とする．その時，以下の性質が成立する．

性質 1: $\mathrm{clos}(\Gamma)$ は一意に存在する．

性質 2: ある原子 p が $\mathrm{clos}(\Gamma)$ の中に存在することの必要十分条件は以下の通りである：Γ の元 s を用いて $s \in \mathrm{clos}(\Gamma)$ という形の主張を得ることができるが，この形の主張から始まり，以下の推論規則を繰り返し用いることで $p \in \mathrm{clos}(\Gamma)$ なる形を導けることである．

推論規則:

$$\frac{q \in \mathrm{clos}(\Gamma) \quad r \in \mathrm{clos}(\Gamma) \quad \text{“}t \leq (q \vee r)\text{”} \in R_D}{t \in \mathrm{clos}(\Gamma)}$$

性質 3: q, r を原子としたときに，原子 p が $\mathrm{clos}(\{q, r\})$ の元であることの必要十分条件は “$p \leq (q \vee r)$” $\in R_D$ が成立することである．

証明　性質 1 の証明

任意の $\Gamma \subset D$ に対して，D は Γ を含んでいて $\mathcal{D}$ の中で閉なので，Γ を含む閉集合すべての集合を考えるとそれは空ではない．そのような集合を便宜的に $\hat{\Gamma}$ と表すことにしよう．集合 $\bigcap_{V \in \hat{\Gamma}} V$ というものを考える．まずこれが Γ を含んでいることは自明．実際 Γ の任意の元 x に対して，任意の V は Γ を含むので，特に x も含む．したがって $x \in \bigcap_{V \in \hat{\Gamma}} V$ とわかる．次にこれが閉であることを示す．$q, r \in \bigcap_{V \in \hat{\Gamma}} V$ とすると，任意の $V \in \hat{\Gamma}$ に対して，$q, r \in V$ となる．更に “$p \leq (q \vee r)$” $\in R_D$ とすると，V は閉であると仮定していたので，$p \in V$ となる．今 V は $\hat{\Gamma}$ の任意の元であったために，$p \in \bigcap_{V \in \hat{\Gamma}} V$ がわかり，これは $\bigcap_{V \in \hat{\Gamma}} V$ が閉であることを意味する．よって $\bigcap_{V \in \hat{\Gamma}} V$ は Γ を含む閉集合となっている．次に最小性についてだが，Γ を含む任意の閉集合 W を持ってくるとそれは $\hat{\Gamma}$ の元であるため，$\bigcap_{V \in \hat{\Gamma}} V \subset W$

が従う．よって最小性もわかった．一意性については，Γ の閉包が $\mathrm{clos}(\Gamma)_1, \mathrm{clos}(\Gamma)_2$ と 2 つ存在すると仮定すると，$\mathrm{clos}(\Gamma)_1$ の最小性より $\mathrm{clos}(\Gamma)_1 \subset \mathrm{clos}(\Gamma)_2$ となり，一方で $\mathrm{clos}(\Gamma)_2$ の最小性より $\mathrm{clos}(\Gamma)_2 \subset \mathrm{clos}(\Gamma)_1$ となるので，結局 $\mathrm{clos}(\Gamma)_1 = \mathrm{clos}(\Gamma)_2$ となり，一意性も示された．

性質 2 の証明

明らかにこれは $\mathrm{clos}(\Gamma)$ の定義を推論図を用いて書き直しただけである．

性質 3 の証明

"$p \leq (q \vee r)$" $\in R_D$ とすると，$q, r \in \mathrm{clos}(\{q, r\})$ で $\mathrm{clos}(\{q, r\})$ は閉なので，閉であることの定義より $p \in \mathrm{clos}(\{q, r\})$ が従う．逆を背理法を用いて示す．つまり "$p \leq (q \vee r)$" $\notin R_D$ であるときに $p \notin \mathrm{clos}(\{q, r\})$ を示す．しかしこれは閉集合の定義と clos の最小性より自明． $\square$

例を見ておきましょう．先程の例 $\mathcal{D} = (\{A, B, C, D, E, F, G\}, \{C \leq (A \vee B), C \leq (B \vee A), B \leq (D \vee E), B \leq (E \vee D), E \leq (F \vee G), E \leq (G \vee F)\})$ において，$\Gamma = \{D, F, G\}$ とすると，$\mathrm{clos}(\Gamma) = \{B, D, E, F, G\}$[31)]であることがわかります．

さて，ダイアグラムと束の関係を見てみましょう．実はダイアグラムの閉部分集合すべてを集めたものは，$\mathbb{C}^n$ の部分空間すべてを集めたものが束になったのと同じように，束を作ります．それが以下の定理です．一応注意しておくと，定義から分かる通り部分集合が閉であるかどうかは D だけではなく R_D にも依存しています．例えば $R_D = \varnothing$ とすると，D の任意の部分集合が閉部分集合になります．そのため，R_D を意識するために「Γ は $\mathcal{D}$ 内で D の閉部分集合である」というふうな言い方をすることにします．

定義:ダイアグラムが生成する束

$\mathcal{D} = (D, R_D)$ をダイアグラムとする．$\mathcal{D}$ が生成する束 $L(\mathcal{D}) = (L, \leq, \wedge, \vee)$ を以下のように定める．

1) L は D の閉部分集合全体の集まりとする．

2) L の元 Π, Γ に対して，$\Pi \leq \Gamma$ という $L(\mathcal{D})$ 上の関係を，D 内で Π が Γ の部分集合であることとして定める．

3) L の元 Π, Γ に対して，$\Pi \wedge \Gamma$ は $\Pi \cap \Gamma$ として定める．

4) L の元 Π, Γ に対して，$\Pi \vee \Gamma$ は $\mathrm{clos}(\Pi \cup \Gamma)$ として定める．

上の定義ですでに $L(\mathcal{D})$ が束であると述べていますが，実際に $L(\mathcal{D})$ は明らかに束の定義を満足します．

さて，ダイアグラムを定義しましたが，word のときと同じように，なにかダイアグラムの「標準的な」形というものは存在するのでしょうか？今からそれを定義します．そのためにダイアグラムの「中心」という概念を先に定義しておきます．

[31)] もとの論文では $\mathrm{clos}(\Gamma) = \{C, D, E, F, G\}$ とあったが，これは閉ではないため誤りであると考えられる．

定義:ダイアグラムの中心

$\mathcal{D}=(D,R_D)$ をダイアグラムとする．任意の $p\in D$ に特に注目して，(D,p,R_D) と三組にして書いたペアを**拡張されたダイアグラム (augmented diagram)** と呼び，$\mathcal{D}=(D,R_D)$ を**根源的ダイアグラム (underlying diagram)** と呼ぶ．またこの時，p を $\mathcal{D}$ の**中心 (center)** と呼ぶ．
また，2 つの拡張されたダイアグラムに対し，その 2 つの根源的ダイアグラムが (文字の記号が違うことは許した上で) 同じである時，2 つの拡張されたダイアグラムは**同値 (equivalent)** であると呼ぶ．

上の定義は単に，D のある元を特別視するときの表記法を定めているだけです．したがって，中心 p を忘れてしまえば，普通のダイアグラムと何ら変わりませんので，今までのダイアグラムに対する定理などはすべてそのまま適用することができます．今後は混乱の恐れがない場合に限り，「拡張されたダイアグラム」を単に「ダイアグラム」と呼び，今までと同じように $\mathcal{D}$ などで表すことにしましょう．明らかに，$\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ が同値な時，それぞれが生成する束は同じものとみなすことができます．[32)]

さて，上の記法を用いて一般化されたダイアグラムを考えます．

定義:一般化されたダイアグラム

ランク n の**一般化されたダイアグラム (generic diagram)$\mathcal{D}_n$** を以下のように帰納的に定義する．
まず $\mathcal{D}_1 := (\{a\},a,\varnothing)$ とする．
次に $\mathcal{D}_n^k=(D_n^k,p_n^k,R_{D_n}^k)$ $(k=1,2,3,4)$ を，同じ文字を含まないように文字の名前を変えた，ランク n の一般化されたダイアグラム $\mathcal{D}_n$ であるとする．(つまり $\mathcal{D}_n^k$ はすべて同値である．) そして，q をどの $\mathcal{D}_n^k$ にも現れていない新しい文字であるとする．その時，ランク $n+1$ の一般化されたダイアグラム $\mathcal{D}_{n+1}=(D_{n+1},q,R_{D_{n+1}})$ を以下のように定義する．

$$D_{n+1}=D_n^1\cup D_n^2\cup D_n^3\cup D_n^4\cup\{q\}$$

$$R_{D_{n+1}}=R_{D_n}^1\cup R_{D_n}^2\cup R_{D_n}^3\cup R_{D_n}^4\cup\{q\le(p_n^1\vee p_n^2),\ q\le(p_n^2\vee p_n^1),\ q\le(p_n^3\vee p_n^4),\ q\le(p_n^4\vee p_n^3),\ \}$$

またこの時，p_n^1,p_n^2,p_n^3,p_n^4 を q の**祖父母 (grandparents)** といい，$(p_n^1,p_n^2),(p_n^3,p_n^4)$ というペアを祖父母の**夫婦 (married grandparents)** と呼ぶことにする．

以上の定義はやや抽象的なものなので，具体的に見てみます．まず，$\mathcal{D}_1$ ですが，これは一点集合に対して，その点を中心とみなし，原始的関係は何も定めていませんので，

32) 同値性の定義より，束の元の記号が異なることがあるが，それらを同一視することにより同じ束であるとみなすことができる．

Figure 4.1: オーダー 1 の一般化されたダイアグラム．中心は a

のようになります．次に $\mathcal{D}_2$ ですが，$\mathcal{D}_1$ を 4 つコピーして，$\mathcal{D}_1^1$ と $\mathcal{D}_1^2$ の中心，$\mathcal{D}_1^3$ と $\mathcal{D}_1^4$ の中心 (今 $\mathcal{D}_1$ は一点集合で中心は自分自身でした) を，2 つの線が交わるように線で結んでやって，交点に新しい点 p を書けば良いので

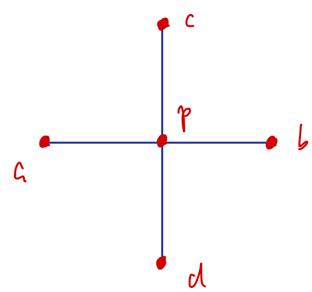


Figure 4.2: オーダー 2 の一般化されたダイアグラム．中心は p

のようになります．同様に $\mathcal{D}_3$ は

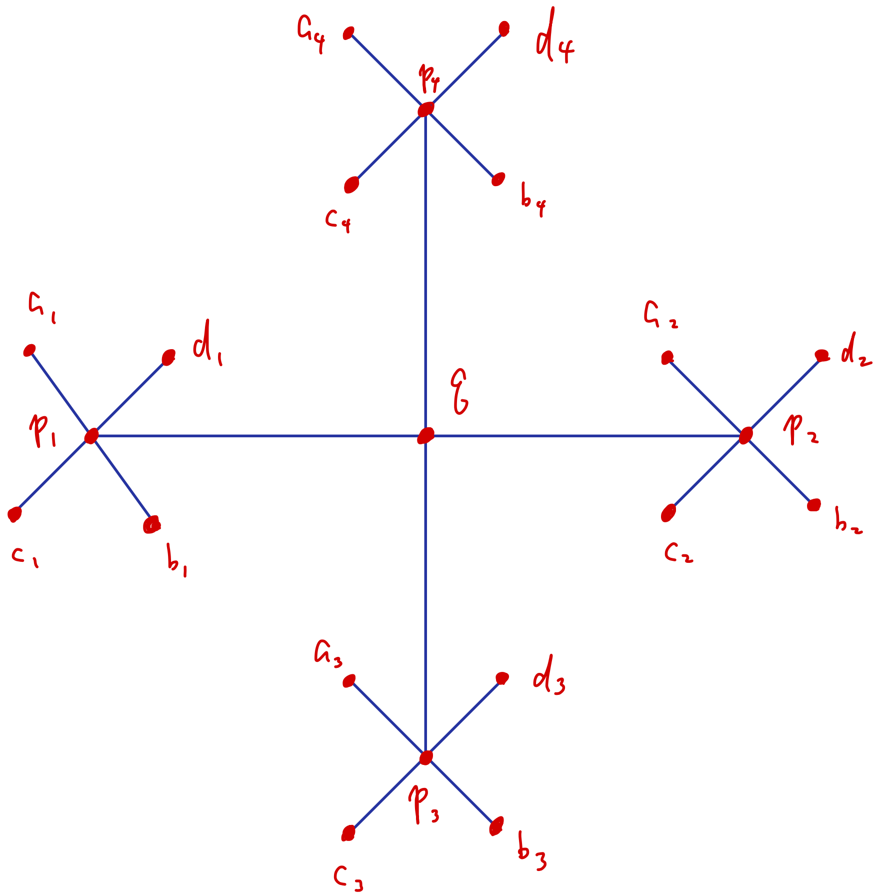


Figure 4.3: オーダー 3 の一般化されたダイアグラム．中心は q

のようになります．

上の図を見てやると，拡張されたダイアグラムの「中心」という言葉が確かに「中心」らしさをもっていることがわかると思います．

ここで後のために一般化されたダイアグラムの別定義を与えておきます．ただしこれはこのセクションのいちばん最後まで使いませんので，当面の間はそこまで気にしなくても問題ないです．

別の定義:一般化されたダイアグラム

一般化されたダイアグラムとは，以下のようにして帰納的に構成されるもののことを指す．

(1) $\mathcal{D}_1 = (\{A\}, A, \varnothing)$

(2) $\mathcal{D}_n = (D_n, P_n, R_{D_n})$ が構成できたとする．ここで，D_n の元ではあるが D_{n-1} の元ではないようなものを $A_1, A_2, \cdots, A_{4^{n-1}}$ と書くことにする．ただし $n = 1$ のときのために $D_0 = \varnothing$ としておく．$k = 1, 2, \cdots, 4^{n-1}$ に対して，E_k, F_k, G_k, H_k という新しい文字を持ってきて，$\mathcal{D}_{n+1} =$

$(D_{n+1}, Q_{n+1}, R_{D_{n+1}})$ を以下のように定義する．

$D_{n+1} = D_n \cup \{E_1, F_1, G_1, H_1\} \cup \cdots \cup \{E_{4^{n-1}}, F_{4^{n-1}}, G_{4^{n-1}}, H_{4^{n-1}}\}$

$Q_{n+1} = P_n$

$R_{D_{n+1}} = R_{D_n} \cup \{\text{“}A_1 \leq (E_1 \vee F_1)\text{”}, \text{“}A_1 \leq (G_1 \vee H_1)\text{”}\} \cup \cdots$

$\cdots \cup \{\text{“}A_{4^{n-1}} \leq (E_{4^{n-1}} \vee F_{4^{n-1}})\text{”}, \text{“}A_{4^{n-1}} \leq (G_{4^{n-1}} \vee H_{4^{n-1}})\text{”}\}$

最初の定義が，同一のものを 4 つコピーして「良い感じ」に並べて新しく中心を付け加えていくことで定義するものだとするならば，下の新しい定義は逆に中心からどんどん外側に向けて「良い感じ」に広げていくことでダイアグラムを次々に作るという感じの定義です．

さて，我々はすでにダイアグラムが生成する束という概念を知っていて，一般化されたダイアグラムを定義したので，一般化されたダイアグラムが生成する束というものに興味がわきます．それを定義しましょう．

定義:一般化束

一般化されたダイアグラム $\mathcal{D}_n$ が生成する束 $L(\mathcal{D}_n)$ を $\mathcal{L}_n$ と書き，オーダー n の**一般化束 (generic lattice)** と呼ぶ．また，この時 $\mathcal{D}_n$ の原子 p に対して，$\{p\}$ なる形の $\mathcal{L}_n$ の元を，$\mathcal{L}_n$ の**原子**と呼ぶ．また，前後から関係が明らかなときは単に p を $\mathcal{L}_n$ の原子とも言う．

さて，先のランク 3 の一般化されたダイアグラムの図において，例えば a_1 と b_2 などは中心から見るとだいたい「同じ」に思えます．一方で p_1 と c_3 は中心から見ると「違う」ように見えそうです．そのように，一般化されたダイアグラム (あるいは一般化束) の原子がどのくらい「中心とずれているのか」の指標となる函数を次に定義します．

定義:ランク

$\mathcal{L}_n$ の原子 $\{r\}$ に対し，自然数 $\mathrm{rank}(r)$ を返す函数 rank をつぎのように定義する．

1) $\mathcal{D}_n$ を構成したときに，もし r が $\mathcal{D}_1$ のコピーの中に現れる点であるならば $\mathrm{rank}(r) = 1$ とする．

2) $\mathcal{D}_n$ を構成したときに，もし r が $\mathcal{D}_m$ のコピーの中に現れていて，さらに任意の m 以下の自然数 s に対して，r が $\mathcal{D}_s$ のコピーの中には現れない点であるならば，$\mathrm{rank}(r) = m$ であると定める．

具体的に見てみましょう．先の $\mathcal{D}_3$ の例においては $\mathrm{rank}(a_2) = \mathrm{rank}(d_3) = 1$, $\mathrm{rank}(p_1) = 1$, $\mathrm{rank}(q) = 3$ などと言った具合です．

定理 6

一般化されたダイアグラムの構成方法より，以下の主張が成立する．

1) Γ が，ある k に対して $\mathcal{D}_n^k$ 内で D_n^k の閉部分集合であるとする．その時，Γ は $\mathcal{D}_{n+1}$ 内で D_{n+1} の閉部分集合になっている，

2) Γ が，$\mathcal{D}_{n+1}$ 内で D_{n+1} の閉部分集合であるとする．その時，$k=1,2,3,4$ に対して $\mathcal{D}_n^k$ 内で D_n^k の閉部分集合になっている Γ^k を持ってきて，$\Gamma=\Gamma^1\cup\Gamma^2\cup\Gamma^3\cup\Gamma^4\cup\theta$ と書ける．ただしこの時 θ は $\varnothing$ もしくは $\{q\}$ である．(q は $\mathcal{D}_{n+1}$ の中心である．) またこの時，「$p_1,p_2\in\Gamma$」か「$p_3,p_4\in\Gamma$ の元である」の少なくともどちらか片方が満足されている時，$q\in\Gamma$ となる．これは $\theta=\{q\}$ にほかならない．

3) $\mathcal{D}_{n+1}$ 内で D_{n+1} の閉部分集合である Γ,Π を上のように $\Gamma=\Gamma^1\cup\Gamma^2\cup\Gamma^3\cup\Gamma^4\cup\theta,\quad \Pi=\Pi^1\cup\Pi^2\cup\Pi^3\cup\Pi^4\cup\rho$ と分解したとする．ただし Γ^k,Π^k は $\mathcal{D}_n^k$ 内で D_n^k の閉部分集合であるとする．この時，$\mathcal{L}_{n+1}=L(\mathcal{D}_{n+1})$ の元として以下の等号が成立する．

$\Gamma\wedge\Pi=(\Gamma^1\wedge\Pi^1)\cup(\Gamma^2\wedge\Pi^2)\cup(\Gamma^3\wedge\Pi^3)\cup(\Gamma^4\wedge\Pi^4)\cup(\theta\wedge\rho)$

$\Gamma\vee\Pi=(\Gamma^1\vee\Pi^1)\cup(\Gamma^2\vee\Pi^2)\cup(\Gamma^3\vee\Pi^3)\cup(\Gamma^4\vee\Pi^4)\cup\tau$

(ただし，$\Gamma^k\vee\Pi^k$ や $\Gamma^k\wedge\Pi^k$ はすべて $\mathcal{D}_n^k$ の中で計算するものとする．)

また，τ はもし以下の 3 条件のうち少なくともどれか一つが満足された時に限り $\tau=\{q\}$ となり，そうでないときには $\tau=\varnothing$ となる．

条件 1: $q\in(\Gamma\vee\Pi)$ であること．これはつまり $\theta=\{q\}$ もしくは $\rho=\{q\}$ であることを意味する．

条件 2; $p_n^1\in(\Gamma^1\vee\Pi^1)$ かつ $p_n^2\in(\Gamma^2\vee\Pi^2)$

条件 3: $p_n^3\in(\Gamma^3\vee\Pi^3)$ かつ $p_n^4\in(\Gamma^4\vee\Pi^4)$

証明　1) の証明

Γ が $\mathcal{D}_n^k$ 内で D_n^k の閉部分集合であるとする．その時閉部分集合の定義より，$q,r\in\Gamma$，“$p\leq(q\vee r)$” $\in R_{D_n^k}$ とすると $p\in\Gamma$ となっている．その時，“$p\leq(q\vee r)$” $\in R_{D_n^k}$ ならば特に一般化されたダイアグラムの構成方法より “$p\leq(q\vee r)$” $\in R_{D_n^k}\in R_{D_{n+1}}$ となるので，まとめると $q,r\in\Gamma$，“$p\leq(q\vee r)$” $\in R_{D_{n+1}}$ とすると $p\in\Gamma$ となる．これは Γ が $\mathcal{D}_{n+1}$ 内で D_{n+1} の閉部分集合になっていることを意味する．

2) の証明

主張の後半部分は自明．実際，一般化されたダイアグラムの構成方法より，“$q\leq(p_1\vee p_2)$”, “$q\leq(p_3\vee p_4)$” $\in R_{D_{n+1}}$ であるためである．前半を示す．$\Gamma\cap D_n^k$ を Γ_k と書く．これが $\mathcal{D}_n^k$ 内で D_n^k の閉部分集合になっていることをしめす．$q,r\in\Gamma_k$ とし，“$p\leq(q\vee r)$” $\in R_{D_n^k}$ と仮定すると，$q,r\in\Gamma$ でありさらに一般化されたダイアグラムの構成方法より特に “$p\leq(q\vee r)$” $\in R_{D_{n+1}}$ でもあり，Γ は $\mathcal{D}_{n+1}$ 内で

D_{n+1} の閉部分集合だったので，$p \in \Gamma$．更に “$p \leq (q \vee r)$” $\in R_{D_n^k}$ より，$p \in D_n^k$ なので，$p \in \Gamma_k$ となる．これは Γ_k が $\mathcal{D}_n^k$ 内で D_n^k の閉部分集合になっていることを意味する．$\Gamma \subset D_n^1 \cup D_n^2 \cup D_n^3 \cup D_n^4 \cup \{q\}$ なので，Γ_k を Γ^k と書いてやれば前半の主張も証明できた．

3) の証明

条件 1〜3 のいずれかが成立しているときに $\tau = \{q\}$ となっていて，逆に条件 1〜3 のすべてが成立していないときに $\tau = \varnothing$ となることはすぐに分かる．あとは前半を示せば良い．

まずは 1 つ目の等式を示す．$\Gamma \wedge \Pi = \Gamma \wedge \Pi$ が $\mathcal{D}_{n+1}$ の中で D_{n+1} の閉部分集合になっていることは自明．更に $\Gamma \wedge \Pi = \Gamma \wedge \Pi = (\Gamma^1 \cup \Gamma^2 \cup \Gamma^3 \cup \Gamma^4 \cup \theta) \cap (\Pi^1 \cup \Pi^2 \cup \Pi^3 \cup \Pi^4 \cup \rho)$ は展開すれば $\Gamma^i \cap \Pi^j$ なる項と $\theta \cap \Pi^i$ なる項と $\Gamma^i \cap \rho$ なる項と $\theta \cap \rho$ なる項の和集合で書くことができる．この時 $\Gamma^i \cap \Pi^j$ に注目すると，$\Gamma^i \subset D_n^i$，$\Pi^j \subset D_n^j$ で $i \neq j$ なる時には $D_n^i \cap D_n^j = \varnothing$ なので，結局 $\Gamma^i \cap \Pi^i$ なる形のみが残る．また任意の i に対して，$\theta, \rho \not\subset D_n^i$ なので，$\theta \cap \Pi^i = \Gamma^i \cap \rho = \varnothing$ となる．よって 1 つ目の等式を得た．

次に 2 つ目の等式を示す．$\Gamma \vee \Pi = \mathrm{clos}(\Gamma \cup \Pi)$ は閉なので，2) より，$\Gamma \vee \Pi = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \Sigma^4 \cup \sigma$ と分解することができる．ただし σ は $\{q\}$ もしくは $\varnothing$ である．ここで，2) の証明と同様にして，$\Sigma^i = (\mathrm{clos}(\Gamma \cup \Pi)) \cap D_n^i$ であるが，これが $\mathrm{clos}((\Gamma \cap D_n^i) \cup (\Pi \cap D_n^i))$ に等しいことを示せば良い．$(\Gamma \cap D_n^i) \cup (\Pi \cap D_n^i) = (\Gamma \cup \Pi) \cap D_n^i$ なので，$\Gamma \cup \Pi$ を A と書くことにすれば，$(\mathrm{clos}(A)) \cap D_n^i = \mathrm{clos}(A \cap D_n^i)$ が示したい式である．

まず $(\mathrm{clos}(A) \cap D_n^i) \subset \mathrm{clos}(A \cap D_n^i)$ を示す．$x \in \mathrm{clos}(A) \cap D_n^i$ とすると，$x \in \mathrm{clos}(A)$ かつ $x \in D_n^i$ となる．$x \in \mathrm{clos}(A)$ なので，A の元 a に対して，$a \in \mathrm{clos}(A)$ なる形の命題から出発し，定理 5 の推論規則を繰り返し用いることで $x \in \mathrm{clos}(A)$ を導くことができる．ここで，最終的に $a_1 \in \mathrm{clos}(A)$，$a_2 \in \mathrm{clos}(A)$，“$x \leq (a_1 \vee a_2)$” $\in R_{D_{n+1}}$ から $x \in \mathrm{clos}(A)$ を導いたとする．この時，$x \in D_n^i$ であるので，$a_1, a_2 \in D_n^i$ が従う．実際，$x \in D_n^i$ なので，x は $\mathcal{D}_{n+1}$ の中心ではない．よって $R_{D_{n+1}}$ の定義より，“$x \leq (a_1 \vee a_2)$” $\in R_{D_n^k}$ となるが，$k \neq i$ ならば $x \notin D_n^i$ となり矛盾．よって “$x \leq (a_1 \vee a_2)$” $\in R_{D_n^i}$ となるが，原始的関係の定義より $a_1, a_2 \in D_n^i$ となる．すると，$a_1, a_2 \in \mathrm{clos}(A) \cap D_n^i$ となる．これを有限回繰り返してやることにより，($x \in \mathrm{clos}(A)$ が A の元 a に対して，$a \in \mathrm{clos}(A)$ なる形の命題から出発していたので) 最終的に $a \in A \cap D_n^i$ であり更に $x \in \mathrm{clos}(A)$ を導くために用いた原始的関係の元もすべて $A \cap D_n^i$ の元であることがわかる．よって全体をまとめると，$x \in D_{n+1}$ に対して，$a \in A \cap D_n^i$ なる a が存在し，その a に対して $a \in \mathrm{clos}(A \cap D_n^i)$ という形の命題から出発して，定理 5 の推論規則を繰り返し用いてやると $x \in \mathrm{clos}(A \cap D_n^i)$ が導けたことになる．これで片側の包含関係が成立した．

すこし具体的に見てみる．例えば $a, b \in A$ から出発し，

$$\frac{a \in \mathrm{clos}(A), \quad b \in \mathrm{clos}(A), \quad \text{“}x \leq (a \vee b)\text{”} \in R_{D_{n+1}}}{x \in \mathrm{clos}(A)}$$

のようにして $x \in \mathrm{clos}(A)$ が導けたとする．この時，上で見たことにより，実は $a, b \in A \cap D_n^i$ とわかるので，上の A をすべて $A \cap D_n^i$ に置き換えてやれば確かに $x \in \mathrm{clos}(A \cap D_n^i)$ が導けたことになる．

逆の包含を示す．$A \subset \mathrm{clos}(A)$, $D_n^i \subset \mathrm{clos}(D)$ が成立するので，$(A \cap D_n^i) \subset (\mathrm{clos}(A) \cap \mathrm{clos}(D_n^i))$ が成立する．ここで，D_n^i は $\mathcal{D}_{n+1}$ 内で D_{n+1} の閉部分集合なので，$\mathrm{clos}(D_n^i) = D_n^i$ となる．また $\mathrm{clos}(A) \cap \mathrm{clos}(D_n^i) = \mathrm{clos}(A) \cap D_n^i$ は閉集合であることは明らか．一方 $(A \cap D_n^i) \subset \mathrm{clos}(A \cap D_n^i)$ であり，$\mathrm{clos}(A \cap D_n^i)$ の最小性より，$\mathrm{clos}(A \cap D_n^i) \subset (\mathrm{clos}(A) \cap \mathrm{clos}(D_n^i)) = (\mathrm{clos}(A) \cap D_n^i)$ となる．よって題意を得た． $\square$

定理 7

$\{r\}$ を一般化束 $\mathcal{L}_n$ の原子であり，$\mathrm{rank}(r) = 1$ とする．Γ, Π を $\mathcal{L}_n$ の元とする時，もし $\{r\} \leq \Gamma \vee \Pi$ ならば $\{r\} \leq \Gamma$ か $\{r\} \leq \Pi$ の少なくとも一方が成立する．

証明の前に少しだけ注意しておきます．上の条件で $\mathrm{rank}(r) = 1$ という条件は外せません．実際，先のランク 3 の一般化されたダイアグラムの例で，$r = p_1 \quad (\mathrm{rank}(p_1) = 2)$ とし，$\Gamma = \{a_1\}, \Pi = \{b_1\}$ とすると，$\Gamma \vee \Pi = \{a_1, b_1, p_1\}$ なので $\{r\} \leq \Gamma \vee \Pi$ となりますが，$\{r\} \leq \Gamma$ と $\{r\} \leq \Pi$ のどちらも成立していません．雑に言ってしまえば $\mathrm{rank}(r) = 1$ という条件は，r が一番端の点であるということであり，$\vee$ をとると一番端ではない点は自動的に含まれてしまう可能性があるということです．

証明　n に対する帰納法で示す．$n = 1$ のときは自明．(この時，$\mathcal{L}_1$ は集合としては $\{\varnothing, \{a\}\}$ という形で書ける．) 次に，題意が $\mathcal{L}_n$ に対して成立したとする．$\{r\}$ を $\mathcal{L}_{n+1}$ のランクが 1 の原子とし，Γ, Π を $\mathcal{L}_{n+1}$ の元で $\{r\} \leq \Gamma \vee \Pi$ を満たすと仮定する．この時，定理 6 の 2) より，$\Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \cup \Gamma^3 \cup \Gamma^4 \cup \theta$, $\Pi = \Pi^1 \cup \Pi^2 \cup \Pi^3 \cup \Pi^4 \cup \rho$ と分解しておく．この時，先の定理の 3) より，$(\Gamma \vee \Pi) = (\Gamma^1 \vee \Pi^1) \cup (\Gamma^2 \vee \Pi^2) \cup (\Gamma^3 \vee \Pi^3) \cup (\Gamma^4 \vee \Pi^4) \cup \tau$ となる．τ の中に含まれうる元は $\mathcal{D}_{n+1}$ の中心だけであり，それのランクは $n + 1 > 1$ なので，$r \in \tau$ はありえない．したがって，ある k が存在して $r \in (\Gamma^k \vee \Pi^k)$ を満足する．今 Γ^k も Π^k も $\mathcal{L}_n$ の元で，$\{r\}$ は $\mathcal{L}_n$ の原子であるため，帰納法の仮定より $\{r\} \leq \Gamma^k$ か $\{r\} \leq \Pi^k$ の少なくとも一方が成立する．よって題意を得た． $\square$

定理 8

r, s^1, s^2, s^3, s^4 をそれぞれ $\mathcal{L}_n$ の原子であり，s^1, s^2, s^3, s^4 は r の祖父母であるとする．さらに s^1, s^2 が夫婦で s^3, s^4 も夫婦であるとする．この時，ある $\mathcal{L}_n$ の元 Γ, Π に対して，$\{r\} \leq (\Gamma \vee \Pi)$ が成立するなら以下の 4 つのうちいずれかが成立する．

1) $\{r\} \le \Gamma$

2) $\{r\} \le \Pi$

3) $\{s^1\} \le (\Gamma \vee \Pi)$ かつ $\{s^2\} \le (\Gamma \vee \Pi)$

4) $\{s^3\} \le (\Gamma \vee \Pi)$ かつ $\{s^4\} \le (\Gamma \vee \Pi)$

証明 n に対する帰納法で証明する．(祖父母が存在するという条件より $n \ge 2$ であることに注意する．) 主張は $\mathcal{L}_2$ に対しては自明である．次に $\mathcal{L}_n$ に対して成立すると仮定する．r, s^1, s^2, s^3, s^4 を，問題文の条件を満足するような $\mathcal{L}_{n+1}$ の原子であるとする．また Γ と Π を $\mathcal{L}_{n+1}$ の元であるとする．$\Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \cup \Gamma^3 \cup \Gamma^4 \cup \theta$，$\Pi = \Pi^1 \cup \Pi^2 \cup \Pi^3 \cup \Pi^4 \cup \rho$ と分解しておく．すると $\Gamma \vee \Pi = (\Gamma^1 \vee \Pi^1) \cup (\Gamma^2 \vee \Pi^2) \cup (\Gamma^3 \vee \Pi^3) \cup (\Gamma^4 \vee \Pi^4) \cup \tau$ となることはすでに知っている．ここで，r のランクが $n+1$ であったとすると，$r = q$(ただし q は $\mathcal{D}_{n+1}$ の中心) となっていることがすぐにわかり，題意を満たすことも明らかである．次に r のランクが n 以下であるとすると，r, s^1, s^2, s^3, s^4 はある k に対して $\Gamma^k \vee \Pi^k$ の元なので，帰納法の仮定より題意を満たす．よってすべての n に対して題意が成立することがわかった． $\square$

定理 9

r, s^1, s^2, s^3, s^4 をそれぞれ $\mathcal{L}_n$ の原子であり，s^1, s^2, s^3, s^4 は r の祖父母であるとする．さらに s^1, s^2 が夫婦で s^3, s^4 も夫婦であるとする．この時，$\{r\} = (\{s^1\} \vee \{s^2\}) \wedge (\{s^3\} \vee \{s^4\})$ となる．

証明 $\mathcal{L}_2$ に対して主張が成立するのは自明．$\mathcal{L}_n$ に対して主張が成立すると仮定する．$\mathcal{L}_{n+1}$ の元 r, s^1, s^2, s^3, s^4 を，問題文中の条件を満足するように持ってくる．r のランクが $n+1$ である時，$r = q$ となり，また一般化されたダイアグラムの構成方法より題意が成立することも自明．r のランクを n 以下とする．すると r, s^1, s^2, s^3, s^4 は D_n^k の元となるので，帰納法の仮定より題意を得た． $\square$

さて，ワードの話に戻ります．

定義:標準的解釈

w_n をランク n の一般化されたワードとし，$\mathcal{L}_n$ をオーダー n の一般化束とする．w_n の変数の $\mathcal{L}_n$ の中での**標準的解釈 (canonical interpretation)**σ とは，以下の条件を満足するような，変数の解釈であると定める．ただしここで「解釈」とは，「ワードの変数に束のどの元を代入するか」という意味と定める．

条件

$n = 1$ の時，$w_1 = x$ なので，x に $a \in \mathcal{L}_n$ を代入するのを標準的解釈であると定める．ただしこのとき，a は明らかに $\mathcal{L}_n$ の中心である．

$n \geq 2$ の時，w_n は構成方法より，いくつかの w_2 を良い順番でつなげたものになっている．$\mathcal{L}_n$ を生成する一般化されたダイアグラム $\mathcal{D}_n$ もやはり構成方法より，ランク 2 の一般化されたダイアグラム $\mathcal{D}_2$ が良い規則でつながっているが，ここで w_2 と $\mathcal{D}_2$ の個数が同じであることに注意する．各 w_n に $\mathcal{D}_2$ を 1 対 1 で対応させ，$w_n = (a \vee b) \wedge (c \vee d)$ の (a, b) と (c, d) にそれぞれ $\mathcal{D}_2$ の夫婦同士を代入する．すると各 w_n は $\mathcal{D}_2$ の原子になる．このようにして w_2 を一つの原子に対応させるならば w_n は w_{n-1} になる．同様に $\mathcal{D}_2$ もそれの中心だけに注目してやると，$\mathcal{D}_n$ は $\mathcal{D}_{n-1}$ になり，一般化束も同様．各 w_2 にどの $\mathcal{D}_2$ を対応させるのかは，w_2 を一つの変数であるとみなし $\mathcal{D}_2$ もその中心だけに注目して $\mathcal{D}_{n-1}$ の中で考えたときに，再びこの条件を満足するように定める．

また，この時 w_n の各変数から $\mathcal{L}_n$ への対応として，標準的解釈 σ を用いて $\sigma(x) = a$ などと書く．ただし x は w_n の変数で a は $\mathcal{L}_n$ の原子である．

少し具体的に見てみます．例えば一般化されたワード $\overline{w}_3$ は $\overline{w}_3 = (((w_1 \vee x_1) \wedge (y_1 \vee z_1)) \vee ((w_2 \vee x_2) \wedge (y_2 \vee z_2))) \wedge (((w_3 \vee x_3) \wedge (y_3 \vee z_3)) \vee ((w_4 \vee x_4) \wedge (y_4 \vee z_4)))$ と書けるのでした．ただし w_3 が重複するので，一般化されたワードを $\overline{w}_3$ などと書いています．またここで，オーダー 3 の一般化されたダイアグラムは

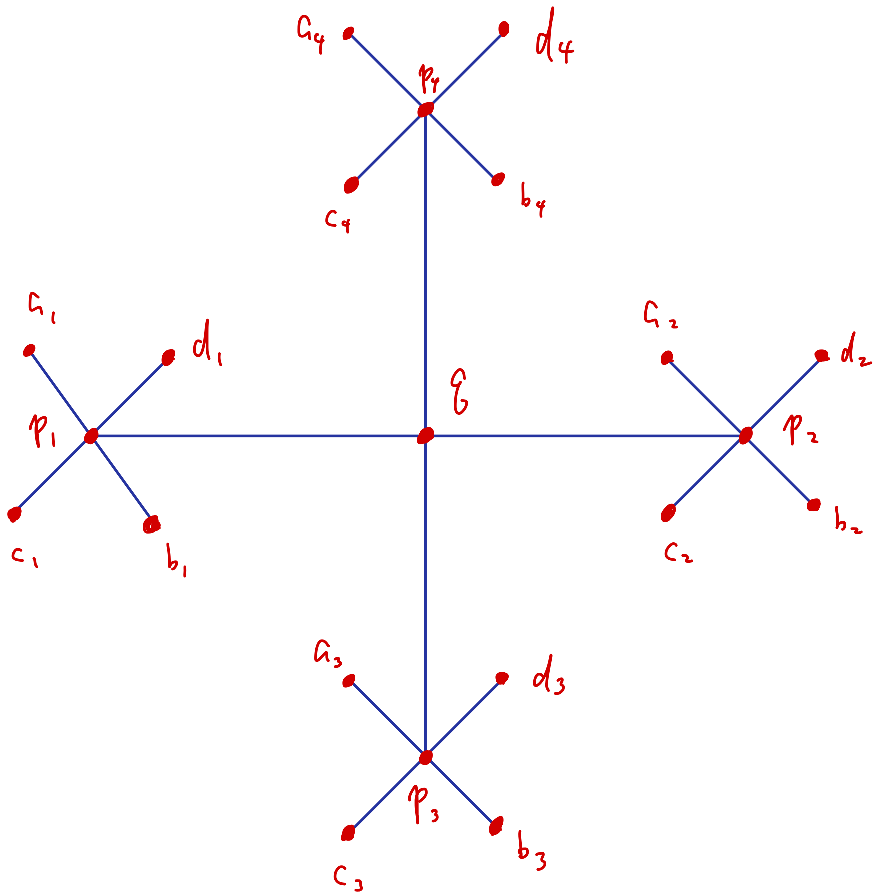


Figure 4.4: オーダー 3 の一般化されたダイアグラム．中心は q

のように書けるのでした．まず $\overline{w}_3$ はいくつかの $\overline{w}_2$ に分解できます．今の例だと $\overline{w}_2^k = (w_k \vee x_k) \wedge (y_k \vee z_k)$ のように書けるわけです．ここで，$\mathcal{D}_3$ に含まれる $\mathcal{D}_2$ の各夫婦を代入すれば良いので，例えば $\sigma(w_k) = a_k$，$\sigma(x_k) = b_k$，$\sigma(y_k) = c_k$，$\sigma(z_k) = d_k$ としてみます．すると $\overline{w}_2^k(a_k, b_k, c_k, d_k) = (a_k \vee b_k) \wedge (b_k \vee d_k) = p_k$ となります．この対応のもとでもとの $\overline{w}_3$ に注目してやると，$\overline{w}_3 = (p_1 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee p_4)$ となっています．これは形式だけ見ると $\overline{w}_2$ と同じですが，$\overline{w}_2 = (w \vee x) \wedge (y \vee z)$ に下のオーダー 2 の一般化されたダイアグラム (これは，上のオーダー 3 の一般化されたダイアグラムのすべての a_k, b_k, c_k, d_k を忘れたものになっています) の元を，$w = p_1, x = p_2, y = p_3, z = p_4$ というふうに代入したものになっています．この代入の方法が確かに標準的解釈の定義に則っていることに注意しましょう．

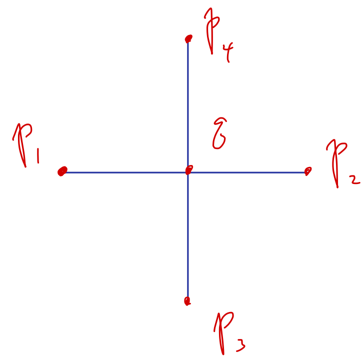


Figure 4.5: オーダー 2 の一般化されたダイアグラム．中心は q

したがって，w_3 の各変数に対して $\sigma(w_k) = a_k$，$\sigma(x_k) = b_k$，$\sigma(y_k) = c_k$，$\sigma(z_k) = d_k$ のように対応させる σ は標準的解釈であるとわかります．さて，標準的解釈を w_n の subword に対して拡張したのが下のものです．

定義:誘導された解釈

w_n をランク n の一般化されたワードとし，$\mathcal{L}_n$ をオーダー n の一般化束とする．また，σ を標準的解釈であるとする．その時，w_n の subword ϕ, ξ と w_n の変数 x に対して以下を満足するような word から $\mathcal{D}_n$ への写像 $\overline{\sigma}$ を**誘導された解釈 (induced interpretation)** と呼ぶ．

条件 1: $\overline{\sigma}(x) = \sigma(x)$

条件 2: $\overline{\sigma}(\phi \wedge \xi) = \overline{\sigma}(\phi) \wedge \overline{\sigma}(\xi)$

条件 3: $\overline{\sigma}(\phi \vee \xi) = \overline{\sigma}(\phi) \vee \overline{\sigma}(\xi)$

上の定義は単に，$\sigma(x) \vee \sigma(y)$ を $\overline{\sigma}(x \vee y)$ と省略して書きましょう，ということを定めているだけです．さて，定理 9 より明らかに，ϕ が w_n の subword でそれ自身が再び一般化された word のかたちになっているものとすると，$\overline{\sigma}(\phi)$ が $\mathcal{L}_n$ の原子になっていて，更に ϕ の一般化された word としてのランクと，$\overline{\sigma}(\phi)$ の $\mathcal{L}_n$ の原子としてのランクが一致していることがわかります．

定理 10

w_n をランク n の一般化された word とし，$\mathcal{L}_n$ をオーダー n の一般化束とする．また σ を w_n から $\mathcal{L}_n$ への標準的解釈とする．r をそれ自身が一般化された word になっているような w_n の subword とし，また $\overline{\sigma}(r) = R \in \mathcal{L}_n$ とする．すべての変数が w_n の変数であるような任意の word ξ に対して，$\overline{\xi}$ で，ξ の各変数に $\mathcal{L}_n$ の元を $\overline{\sigma}$ に従って代入したものであるとする．その時，$R \leq \overline{\xi}$ が $\mathcal{L}_n$ の中で valid であるならば，$r \leq \xi$ は universally valid となっている．

証明　length(ξ) で ξ に含まれる変数の個数を表すとしよう．RANK := rank(R) + length(ξ) に対する帰納法で

証明する．

最初に，$\mathrm{length}(\xi) = 1$ とする．この時 ξ は変数を一つしか持たないのでそれを x とする．明らかに $\overline{\xi}$ は $\mathcal{L}_n$ のランク 1 の原子である．すると，$R \leq \overline{\xi}$ が $\mathcal{L}_n$ 内で valid になるのは $R = \overline{\xi}$，つまり $r = x$ となるときだけであるので，結論も成立する．

$\mathrm{RANK} = n$ まで題意が成立したと仮定する．

まず $\xi = \xi_1 \wedge \xi_2$ のような形であったとする．この時，$R \leq \overline{\xi}$ が valid であることから，以下のように変形することができる．

$\mathcal{L}_n \models R \leq \overline{\xi} \Rightarrow$

$\mathcal{L}_n \models R \leq (\overline{\xi_1} \wedge \overline{\xi_2}) \Rightarrow$

$\mathcal{L}_n \models R \leq \overline{\xi_1}$ でかつ $\mathcal{L}_n \models R \leq \overline{\xi_2} \Rightarrow$(帰納法の仮定より)

$LT \models r \leq \xi_1$ かつ $LT \models r \leq \xi_2 \Rightarrow$

$LT \models r \leq (\xi_1 \wedge \xi_2) \Rightarrow$

$LT \models r \leq \xi$

よって証明ができた．

次に $\xi = \xi_1 \vee \xi_2$ のような形であっとする．このときは以下の 2 つの場合が考えられる．

パターン 1: R の原子としてのランクが 1 であったとする．

この時，以下のようにして題意が得られる．

$\mathcal{L}_n \models R \leq \overline{\xi} \Rightarrow$

$\mathcal{L}_n \models R \leq (\overline{\xi_1} \vee \overline{\xi_2}) \Rightarrow$(定理 7 より)

$\mathcal{L}_n \models R \leq \overline{\xi_1}$ もしくは $\mathcal{L}_n \models R \leq \overline{\xi_2} \Rightarrow$(帰納法の仮定より)

$LT \models r \leq \xi_1$ もしくは $LT \models r \leq \xi_1 \Rightarrow$

$LT \models r \leq \xi$

パターン 2: R の原子としてのランクが 2 以上であったとする．

この時，以下のようにして題意が得られる．

$\mathcal{L}_n \models R \leq \overline{\xi} \Rightarrow$

$\mathcal{L}_n \models R \leq (\overline{\xi_1} \vee \overline{\xi_2}) \Rightarrow$(定理 8 より)

$(\mathcal{L}_n \models R \leq \overline{\xi_1})$ もしくは $(\mathcal{L}_n \models R \leq \overline{\xi_2})$ もしくは $(\mathcal{L}_n \models S^1 \leq \overline{\xi}$ かつ $\mathcal{L}_n \models S^2 \leq \overline{\xi})$
もしくは $(\mathcal{L}_n \models S^3 \leq \overline{\xi}$ かつ $\mathcal{L}_n \models S^4 \leq \overline{\xi})$．ただし S^i はすべて R の祖父母で，S^1 と S^2 が，S^3 と S^4 がそれぞれ夫婦であるとする．$\Rightarrow$(帰納法の仮定より)

$(LT \models r \leq \xi_1)$ もしくは $(LT \models r \leq \xi_1)$

もしくは $(LT \models s^1 \leq \xi$ かつ $LT \models s^2 \leq \xi)$ もしくは $(LT \models s^3 \leq \xi$ かつ $LT \models s^4 \leq \xi)$.

ただし $s^i = \overline{\sigma}^{-1}(S^i)$ としている．$\Rightarrow$

$(LT \models r \leq (\xi_1 \vee \xi_2))$ もしくは $(LT \models ((s^1 \vee s^2) \wedge (s^3 \vee s^4)) \leq \xi) \Rightarrow (r = (s^1 \vee s^2) \wedge (s^3 \vee s^4)$ だったので)

$LT \models r \leq \xi$ もしくは $LT \models r \leq \xi \Rightarrow$

$LT \models r \leq \xi$

よって以上より題意を得た． $\square$

上の定理において，r を w_n に置き換えてやれば，$w_n \leq \xi$ が universally valid である必要十分条件が，それが $\mathcal{L}_n$ の中で valid であることであるとわかります．

定理 11

ϕ, ξ を word とする．そのとき ϕ のみによって決まるある自然数 n が存在し，$\phi \leq \xi$ が universally valid である必要十分条件が，それが一般化束 $\mathcal{L}_n$ の中で valid であることとなる．

証明　まず定理 2 より，ξ の中に現れる変数はすべて ϕ の中にも現れていると仮定して良い．あとは定理 10 より直ちに分かる．

4.2 Hilbert 空間周りの話

$\mathcal{H}$ を係数体が実数もしくは複素数あるいは四元数であるような無限次元可分 Hilbert 空間とする．$s, t \in \mathcal{H}$ に対して内積を (s, t) と書き，ノルムを $\|s\|$ と書くとする．

定義:線形独立性

$\mathcal{H}$ の部分空間の有限列 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ が線形独立であるとは，任意の $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して，S_i の任意の元 s_i に対して，$s_1 + s_2 + \cdots + s_n = 0$ なる時，$s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$ となることと定める．

上の定義はベクトル同士の線形独立性 (高校数学などでやったと思います．) を少しだけ拡張したものです．

その他多くの記法は本論で用いたものと同じものを用います．一つだけ新しい記号を定義しておきましょう．

定義:直交性

$\mathcal{H}$ の閉部分空間 S, T に対し，任意の S の元と任意の T の元が互いに直交する時，$S \perp T$ と書き，S と T が直交すると言う．

上の直交性の定義もやはり高校数学などでやったベクトル同士の直交性をすこしだけ拡張した記法です．

さて，本論で見たとおり，$\mathcal{H}$ の閉部分空間は束をなしています[33)]．我々はそれを本論では Q と書いていましたが，今後は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ と書くことにしましょう．

今から Hilbert 空間に対していくつかの性質を見ていきましょう．

定理 12

$\mathcal{H}$ の閉部分空間 S, T が互いに直交しているとする．この時 $S \vee T = S + T$ となる．

証明　まず，$S \vee T = \overline{S+T}$ なので，$S+T \subset S \vee T$ がわかる．よって逆の包含関係を示せば良い．$S+T$ が S, T の両方を含んでいることは明らか．よってこれが閉であることを示せば $S \vee T$ の最小性より $S \vee T \subset S+T$ が従う．$u_n \in S+T$ とし，$u_n \to u \in \mathcal{H}$ $(n \to \infty)$ とする．この時，$u_n \in S+T$ より，$u_n = s_n + t_n,\ \ s_n \in S,\ \ t_n \in T$ と分解できるが，この分解は一意である．実際 $u_n = s_n^1 + t_n^1\ s_n^2 + t_n^2,\ \ s_n^1, s_n^2 \in S,\ \ t_n^1, t_n^2 \in T$ のように二種類の分解があったとすると，$s_n^1 - s_n^2 = t_n^2 - t_n^1 \in S \cap T = \{0\}$ となるためである．ここで，$\{s_n\}$ や $\{t_n\}$ が Cauchy 列になっていることを示す．直交性より $\|s_n - s_m\| \leq \|s_n - s_m\| + \|t_n - t_m\| = \|s_n - s_m + t_n - t_m\| = \|u_n - u_m\| \to 0$ となるので，確かに $\{s_n\}$ は Cauchy 列．$\{t_n\}$ も同様．さて，S と T は閉だったので，$s_n \to s \in S,\ \ t_n \to t \in T$ となる．極限の一意性より，$u = s + t$ となるが，これは $S+T$ の元である．よって $S+T$ は閉．

[33)] 本論では Hilbert 空間に可分性を課していたが，可分でなくとも同様の議論をしてやればこの事がわかる．

定理 13

$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を，$\mathcal{H}$ の閉部分空間で互いに直交しているものの集合とする．その時，任意の $s \in \bigvee_{n\in\mathbb{N}} S_n$ に対し，ある $s_n \in S_n$ が存在し，$s = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n$ と一意に分解できる．

証明 任意の $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} S_n$ の元は，$s_n \in S_n$ の有限和で十分に近似できることより自明．

定義

S, T を以下の条件を満足するような $\mathcal{H}$ の閉部分空間とする．

条件: $S = (S \wedge T) \vee (S \wedge T^{\perp})$

この時，S と T は**両立する (compatible)** といい，$S \mathrel{\mathrm{C}} T$ と書く．

定理 14

S, T, R を $\mathcal{H}$ の閉部分空間とすると以下の性質が成立する．

性質 1: S が T と両立する時，T も S と両立する．

性質 2: $S \leq T$ が成立する時，T は S と両立する．

性質 3: S と T が直交している時，S と T は両立する．

性質 4: S と T が両立する時，S と $T^{\perp}$ も両立する．

性質 5: R が S と両立し，R が更に T とも両立するとする．この時，R はさらに $S \vee T$ 及び $S \wedge T$ と両立する．

性質 6: S, T, R のうち，どの空間も他のすべての空間と両立しているとする．
その時，$R \wedge (S \vee T) = (R \wedge S) \vee (R \wedge T)$，$R \vee (S \wedge T) = (R \vee S) \wedge (R \vee T)$ が成立．

証明 性質 1 の証明

今 S と T が両立するので，$S = (S \wedge T) \vee (S \wedge T^{\perp})$ が成立する．ここで $(T \wedge S) \vee (T \wedge S^{\perp})$ を計算すると，$(T \wedge S) \vee (T \wedge S^{\perp}) = (S \wedge T) \vee (S \vee T^{\perp})^{\perp}$ となっている．第二項に注目すると，$(S \vee T^{\perp})^{\perp} = (((S \wedge T) \vee (S \wedge T^{\perp})) \vee T^{\perp})^{\perp} = ((S \wedge T) \vee (S \wedge T^{\perp}) \vee T^{\perp})^{\perp}$ となっているが，明らかに $(S \wedge T^{\perp}) \leq T^{\perp}$ が成立しているので，最小上界の定義より $(S \wedge T^{\perp}) \vee T^{\perp} = T^{\perp}$ となる．よって $(T \wedge S) \vee (T \wedge S^{\perp}) = (S \wedge T) \vee ((S \wedge T) \vee T^{\perp})^{\perp} = (S \wedge T) \vee ((S \wedge T)^{\perp} \wedge T)$ となっている．今 $S \wedge T \leq T$ となっているので，量子論理のオーソモジュラ性よりこれが T に一致する．よって $T = (T \wedge S) \vee (T \wedge S^{\perp})$ となるがこれは T が S と両立することにほかならない．

性質 2 の証明

$S \leq T$ なので，$S \wedge T = S$ となる．よって，$(T \wedge S) \vee (T \wedge S^{\perp}) = S \vee (T \wedge S^{\perp})$ となるが，量子論理のオーソモジュラ性よりこれは T にほかならず，よって T C S

性質 3 の証明

$S \perp T$ であり，$T^{\perp} \perp T$ なので，$S \subset T^{\perp}$ となる．($T^{\perp}$ は T に直交する元すべてを集めた集合であることよりわかる．)S と T が直交しているので $S \wedge T = \{0\}$ となっており，また $S \subset T^{\perp}$ なので $S \wedge T^{\perp} = S$ となる．よって $(S \wedge T) \vee (S \wedge T^{\perp}) = \{0\} \vee S = S$ となり，題意を得た．

性質 4 の証明

S と T が両立するので，$S = (S \wedge T) \vee (S \wedge T^{\perp}) = (S \wedge T^{\perp}) \vee (S \wedge T)$ となるが，これは S と $T^{\perp}$ が両立することを意味する．

性質 5 の証明

参考文献 [7] の Theorem2 によった．

R と $S \vee T$ が両立することが証明できれば，性質 4 と $(S \vee T)^{\perp} = S^{\perp} \wedge T^{\perp}$ と変形できることより，R と $S \wedge T$ が両立することもわかる．したがって R と $S \vee T$ が両立することだけを証明する．明らかに，$(S \wedge R) \vee (T \wedge R) \leq (S \vee T) \wedge R$, $(S \wedge R^{\perp}) \vee (T \wedge R^{\perp}) \leq (S \vee T) \wedge R^{\perp}$ が成立するので，$((S \vee T) \wedge R) \vee ((S \vee T) \wedge R^{\perp}) \geq ((S \wedge R) \vee (T \wedge R)) \vee ((S \wedge R^{\perp}) \vee (T \wedge R^{\perp})) = ((S \wedge R) \vee (S \wedge R^{\perp})) \vee ((T \wedge R) \vee (T \wedge R^{\perp}))$ となる．しかし S 及び T の両方と R が両立するため，右辺は $S \vee T$ にほかならない．また左辺については $(S \vee T) \wedge R \leq (S \vee T)$ などにより，$((S \vee T) \wedge R) \vee ((S \vee T) \wedge R^{\perp}) \leq (S \vee T)$ となることもわかる．よって等号が成立するとわかった．

性質 6 の証明

参考文献 [7] の Theorem3 によった．

まず，$(S \vee T) \wedge R \leq (S \wedge R) \vee (T \wedge R)$ はいつでも成立する．したがって，$((S \vee T) \wedge R) \wedge ((S \wedge R) \vee (T \wedge R))^{\perp}$ を計算してやると，$((S \vee T) \wedge R) \wedge ((S \wedge R) \vee (T \wedge R))^{\perp} = (S \vee T) \wedge R \wedge (S \wedge R)^{\perp} \wedge (T \wedge R)^{\perp} = (S \vee T) \wedge (R \wedge (S^{\perp} \vee R^{\perp})) \wedge (T \wedge R)^{\perp} = (S \vee T) \wedge (R \wedge S^{\perp}) \wedge (T \wedge R)^{\perp}$

となる．

ここで一度，S C T の必要十分条件が $S \wedge T = S \wedge (T \vee S^{\perp})$ と書けることであることを示す．

S C T を仮定すると，$S = (S \wedge T) \vee (S \wedge T^{\perp})$ と書けるが，両辺の直交補空間を取ると，$S^{\perp} = (S^{\perp} \vee T^{\perp}) \wedge (S^{\perp} \vee T)$ となる．ここで，一般に $S \wedge T \leq S \wedge (T \vee S^{\perp})$ であるので，$(S \wedge (T \vee S^{\perp})) \wedge (S \wedge T)^{\perp} =$

$S \wedge ((T \vee S^\perp) \wedge (T^\perp \vee S^\perp))$ となるが，$S \subset T$ より $S^\perp \subset T$ であるので，$((T \vee S^\perp) \wedge (T^\perp \vee S^\perp)) = S^\perp$ となる．よって $(S \wedge (T \vee S^\perp)) \wedge (S \wedge T)^\perp = S \wedge S^\perp = \{0\}$ となる．したがって $S \wedge T = S \wedge (T \vee S^\perp)$ とわかる．以上の議論を逆にたどることにより，逆もわかる．

したがって今示したことを用いて，元の式を式変形していくと $((S \vee T) \wedge R) \wedge ((S \wedge R) \vee (T \wedge R))^\perp = \{0\}$ とわかり，よって $R \wedge (S \vee T) = (R \wedge S) \vee (R \wedge T)$ がわかる．もう片方も同様．

束論の話から少し離れますが，上の定理と関係して射影作用素の定理を見てみましょう．射影作用素の言葉で「P_S と P_T が交換する」という状況は上の「S と T が両立する」ということを導きます．それが以下の定理です．

定理 15

S, T を $\mathcal{H}$ の閉部分空間とし，P_S, P_T を S, T の上への射影作用素[34]とする．このとき，以下の 4 つは同値．

a: $S \leq T$

b: $P_T P_S = P_S$

c: $P_S P_T = P_S$

d: 任意の $u \in \mathcal{H}$ に対して，$(P_T u, u) \geq (P_S u, u)$

証明　a ならば b: 自明

b ならば c: $P_S = P_S^* = (P_T P_S)^* = P_S^* P_T^* = P_S P_T$

c ならば b: 同様に言える．

b ならば d: $Q_S = I - P_S$ とする．ただし I は恒等作用素である．すると，任意の $u \in \mathcal{H}$ に対して，$(P_T u, u) = (P_T(P_S + Q_S)u, u) = (P_S u, u) + (P_T Q_S u, (P_S + Q_S)u) = (P_S u, u) + (P_T Q_S u, P_S u) + (P_T Q_S u, Q_S u)$ となる．右辺の第二項は 0 で，第三項は $Q_S u = w$ とすると，$(P_T w, w)$ という形をしているがこれは一般に 0 以上であることは射影作用素の定義より自明．よって d を得た．

d ならば a: $T^\perp \subset S^\perp$ を示せば良い．$u \in T^\perp$ とすると，$0 = (P_T u, u) \leq (P_S u, u) = \|P_S u\|^2$ となるので $P_S u = 0$ となる．よって $u \in S^\perp$ となる．　□

[34]「作用素」という言葉を定義していないが，「函数を一般化したものである」という程度の認識で構わない．我々のよく知る (高校で扱うような) 函数は通常 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への「対応関係」として定義されている．ここでは $\mathbb{R}$ を一般化して，ベクトル空間 X からベクトル空間 Y への「対応関係」を「作用素」と呼んでいる程度のことである．ここで，定義域と値域が必ずしも同じでなくても良いことに注意されたい．ただし今は作用素に線形性を課しておくこととする．「行列」という概念を知っている方ならば，これが行列の概念に近いものであるとわかるであろう．行列の場合，$X = \mathbb{R}^n$ で $Y = \mathbb{R}^m$ なのである．それを無限次元でも使えるように拡張した概念が「(線形) 作用素」というわけである．

上の定理の a が成立すれば S と T が両立するのですが，a と同値な命題が $P_TP_S = P_SP_T$ であることから，確かに $P_TP_S = P_SP_T$ ならば S と T が両立しているとわかります．[35]

話を戻します．

定理 16

S, T を $\mathcal{H}$ の閉部分空間とし，$S \wedge T = \{0\}$ が成立するとする．その時，$S \vee T = S + T$ が成立する必要十分条件は，ある 0 以上の定数 α が存在し，S の任意の元 s と T の任意の元 t に対して $\|s\| \leq \alpha\|s+t\|$，$\|t\| \leq \alpha\|s+t\|$ が成立することである．

証明　まず $S+T$ が閉であるとする．$S \times T = \{(s,t) \mid s \in S, \quad t \in T\}$ に，$\|(s,t)\| = \|s\| + \|t\|$ としてノルムを定める．また $S+T$ には $\mathcal{H}$ と同じノルムを入れる．こうすると 2 つのノルム空間が得られた．そこで $U : S \times T \to S + T$ を，$U(s,t) = s + t$ として定める．この U が有界線形作用素で更に全射になっていることは自明．よって (函数解析の) 開写像定理[36]よりある定数 $\alpha > 0$ が存在し，任意の $z \in S + T$ に対し，$\|z\| < c$ ならば $z = s + t$ として $\|(s,t)\| = \|s\| + \|t\| < 1$ が成立する．よってあとは両辺を α で割ってやれば良い．

次にある 0 以上の定数 α が存在し，S の任意の元 s と T の任意の元 t に対して $\|s\| \leq \alpha\|s+t\|$，$\|t\| \leq \alpha\|s+t\|$ が成立するとする．この時，$S+T$ から Cauchy 列 $\{u_n\}$ を持ってきて，$u_n = s_n + t_n$ と分解すると，条件の不等式より $\{s_n\}$ 及び $\{t_n\}$ も再び Cauchy 列になっているとわかる．S 及び T は閉だったので，極限がそれぞれの中に存在する．よって題意を得た．　$\square$

定理 17

A, B を $\mathcal{H}$ の閉部分空間とし，$A \wedge B = \{0\}$ が成立するとし，さらに $(A \vee B)\backslash(A+B)$ が空ではないとする．(そのような例は確かに存在する．脚注 11 番参照．) この時，$(A \vee B)\backslash(A+B)$ から一つベクトルを持ってきてそれを c とする．c の生成する一次元の線形空間を C としたときに，以下が成立する．

1: $C \leq (A \vee B)$

2: $C \wedge (A+B) = \{0\}$

3: $C \vee A = C + A$

4: $C \vee B = C + B$

証明　1,2 は自明．3,4 は定理 16 より自明．　$\square$

[35] このためか，「S と T が両立する」ではなく「S と T が交換する (S commutes with T)」などと書かれた文章もいくつか見られた．ここでは [5] に従って「compatible」あるいはそれを直訳した「両立する」という語を用いることにする．

[36] Banach 空間 X から Banach 空間 Y への線形作用素 U の値域が Y に一致するならば U は X の開集合を Y の開集合に写すという定理．複素解析学に同じ名前の定理があるがそちらではない．

定理 18

S, T, R を $\mathcal{H}$ の閉部分空間とし，$S \vee T = S + T$, $S \wedge T = \{0\}$ が成立し，さらに R は S, T 両方と直交するとする．この時，$S \vee (T \vee R) = S + (T \vee R)$ が成立する．

証明 R が S, T 両方に直交しているので, $S \vee T$ とも直交している．よって定理 12 より, $(S \vee T) \vee R = (S \vee T) + R$ と書ける．また, $T \vee R = T + R$ とも書ける．よって，$S \vee (T \vee R) = (S \vee T) \vee R = (S \vee T) + R = (S + T) + R = S + (T + R) = S + (T \vee R)$ となり，題意を得た． □

定理 19

S は T と両立する．この時，$S \vee T = S + T$ となる．

証明 S が T と両立するので，T は S と両立する．したがって，$T = (T \wedge S) \vee (T \wedge S^{\perp})$ となる．ここで，$T \wedge S$ は S の部分であり，$T \wedge S^{\perp}$ は $S^{\perp}$ の部分なので，よって $T \wedge S$ と $T \wedge S^{\perp}$ は直交する．よって定理 12 より $(T \wedge S) \vee (T \wedge S^{\perp}) = (T \wedge S) + (T \wedge S^{\perp})$ が成立する．更に S は $T \wedge S^{\perp}$ に直交しているので，$S \vee (T \wedge S^{\perp}) = S + (T \wedge S^{\perp})$ も成立する．よって，$S \vee T = S \vee ((T \wedge S) \vee (T \wedge S^{\perp})) = (S \vee (T \wedge S)) \vee (T \wedge S^{\perp}) = S \vee (T \wedge S^{\perp}) = S + (T \wedge S^{\perp}) = (S + (T \wedge S)) + (T \wedge S^{\perp}) = S + ((T \wedge S) + (T \wedge S^{\perp})) = S + T$ となる．

定義

E, G, F を，以下の 7 条件を満足するような無限次元部分空間とする．

条件 1: $E \wedge F = \{0\}$

条件 2: $G \leq (E \vee F)$

条件 3: $G \wedge (E + F) = \{0\}$

条件 4: $G \vee E = G + E$

条件 5: $G \vee F = G + F$

条件 6: $E \wedge (G \vee F) = \{0\}$

条件 7: $F \wedge (G \vee E) = \{0\}$

このような (E, G, F) の 3 つをこの順序でまとめて**一般化された三つ組み (generic triple)** という．

定理 20

一般化された三つ組みは存在する．

証明　A, B, C を定理 17 の条件を満足するものとする．また $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を，どの 2 つも互いに直交するような無限次元部分空間の集合とする[37]．各 n に対し，$\sigma_n : A \vee B \to P_n$ を Hilbert 空間としての同型写像[38]とし，$E_n = \sigma_n(A_n)$，$F_n = \sigma_n(B_n)$，$G_n = \sigma_n(C_n)$ と定める．この時，σ_n が同型写像であることから，以下の 5 つが成立するとわかる．

$E_n \wedge F_n = \{0\}$

$G_n \leq (E_n \wedge F_n)$

$G_n \wedge (E_n + F_n) = \{0\}$

$G_n \vee E_n = G_n + E_n$

$G_n \vee F_n = G + F_n$

ここで，$n \neq m$ ならば P_n と P_m が互いに直交しているので，$(E_n \vee F_n) \subset P_n$ と $(E_m \vee F_m) \subset P_m$ も互いに直交していることがわかる．

$E = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} E_n$，$F = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} F_n$，$G = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} G_n$ と定め，これが一般化された三つ組みになっていることを示す．

条件 1 について．

$v \in E \wedge F$ とすると，$v = \sum_{n\in\mathbb{N}} e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ と書ける．ただし $e_n \in E_n$，$f_n \in F_n$ である．この時，$(E_n \vee F_n)$ と $(E_m \vee F_m)$ が直交していることと定理 13 より，すべての n に対して，$e_n = f_n$ とならねばならない．しかし $E_n \wedge F_n = \{0\}$ であったので，結局すべての n に対して $e_n = f_n = 0$ となるので，$v = 0$ がわかる．

条件 2 について．

すべての n に対して，$G_n \leq (E_n \wedge F_n)$ であることから，$G_n \leq (E \wedge F)$ を得る．よって $G = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} G_n \leq (E \wedge F)$ となる．

条件 3 について．

$v \in G \wedge (E + F)$ とする．定義より，$v \in G$ であり，更に $v \in E + F$ なので $v = e + f$，$e \in E$，$f \in F$ と書ける．$v \in G$ なので，$v = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ と書け，また e, f は E, F の定義より $e = \sum_{n\in\mathbb{N}} e_n$，$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ と書くことができる．定理 13 より分解は一意なので，任意の n に対して $g_n = e_n + f_n$ が成立する．

---

[37] このような $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は存在する．例えば a_n で n 番目の素数を表すとし，$Q_n := \{a_n^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ とすると，Q_n は互いに素な無限集合になっている．ここで $P_n := \{e_j \mid j \in Q_n\}$ としてやれば条件を満足する．ただし $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は考えている Hilbert 空間の標準基底であるとする．

[38] V, W を Hilbert 空間とし，$\Phi : V \to W$ が Hilbert 空間としての同型であるとは，Φ が全単射であり，$\alpha \in K$，$u, v \in V$ に対して $\Phi(\alpha u + v) = \alpha\Phi(u) + \Phi(v)$ が成立し (つまり線形写像であり) 更に $\|u\|_V = \|\Phi(u)\|_W$ が成立し (ノルムを保存する)，加えて $(u, v)_V = (\Phi(u), \Phi(v))_W$ となる (内積を保存する) ものを表す．

しかし定義より $G_n \wedge (E_n + F_n) = \{0\}$ なので，結局 $g_n = e_n + f_n = 0$ となり，これは $v = 0$ を意味する．

条件 4 について．

任意の n に対して，$G_n \wedge E_n = \{0\}$，$G_n \vee E_n = G_n + E_n$ が成立することはわかる．よって定理 16 より，ある正の定数 a が存在して，任意の $g_n \in G_n$，$e_n \in E_n$ に対して，$\|g_n\| \leq a\|g_n + e_n\|$ とすることができる．更に実は a は n にも依存しないことがわかる．実際，$\sigma_{mn} : E_m \vee F_m \to E_n \vee F_n$ なる写像で $\sigma_{mn}(E_m) = E_n$，$\sigma_{mn}(F_m) = F_n$，$\sigma_{mn}(G_m) = G_n$ となるような Hilbert 空間の同型写像が存在するためである．このような同型写像として，例えば $\sigma_{mn} = \sigma_n \sigma_m^{-1}$ などがある．さて，$g \in G$ と $e \in E$ に対して，$g = \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n$，$e = \sum_{n \in \mathbb{N}} e_n$ と分解することができるが，$n \neq m$ なる時，$g_n \perp g_m$，$e_n \perp e_m$，$(g_n + e_n) \perp (g_m + e_m)$ であるので，$\|g\| = \left\| \sum_n g_n \right\| = \sum_n \|g_n\|$ であり，同様に $\|g + e\| = \sum_n \|g_n + e_n\|$ を得る．ここで，$\|g_n\| \leq a\|g_n + e_n\|$ が n によらずに成立していたので，$\|g\| \leq a\|g + e\|$ が任意の $g \in G$ と $e \in E$ に対して成立する．定理 16 より，これは $G \vee E = G + E$ を意味する．

条件 5 について．条件 4 と同様．

条件 6 について．

条件 5 より，$G \vee F = G + F$ であるため，$E \wedge (G \vee F) = E \wedge (G + F)$ となる．ここで $v \in E \wedge (G + F)$ とすると，$v \in E$ であり更に $v \in G + F$ なので，特に $v = e = g + f$ と書ける．分解の一意性より，$e = \sum_n e_n$ などと分解してやれば任意の n に対して，$e_n = g_n + f_n$ と書ける．よって，$e_n - f_n = g_n$ となるが，$e_n - f_n \in E_n + F_n$ であり，$g_n \in G_n$ であるが，σ_n で引き戻すと $(A_n + B_n) \wedge C_n = \{0\}$ であったことより，条件 6 が満足されていることがわかる．

条件 7 について．条件 6 と同様．　□

以上より，一般化された三つ組み (E, G, F) に対して，$\{\{0\}, E, F, G, (E \vee G), (F \vee G), (E \vee F)\}$ という集合を考えるとこれが束になっていることがわかります．

定理 21

$\mathcal{H}$ の閉部分空間 S で，S と $S^{\perp}$ がともに無限次元になっているようなものを考える．B を，$B \leq S$ を満足するような無限次元閉部分空間とする．その時，ある無限次元閉部分空間 P, Q が存在し，以下を満たす．

性質 1: $P \vee Q \leq B \vee S^{\perp}$

性質 2: $(S \vee (P \vee Q))^{\perp}$ が無限次元

性質 3: (P, B, Q) が一般化された三つ組みになっている．

性質 4: $(P \vee Q) \wedge S = B$

性質 5: $P \wedge S = Q \wedge S = \{0\}$

性質 6: $(P + Q) \wedge S = \{0\}$

性質 7: $S \leq B \vee (P \vee Q)^{\perp}$

更に，T, R を閉部分空間とすると，以下が成立する．

性質 8: もし $T \leq S$ ならば $T \vee P = T + P$ かつ $T \vee Q = T + Q$

性質 9: もし $T \leq S$ かつ $B \leq T$ ならば T は $P \vee Q$ と両立する．

性質 10: もし $T \leq S$ かつ $B \leq T$ ならば $T \vee (P \vee Q) = T + (P \vee Q)$

性質 11: もし $R \leq S$ かつ $T \leq S$ ならば以下が成立する．

性質 11-1: $(R \vee P) \wedge T = R \wedge T$

性質 11-2: $(R \vee P) \wedge (T \vee P) = (R \wedge T) \vee P$ かつ $(R \vee Q) \wedge (T \vee Q) = (R \wedge T) \vee Q$

性質 11-3: $(R \vee P) \wedge (T \vee Q) = R \wedge T$

性質 11-4: もし $B \leq T$ ならば $R \wedge (T \vee (P \vee Q)) = R \wedge T$

性質 11-5: もし $B \leq T$ ならば $(R \vee P) \wedge (T \vee (P \vee Q)) = (R \wedge T) \vee P$

性質 11-6: もし $B \leq R$ かつ $B \leq T$ ならば $(R \vee (P \vee Q)) \wedge (T \vee (P \vee Q)) = (R \wedge T) \vee (P \vee Q)$

証明　U を，$\mathcal{H}$ の閉部分空間で，$B \leq U \leq (B \vee S^{\perp})$ を満足するようなものであるとする．条件より，B も $(B \vee S^{\perp})$ も無限次元であり，したがって特に U もやはり無限次元になっていることに注意．更に U は $B^{\perp} \wedge U$ と $(S \vee U)^{\perp}$ も無限次元にするようなものであると仮定する．このような U が存在することを最初に示す．$B, S, S^{\perp}$ の基底をそれぞれ $\{b_n\}_{n \in \Lambda_1}, \{a_m, b_n\}_{n \in \Lambda_1, m \in \Lambda_2}, \{\overline{s}_k\}_{k \in \Lambda_3}$, とする．ただし Λ_1 と Λ_3 は無限集合とする．ここで，$U = \overline{\mathrm{span}(\{b_n, \overline{s}_\ell\}_{\ell \in \Lambda_4})}$ とする．ただし Λ_4 は Λ_3 の真部分集合で，Λ_4 も $\Lambda_3 \backslash \Lambda_4$ もともに無限集合になっているようなものとする．$B \leq U \leq (B \vee S^{\perp})$ は明らかに成立している．また $B \leq S$ であったので，$S^{\perp} \leq B^{\perp}$ となっている．よって $S^{\perp} \wedge U \leq B^{\perp} \wedge U$ となっているが，左辺は $\overline{\mathrm{span}(\{\overline{s}_j\}_{j \in \Lambda_4})}$ となるが，Λ_4 が無限集合であったことからこれは無限次元になっている．よって $B^{\perp} \wedge U$ もまた無限次元になっている．更に $S \vee U = \overline{\mathrm{span}(\{a_m, b_n, \overline{s}_\ell\}_{n \in \Lambda_1, m \in \Lambda_2, \ell \in \Lambda_4})}$ となるが，$\overline{s}_k (k \in \Lambda_3 \backslash \Lambda_4)$ は明らかにこれに直交しており，無限本あるので $(S \vee U)^{\perp}$ が無限次元であるとわかる．よってそのような U は存在することがわかった．

(E, G, F) を定理 20 で具体的に構成した一般化された三つ組みであるとする．そして $\sigma : E \vee F \to U$ を，

$\sigma(G) = B$ であるような同型写像とする．[39] ここで，$P := \sigma(E)$，$Q := \sigma(F)$ としておく．このように定めた P, Q が望むものであることを今から示す．

性質 1,2,3 について．構成より自明．

性質 4 について．

条件より，$B \le S$ であるので $B \subset S$ となり，更に S と $S^{\perp}$ が直交していることから $S \subset S^{\perp}$ も成立する．よって定理 14 の性質 4 より，$B \subset S^{\perp}$ が成立する．よって定理 14 の性質 6 の 1 つ目の式より，$S \wedge (B \vee S^{\perp}) = (S \wedge B) \vee (S \wedge S^{\perp}) = B \vee \{0\} = B$ となる．ただし $B \le S$ より $S \wedge B = S \cap B = B$ であることを用いた．また構成より明らかに $(P \vee Q) \le (B \vee S^{\perp})$ となるので，$(P \vee Q) \wedge S \le (B \vee S^{\perp}) \wedge S$ を得る．しかし右辺は先程計算したとおり B に一致するので，$(P \vee Q) \wedge S \le B$ となる．一方，構成方法より $B \le (P \vee Q)$ であり，更に条件より $B \le S$ であったので，$B \le (P \vee Q) \wedge S$ となる．合わせて $(P \vee Q) \wedge S = B$ となる．

性質 5 について．

$v \in (P \wedge S)$ とする．この時特に $v \in P$ となっている．一方で上で示した性質 4 より，$(P \wedge S) \le (P \vee Q) \wedge S = B$ となるので，$v \in B$ とわかる．よって，$v \in P \wedge B$ となる．しかし性質 3 より (P, B, Q) は一般化された三つ組みであって，従って一般化された三つ組みの定義 1 より，$P \wedge B = \{0\}$ なので，$v = 0$ となる．これは $(P \wedge S) = \{0\}$ を意味する．$(Q \wedge S) = \{0\}$ も同様にしてわかる．

性質 6 について．

$v \in (P + Q) \wedge S$ とする．この時，ある P, Q, S の元 p, q, s が存在し，$v = p + q = s$ と書ける．$(P + Q) \wedge S \le (P \vee Q) \wedge S = B$ なので，$v \in B$ となり，$v \in (P + Q) \wedge B$ とわかる．しかし (P, B, Q) が一般化された三つ組みであったので，$(P + Q) \wedge B = 0$ であり，これは $(P + Q) \wedge S = \{0\}$ を意味する．

性質 7 について．

構成より，$P \vee Q \le B \vee S^{\perp}$ であるので，$(B \vee S^{\perp})^{\perp} \le (P \vee Q)^{\perp}$ となっている．今 $B \le S$ であったので，量子論理のオーソモジュラ性と De Morgan の法則より $S = B \vee (S \wedge B^{\perp}) = B \vee (S^{\perp} \vee B)^{\perp} \le B \vee (P \vee Q)^{\perp}$ となり，題意を得た．

性質 8 について．

[39] もとの論文だと，この節全体を通して Hilbert 空間に可分性を特に要求しないと断られているが，G が可分であるので，$\mathcal{H}$ が可分でない時 B として可分でないものを持ってくることができるので，矛盾してしまう．したがって少々荒業ではあるがこの節全体を通して Hilbert 空間に可分性を要求することにした．もし $\mathcal{H}$ が可分でないときにも条件を満足するような同型写像が構成できることをご存じの方がいたら教えていただきたい．

(P, B, Q) が一般化された三つ組みであったことから $P\vee B = P+B$ となっていて，更に $(P\vee Q)^{\perp}$ は P に直交していて，性質 4 より B は $P\vee Q$ の部分集合であったので，B も $(P\vee Q)^{\perp}$ に直交しているとわかる．よって定理 18 より，$P\vee(B\vee(P\vee Q)^{\perp}) = P+(B\vee(P\vee Q)^{\perp})$ となる．さらに直交性より，$(P\vee Q)^{\perp}$ は B, P の両者と両立していて，定理 14 の性質 6 より，$(B\vee(P\vee Q)^{\perp})\wedge P = (B\wedge P)\vee((P\vee Q)^{\perp}\wedge P) = \{0\}\vee\{0\} = \{0\}$ とわかる．よって $(B\vee(P\vee Q)^{\perp})\vee P = (B\vee(P\vee Q)^{\perp})+P$ となる．一方，T を閉部分空間であって $T\leq S$ を満足するとする．上で証明した性質 7 より，$S\leq(B\vee(P\vee Q)^{\perp})$ であるので，$T\leq S$ と合わせて $T\leq(B\vee(P\vee Q)^{\perp})$ となる．したがって，$T\vee P = T+P$ となる．全く同様にして $T\vee Q = T+Q$ も得る．

性質 9 について．

まず (P, B, Q) が一般化された三つ組みになっているので $B\leq(P\vee Q)$ でもある．したがって $B \,\mathrm{C}\, T$, $B \,\mathrm{C}\, (P\vee Q)^{\perp}$ である．したがって定理 14 の性質 6 と，仮定より $B\leq T$ が成立していることより，$B\vee(T\wedge(P\vee Q)^{\perp}) = (B\vee T)\wedge(B\vee(P\vee Q)^{\perp}) = T\wedge(B\vee(P\vee Q)^{\perp}) = T$ となる．ただし最後の等号で定理 21 の性質 7 と，$T\leq S$ という過程を用いた．更に定理 21 の性質 4 と，$B\leq T\leq S$ という仮定から，$T\wedge(P\vee Q) = B$ となるので，よって $(T\wedge(P\vee Q))\vee(T\wedge(P\vee Q)^{\perp}) = B\vee T = T$ となる．よって題意を得た．

性質 10 について．

性質 9 と全く同様

性質 11-1 について．

$R\wedge T\leq(R\vee P)\wedge T$ が成立することは自明．逆の包含を示す．$v\in(R\vee P)\wedge T$ とする．定理 21 の性質 8 より，$R\vee P = R+P$ であるので，R, P, T の元 r, p, t を用いて $v = r+p = t$ と書くことができる．したがって $p = r-t$ と書けるが，ここで $t-r$ は t, r がそれぞれ T, R の元であり，よって特に 2 つとも S の元であるので，$r-t$ もやはり S の元とわかる．したがって，p は $P\wedge S$ の元であるが，定理 21 の性質 5 より $P\wedge S = \{0\}$ であるため，$p = 0$ とわかる．よってもとに戻れば $v = r = t$ となるので，$v\in R+T\subset R\vee T$ となるので，逆の包含関係も示せた．

性質 11-2 について．

$(R\wedge T)\vee P\leq R\vee P$ と $(T\wedge R)\vee P\leq T\vee P$ が成立するので，$(R\wedge T)\vee P\leq(R\vee P)\wedge(T\vee P)$ がわかる．逆の包含を示す．$v\in(R\vee P)\wedge(T\vee P)$ と仮定する．定理 21 の性質 8 より，$R\vee P = R+P$, $T\vee P = T+P$ と書ける．したがって P の元 p_1, p_2 と T, R の元 t, r を用いて，$v = p_1+r = p_2+t$ と書くことができる．変形して $r-t = p_2-p_1$ となるが，性質 11-1 の証明と同様にして $r-t = 0$ がわかる．した

がって，$r=t$ となる．よって v は $R\wedge T$ の元 r と P の元 p を用いて $v=r+p$ と書ける．よって，$v\in(R\wedge T)+P\subset(R\wedge T)\vee P$ となり逆向きの包含も示せた．Q に対する式も全く同様にして証明できる．

性質 11-3 について．

$R\wedge T\le(R\vee P)\wedge(T\vee Q)$ が成立することは自明．逆の包含を示す．$v\in(R\vee P)\wedge(T\vee Q)$ とすると，R,P,T,Q の元 r,p,t,q を用いて $v=r+p=t+q$ と書ける．よって $r-t=q-p$ となるが，左辺は S の元であり右辺は $P+Q$ の元であるが，定理 21 の性質 6 より，$(P+Q)\wedge S=\{0\}$ であるので，$r-t=0$ とわかる．また特に $p=q$ となるが，(P,B,Q) が一般化された三つ組みであったことより，$P\wedge Q=\{0\}$ なので，$p=q=0$ となる．よって $v=r=t$ と書けるために，$v\in R\wedge T$ とわかるので題意を得た．

性質 11-4 について．

$R\wedge T\le R\wedge(T\vee(P\vee Q))$ が成立するのは自明．逆の包含を示す．$v\in R\wedge(T\vee(P\vee Q))$ とする．この時，$B\le T$ であるので，定理 21 の性質 10 より，$T\vee(P\vee Q)=T+(P\vee Q)$ と書けるため，$R,T,(P\vee Q)$ の元 r,t,x を用いて $v=r=t+x$ と書ける．定理 21 の性質 11-3 の証明と同様にして，$x=0$ とわかるので，$v=r=t$ となるので，題意を得た．

性質 11-5 について．

$R\wedge T\le(R\vee P)\wedge(T\vee(P\vee Q))$ であり，$P\le(R\vee P)\wedge(T\vee(P\vee Q))$ でもあるので，$(R\wedge T)\vee P\le(R\vee P)\wedge(T\vee(P\vee Q))$ を得る．逆の包含関係を示す．$v\in(R\vee P)\wedge(T\vee(P\vee Q))$ とする．この時，$B\le T$ であるので，定理 21 の性質 10 より，$T\vee(P\vee Q)=T+(P\vee Q)$ と書けるため，$R,P,T,(P\vee Q)$ の元 r,p,t,x を用いて，$v=r+p=t+x$ と書くことができる．したがって，$r-t=x-p$ と書ける．この時左辺は S の元で，右辺が $P\vee Q$ であるが，定理 21 の性質 4 より，$(P\vee Q)\wedge S=B$ であるので，B の元 b を用いて，$r-t=x-p=b$ と書ける．その時，$r=t+b$ であるが，t,b がともに T の元であるので，r も T の元であるとわかる．したがって，$v=r+p\in R+P=R\vee P$ となり題意を得た．

性質 11-6 について．

$R\wedge T\le(R\vee(P\vee Q))\wedge(T\vee(P\vee Q))$ であり，$P\vee Q\le(R\vee(P\vee Q))\wedge(T\vee(P\vee Q))$ なので，$(R\wedge T)\vee(P\vee Q)\le(R\vee(P\vee Q))\wedge(T\vee(P\vee Q))$ が成立することはわかる．逆の包含を示す．$v\in(R\vee(P\vee Q))\wedge(T\vee(P\vee Q))$ とする．$B\le R\le S,\quad B\le T\le S$ であることと定理 21 の性質 10 より，$R\vee(P\vee Q)=R+(P\vee Q),\quad T\vee(P\vee Q)=T+(P\vee Q)$ となるため，$(R\vee(P\vee Q))\wedge(T\vee(P\vee Q))=(R+(P\vee Q))\wedge(T+(P\vee Q))$ と書ける．したがって，R,T の元 r,t

と $P \vee Q$ の元 x, y を用いて，$v = r + x = t + y$ と書くことができる．よって $r - t = y - x$ となるが，左辺が S の元で右辺が $P \vee Q$ の元なので，実は B の元 b を用いて $r - t = y - x = b$ と書くことができる．よって $r = t + b$ となるが，右辺が T の元なので，左辺も T の元であり，したがって $r \in T$ とわかる．なので，$v = r + t \in (R \wedge T) + (P \vee Q) \subset (R \wedge T) \vee (P \vee Q)$ となり題意を得た． $\square$

4.3 主定理

定義

Δ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間の集合とする．これが生成するダイアグラム $\mathcal{D}(\Delta)$ を，(Δ, R_Δ) のペアとする．ただしここで，R_Δ は Δ の元 A, B, C に対して，$A \le (B \vee C)$ が $\mathcal{H}$ の閉部分空間として成立するときに限り，"$A \le (B \vee C)$" $\in R_\Delta$ として定義されるとする．

$\mathcal{D}_\Delta$ が実際にダイアグラムの公理を満足することは明らかである．このダイアグラムが生成する束 $L(\mathcal{D}_\Delta)$ やダイアグラム内での閉包 $\mathrm{clos}(\Gamma)$ $(\Gamma \subset \Delta)$ なども全く同様に定義することができる．

定義

Γ を $\mathcal{H}$ の閉部分空間の集合とする．この時，$\overline{\Gamma} := \bigvee_{A \in \Gamma} A$ と定義する．

例えば，$\Gamma = \{A\}$ ならば $\overline{\Gamma} = A$ で，$\Gamma = \{A, B, C\}$ ならば $\overline{\Gamma} = A \vee B \vee C$ といった具合です．もし $\Pi \subset \Gamma$ であるならば $\overline{\Pi} \subset \overline{\Gamma}$ であることがすぐに分かります．

定理 22

Δ を $\mathcal{H}$ の閉部分空間を元に持つ有限集合とする．また Γ, Π を Δ の任意の部分集合とする．その時以下が成立する．ただし，ここで clos は $\mathcal{D}(\Delta)$ の中での閉包を意味する．

性質 1: $\overline{\Pi} = \overline{\mathrm{clos}(\Pi)}$

性質 2: $\overline{\Gamma \cup \Pi} = \overline{\Gamma} \vee \overline{\Pi}$

性質 3: $\overline{\mathrm{clos}(\Gamma \cup \Pi)} = \overline{\Gamma} \vee \overline{\Pi}$

証明

性質 1 について．

まず，Π は $\mathrm{clos}(\Pi)$ の部分集合であるので，$\overline{\Pi} \le \overline{\mathrm{clos}(\Pi)}$ を得る．次に $\mathrm{clos}(\Pi)$ の任意の元を持ってきてこれを A とする．この時，閉包の定義より $A \le \overline{\Pi}$ となるが，$\overline{\mathrm{clos}(\Pi)} = \bigvee_{A \in \mathrm{clos}(\Pi)} A$ であったので，したがって $\overline{\mathrm{clos}(\Pi)} \le \overline{\Pi}$ となる．

性質 2 について．

まず，Γ, Π がともに $\Gamma \cup \Pi$ の部分集合であることから，$\overline{\Gamma} \le \overline{\Gamma \cup \Pi}$，$\overline{\Pi} \le \overline{\Gamma \cup \Pi}$ が成立するので，$(\overline{\Gamma} \vee \overline{\Pi}) \le \overline{\Gamma \cup \Pi}$ となる．次に $\Gamma \cup \Pi$ の任意の元を持ってきてそれを A とする．その時 $A \in \Gamma$ か $A \in \Pi$ の少なくともどちらか一方が成立するが，どちらでも同じことなので，$A \in \Gamma$ と仮定する．その時

$A \leq \overline{\Gamma}$ となるので，$A \leq (\overline{\Gamma} \vee \overline{\Pi})$ となる．今 $\overline{\Gamma \cup \Pi} = \bigvee_{A \in (\Gamma \cup \Pi)} A$ であったので，逆向きの包含関係を得てよって題意が示された．

性質 3 について．

性質 1，2 より明らか． □

定義

Δ を $\mathcal{H}$ の閉部分空間を元に持つ有限集合とする．この時，Δ の元により生成される $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の部分束を $\mathcal{L}^{\Delta}$ と書く．

定義

Δ を $\mathcal{H}$ の閉部分空間を元に持つ有限集合とする．もし Δ のすべての元が無限次元部分空間で，更にすべてが線形独立で，そして Δ の，任意の ($\mathcal{D}(\Delta)$ の意味での) 閉部分集合 Γ, Π が $\overline{\Gamma} \wedge \overline{\Pi} = \overline{\Gamma \cap \Pi}$ を満たす時，Δ は**強原子的 (strongly atomic)** であるという．

定理 23

Δ を，閉部分空間の集合であり，かつ強原子的であるとする．その時写像 $\sigma : \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Delta)) \to \mathcal{L}^{\Delta}$，$\Gamma \mapsto \overline{\Gamma}$ は束同型写像である．ただし 2 つの束 $L, , M$ があって，L から M への写像 f が束同型であるとは，$a, b \in L$ に対して，$f(a \vee_L b) = f(a) \vee_M f(b)$，$f(a \wedge_L b) = f(a) \wedge_M f(b)$ を満たし且つ全単射であることを意味する．

証明　ダイアグラムが生成する束の定義より，$\Gamma, \Pi \in \Delta$ に対して，$\Gamma \vee \Pi = \mathrm{clos}(\Gamma \cup \Pi)$，$\Gamma \wedge \Pi = \Gamma \cap \Pi$ で定義される．あとは定理 22 の性質 3 と，$\mathcal{L}^{\Delta}$ の生成子が $\{A\}$ という形をしていることより自明． □

定理 24

Δ が強原子的であり，$\overline{\Delta}^{\perp}$ が $\mathcal{H}$ の中で無限次元になっているとする．B を Δ の元とする．$S := \overline{\Delta}$ とすると，$S \geq B$ となるので，定理 21 と同様に B, S から閉部分空間 P, Q を構成できる．$\Delta' := \Delta \vee \{P, Q\}$ とすると，Δ' の閉部分集合は，(1)Γ，(2)$\Gamma \cup \{P\}$，(3)$\Gamma \cup \{Q\}$，(4)$\Gamma \cup \{P, Q\}$ のいずれかの形である．ただし Γ は Δ の閉部分集合であり，$\Gamma \cup \{P, Q\}$ なる形のときは $B \in \Gamma$ が成立していなければならない．

証明　Γ を Δ の任意の部分集合としたときに，Δ' の必ずしも閉とは限らない任意の部分集合は明らかに Γ，$\Gamma \cup \{P\}$，$\Gamma \cup \{Q\}$，$\Gamma \cup \{P, Q\}$ のいずれかの形になっている．それぞれの場合を検証していく．

(1) Γ が Δ の中で閉であるとする．この時，任意の Δ の元 E, F に対して，$E \vee F$ が再び Γ の元になっているが，定理 21 の性質 5 より，$P \wedge (E \vee F) = Q \wedge (E \vee F) = \{0\}$ となるので，したがって $P \leq (E \vee F)$ や $Q \leq (E \vee F)$ という形の元は $R_{\Delta'}$ 内には存在しない．したがって，Γ は Δ' の中で再び閉になるとわかる．逆に Γ が Δ の中で閉でないならば，明らかに Δ' の中でも閉ではない．よって Γ が Δ' の中で閉であることの必要十分条件は Γ が Δ の中で閉であることだとわかった．

(2) 次に Γ が Δ の中で閉ではないとする．この時, ある Γ の元 E, F と $\Delta \backslash \Gamma$ の元 G が存在し, かつ $G \leq (E \vee F)$ が成立していることになる．この時，明らかに E, F は $\Gamma \cup \{P\}$ の元であり，かつ G はそれの元ではない．したがって $\Gamma \cup \{P\}$ は Δ' の中で閉ではない．逆に Γ が Δ の中で閉であるとする．この時，$\Gamma \cup \{P\}$ が Δ' の中で閉であることを主張したい．Γ の元 F と Δ の元 G であって，$G \leq (F \vee P)$ を満足するものを考える．この時，($G = P$ は自明なので除外して考えるとして)$G \in \Gamma$ が示せれば $\Gamma \cup \{P\}$ が Δ' の中で閉であるとわかる．しかし定理 21 の性質 11-1 より，(T を G に置き換え，R を F に置き換える．ここで $S = \overline{\Delta}$ なので，$F \leq S, G \leq S$ が成立することに注意．)$G \wedge (F \vee P) = G \wedge F$ となる．しかし $G \leq (F \vee P)$ であったので，左辺は G に等しい．よって $G = G \wedge F$ となるが，これは $G \leq F$ を意味する．Γ は閉なので，Γ の任意の二元 A, B に対して $C \leq (A \vee B)$ という形が閉部分空間として成立しているならば (つまり，そういう形の元が R_{Δ} に属しているならば)$C \in \Gamma$ となるので，$A = B = F$ としてやると，$G \leq F = (F \vee F)$ が閉部分空間として成立しているため $G \in \Gamma$ となる．よって $\Gamma \cup \{P\}$ が Δ' の中で閉であることがわかった．

(3) (2) と同様.

(4) $\Gamma \cup \{P, Q\}$ が Δ' の中で閉であるとする．すると P, Q の構成より $B \leq (P \vee Q)$ となっているので，$B \in \Gamma$ とならなければいけない．$E, F \in \Gamma$ とし，$G \in \Delta$ に対して $G \leq (E \vee F)$ が成立しているとしよう．この時 $G \in \Gamma$ を示せば Γ が Δ の中で閉であるとわかる．$\Gamma \in \Delta$ なので，特に $\Gamma \in \Delta'$ でもあり，$G \leq (E \vee F)$ が成立していて，$\Gamma \cup \{P, Q\}$ が Δ' の中で閉なので，$G \in (\Gamma \cup \{P, Q\})$ であるとわかる．しかし定理 21 の性質 5 より，$P \leq (E \vee F)$ や $Q \leq (E \vee F)$ は成立し得ないので，$G = P$ や $G = Q$ はありえない．よって $G \in \Gamma$ であることがわかった．逆に Γ が Δ の中で閉で，かつ $B \in \Gamma$ を満たしているとする．$\Gamma \cup \{P, Q\}$ が Δ' の中で閉であることを示したい．そのためには，$E, F \in (\Gamma \cup \{P, Q\})$ とし，$G \in \Delta'$ が $G \leq (E \vee F)$ を満足しているとして，$G \in (\Gamma \cup \{P, Q\})$ を示せば十分．もし，E, F がともに Γ の元であるならば，Γ が Δ の中で閉であったので，$G \in \Gamma$ となり，よって $G \in (\Gamma \cup \{P, Q\})$ となる．$E \in \Gamma$ で $F \in \{P, Q\}$ であるとすると，定理 21 の性質 5 より，$E \wedge F = \{0\}$ となるので，$E \vee F = E + F$ となる．しかしこの時，$P \notin \Delta$ なので，$G \leq (E \vee F)$ は結局 $G \leq E$ となるので，(2) と同様にして $G \in \Gamma$ が従う．最後に $E = P, F = Q$ であるとすると，この時定理 21 の性質 4 より，Δ の元 G で，$G \leq (F \vee F)$ を満足しうる唯一の元は B であり，$B \in \Gamma$ は仮定されていたので，すべての場合で $\Gamma \cup \{P, Q\}$ が閉であるとわかった．以上により題意を得た． $\square$

定理 25

Δ を閉部分集合の集まりであり, かつ強原子的であるとする．更に $\overline{\Delta}^{\perp}$ が無限次元であるとする．Δ の元を一つ持ってきて, それを B とする．$S := \overline{\Delta}$ として, 定理 21 と同様にして P, Q を構成し, $\Delta' := \Delta \cup \{P, Q\}$ とする．その時次の性質が成立する．

性質 1: $\overline{\Delta'}^{\perp}$ は無限次元

性質 2: $\mathcal{D}(\Delta')$ の原始的関係は，すべて $\mathcal{D}(\Delta)$ の原始的関係であるかあるいは "$B \leq (P \vee Q)$" であるかである．

性質 3: Δ' は強原子的である．

証明　性質 1: 定理 21 の性質 2 そのものである．

性質 2: $\mathcal{D}(\Delta)$ の原始的関係がすべて $\mathcal{D}(\Delta')$ の原始的関係になることは自明．$E \in \Delta$ が $E \leq (P \vee Q)$ を満足するとする．この時定理 21 の性質 4 より，$E = B$ となることがわかる．Δ の元 E, F に対して，$P \leq (E \vee F)$ や $Q \leq (E \vee F)$ が成立しないことは定理 21 の性質 5 よりわかる．最後に Δ の元 E, F に対して，$E \leq (F \vee P)$ となる場合だが，これは定理 24 の (2) の証明と同様にして，$E \leq F$ がわかるので，結局 "$B \leq (P \vee Q)$" の他に新しい原始的関係は付け加わらない事がわかる．

性質 3: 定理 21 の性質 3，6 より，$P \wedge Q = \{0\}$，$(P + Q) \wedge \overline{\Delta} = \{0\}$ が成立することがわかる．したがって，Δ の元がすべて線形独立であるとしていたので，Δ' の元も全て線形独立であるとわかる．あとは Δ' の任意の閉部分集合 Γ', Π' が $\overline{\Gamma'} \wedge \overline{\Pi'} = \overline{\Gamma' \cap \Pi'}$ を満足することを示せば十分．$(\Gamma \cap \Pi) \leq \Gamma$，$(\Gamma \cap \Pi) \leq \Pi$ が成立するので，$\overline{\Gamma \cap \Pi} \leq \overline{\Gamma}$ などが成立し，したがって $\overline{\Gamma' \cap \Pi'} \leq (\overline{\Gamma'} \wedge \overline{\Pi'})$ が成立することがわかる．後は $\overline{\Gamma'} \wedge \overline{\Pi'} \leq \overline{\Gamma' \cap \Pi'}$ を示せば良い．定理 24 より，Δ' の閉部分集合はすべて，(1)Γ，(2)$\Gamma \cup \{P\}$，(3)$\Gamma \cup \{Q\}$，(4)$\Gamma \cup \{P, Q\}$ $(B \in \Gamma)$ という形で書けるのであった．(ただし Γ は Δ の閉部分集合) 以下，対称性を考慮しつつすべての場合を見ていく．これ以降 Γ, Π は Δ の閉部分集合とし，更に Δ が強原子的なので $\overline{\Delta} \wedge \overline{\Pi} = \overline{\Delta \cap \Pi}$ が成立していることに注意する．

場合 1

$\Gamma' = \Gamma$，$\Pi' = \Pi$ となるとき．仮定より $\overline{\Gamma'} \wedge \overline{\Pi'} = \overline{\Gamma' \cap \Pi'}$ が成立する．

場合 2

$\Gamma' = \Gamma$，$\Pi' = \Pi \cup \{P\}$ となるとき．定理 22 の性質 2 と定理 21 の性質 11-1 より，$\overline{\Gamma} \wedge \overline{(\Pi \cup \{P\})} = \overline{\Gamma} \wedge (\overline{\Pi} \vee \overline{\{P\}}) = \overline{\Gamma} \wedge (\overline{\Pi} \vee P) = \overline{\Gamma} \wedge \overline{\Pi} = \overline{\Gamma \cap \Pi} \leq \overline{\Gamma \cap (\Pi \cup \{P\})}$ となるので題意を得た．

場合 3

$\Gamma' = \Gamma$, $\Pi' = \Pi \cup \{P,Q\}$ $(B \in \Pi)$ となるとき．定理 22 の性質 2 と定理 21 の性質 11-4 より，$\overline{\Gamma} \wedge \overline{(\Pi \cup \{P,Q\})} = \overline{\Gamma} \wedge (\overline{\Pi} \vee \overline{\{P,Q\}}) = \overline{\Gamma} \wedge (\overline{\Pi} \vee (P \vee Q)) = \overline{\Gamma} \wedge \overline{\Pi} = \overline{\Gamma \cap \Pi} \leq \overline{\Gamma \cap (\Pi \cup \{P,Q\})}$ となるので題意を得た．

場合 4

$\Gamma' = \Gamma \cup \{P\}$, $\Pi' = \Pi \cup \{P\}$ となるとき．今までと同様に $\overline{\Gamma \cup \{P\}} \wedge \overline{\Pi \cup \{P\}} = (\overline{\Gamma} \vee P) \wedge (\overline{\Pi} \vee P) = (\overline{\Gamma} \wedge \overline{\Pi}) \vee P = (\overline{\Gamma \cap \Pi}) \vee P = (\overline{\Gamma \cap \Pi}) \vee \overline{\{P\}} = \overline{(\Gamma \cap \Pi) \cup \{P\}} = \overline{(\Gamma \cup \{P\}) \cap (\Pi \cup \{P\})}$ となるので題意を得た．

場合 5

$\Gamma' = \Gamma \cup \{P\}$, $\Pi' = \Pi \cup \{Q\}$ となるとき．今までと同様に $\overline{\Gamma \cup \{P\}} \wedge \overline{\Pi \cup \{Q\}} = (\overline{\Gamma} \vee P) \wedge (\overline{\Pi} \vee Q) = \overline{\Gamma} \wedge \overline{\Pi} = \overline{\Gamma \cup \Pi} \leq \overline{(\Gamma \cup \{P\}) \cap (\Pi \cup \{Q\})}$ となるので題意を得た．

場合 6

$\Gamma' = \Gamma \cup \{P\}$, $\Pi' = \Pi \cup \{P,Q\}$ $(B \in \Pi)$ となるとき．$(\Gamma \cap \Pi) \cup \{P\} = (\Gamma \cup \{P\}) \cap (\Pi \cup \{P\})$ となるので，$\overline{(\Gamma \cup \{P\})} \wedge \overline{\Pi \cup \{P,Q\}} = (\overline{\Gamma} \vee P) \wedge (\overline{\Pi} \vee (P \vee Q)) = (\overline{\Gamma} \wedge \overline{\Pi}) \vee P = (\overline{\Gamma \cap \Pi}) \vee P = (\overline{\Gamma \cap \Pi}) \vee \overline{\{P\}} = \overline{(\Gamma \cap \Pi) \cup \{P\}} = \overline{(\Gamma \cup \{P\}) \cap (\Pi \cup \{P\})} \leq \overline{(\Gamma \cup \{P\}) \cap (\Pi \cup \{P,Q\})}$ となるので題意を得た．

場合 7

最後に $\Gamma' = \Gamma \cup \{P,Q\}$ $(B \in \Gamma)$, $\Pi' = \Pi \cup \{P,Q\}$ $(B \in \Pi)$ となるとき．$(\Gamma \cap \Pi) \cup \{P,Q\} = (\Gamma \cup \{P,Q\}) \cap (\Pi \cup \{P,Q\})$ が成立するので，$\overline{\Gamma \cup \{P,Q\}} \wedge \overline{\Pi \cup \{P,Q\}} = (\overline{\Gamma} \vee (P \vee Q)) \wedge (\overline{\Pi} \vee (P \vee Q)) = (\overline{\Gamma} \wedge \overline{\Pi}) \vee (P \vee Q) = (\overline{\Gamma \cup \Pi}) \vee \overline{\{P,Q\}} = \overline{(\Gamma \cap \Pi) \cup \{P,Q\}} = \overline{(\Gamma \cup \{P,Q\}) \cap (\Pi \cup \{P,Q\})}$ となるので題意を得た．

以上の 7 つですべてを尽くしているので，よって題意が得られた． □

さて，この付録では一般化束の話と Hilbert 空間 (あるいは量子論理) の話が 2 つ並行して行われてきました．それらの間になにか関係はあるのでしょうか．それが以下の定理です．

定理 26

1 以上の整数 n に対して，$\mathcal{H}$ の閉部分空間からなるある強原子的な集合 Δ_n が存在しそれの生成する束 $\mathcal{L}^{\Delta_n}$ がオーダー n の一般化束 $\mathcal{L}_n$ と束同型になる．したがって，すべての一般化束は量子論理 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の部分束として埋め込むことができる．

証明　帰納的に証明する．$n=1$ の時，A を $\mathcal{H}$ の閉部分空間で，A と $A^{\perp}$ がともに無限次元であるようなものとしておく．$\Delta_1=\{A\}$ とすれば，題意が成立することは明らか．次に $n\geq 1$ として強原子的な Δ_n と，束同型写像 $\sigma_n:\mathcal{L}_n\to\mathcal{L}^{\Delta_n}$ が存在したとする．Δ_{n+1} と σ_{n+1} を具体的に構成すれば良い．$\mathcal{L}_n$ にはランク 1 の原子が 4^{n-1} 個存在しているので，それを $A_1,A_2,\cdots,A_{4^{n-1}}$ と書くことにする．そして強原子的な集合 $\Delta_n^0,\Delta_n^1,\cdots,\Delta_n^{4^{n-1}}$ を以下のように構成する．

手順 1

$\Delta_n^0=\Delta_n$ とする．この時 Δ_n^0 が強原子的であることは明らか．

手順 2

Δ_n^r が強原子的なものとして定義されているとする．$S=\Delta_n^r$，$B=A_r$ と見做して定理 21 を用いて，P,Q を構成することができるので，$E_r:=P$，$F_r:=Q$ としておく．更に $S=\overline{\Delta_n^r\cup\{E_r,F_r\}}$，$B=A_r$ と見做して再び定理 21 を用いて新しい P,Q を構成することができるので，$G_n:=P$，$H_n=Q$ としておく．$\Delta_n^{r+1}=\Delta_n^r\cup\{E_r,F_r,G_r,H_r\}$ と定義すると，定理 24 より Δ_n^{r+1} が強原子的になっていることがわかる．更に原始的関係の集合 $\mathcal{D}(\Delta_n^{r+1})$ は，$\mathcal{D}(\Delta_n^r)$ の元全てと，“$A_r\leq(E_r\vee F_r)$”, “$A_r\leq(G_r\vee H_r)$” という形だけになることもわかる．

このようにして強原子的な集合 $\Delta_n^0,\Delta_n^1,\cdots,\Delta_n^{4^{n-1}}$ を構成して，$\Delta_{n+1}:=\Delta_n^{4^{n-1}}$ と定義する．この時，一般化された束の別定義より，$\mathcal{D}(\Delta_{n+1})$ が一般化されたダイアグラム $\mathcal{D}_{n+1}$ に同値であることがわかるので，$\mathcal{D}(\Delta_{n+1})$ が生成する束が一般化束 (一般化されたダイアグラムが生成する束であった)$\mathcal{L}_{n+1}$ と同値であることもわかった．

さて，いよいよ次の定理がメインの定理です．

定理 27

ϕ,ξ を word としたときに $\phi\leq\xi$ という関係を考える．それが無限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間のなす束 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の中で valid であることの必要十分条件は，$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の元 λ に対して，$\lambda\leq\lambda$ という関係から出発して，以下の推論規則を用いて $\phi\leq\xi$ が導出できることである．

$$\frac{\theta\leq\tau}{(\theta\wedge\rho)\leq\tau}$$

$$\frac{\theta\leq\tau\quad\theta\leq\rho}{\theta\leq(\rho\wedge\tau)}$$

$$\frac{\theta\leq\tau\quad\rho\leq\tau}{(\theta\vee\rho)\leq\tau}$$

$$\frac{\theta\leq\rho}{\theta\leq(\rho\vee\tau)}$$

証明　定理 1 と定理 11 より，上の主張が一般化束に対して正しいことはわかる．また定理 26 より一般化束を $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ に埋め込めるので，題意を得た．ただし，word の定義より ϕ も ξ も $\neg$ を含んでいないことに注意．
$\square$

5　謝辞

この pdf を作成するに当たり多くの方にご協力していただきました．物理学科の友人達をはじめ，Twitter での友人の Cu(@math_ter0713) さんや統治行為論 (@t0uch1co) さん，実数 (@rityo_masu) さんにはいくつもの貴重な指摘を頂きました．また実数さんには特に LaTeX に関する貴重なアドバイスなどもしてもらいました．この場を借りてお礼を申し上げます．

6　参考文献

束論の議論は主に

[1] 竹内外史，線形代数と量子力学 (裳華房，2009)

[2] 前田周一郎，束論と量子論理 (森北出版，2015)

を参考にした．[1] は全体が約 180 ページほどで，60 ページで数学的な準備をし，60 ページで量子力学の初歩を解説し，60 ページで量子論理の導入がなされている．[2] はより高度な内容であり，読むのであれば [1] を読んだ後のほうがいいかもしれない．

また，解析学の内容 (Lebesgue 積分など) は

[3] 伊藤清三，ルベーグ積分入門 (新装版) (裳華房，2017)

[4] 黒田成俊，関数解析 (共立出版，1980)

などに，この pdf で省略した内容が書かれている．[4] では Lebesgue 積分の詳細な定理などはすべて省略されてしまっているので，例えば L^2 空間の完備性の証明などをすべて証明したいと思うなら [3] を読めばいいと思う．[3] も後半に函数空間に関する話がいくつか与えられている．この pdf とは直接の関係はないが，物理で用いる特殊函数の完全性などもいくつか載っているため，量子力学の例えば Hermite 多項式や Legendre 多項式に興味があれば読んでみると面白いかもしれない．脚注で軽く触れた作用素について詳しく知りたければ [4] が良いと思う．ただ Lebesgue 積分も函数解析も他にも様々な本があるので他の本でも構わないと思う．

付録のセクションについては

[5] Monty Montague Denneau，On the decidability of the identities valid in the lattice of closed subspaces of an infinite dimensional Hilbert space (University of Illinois,1978)

[6] Garret Birkoff，Lattice theory (3rd edition) (American mathematical society colloquium publications，1967)

を参考にした．また，付録セクションのいくつかの定理は

[7] Samuel S. Holland, Jr.，A Radon-Nikodym theorem in dimension lattice

によった．

7 修正履歴

投稿後に友人たちから指摘を受けて修正したミスなどの履歴をここに書きます．記載しているページ数はなるべく最新版でのページ数を書くつもりですが，そこを更に間違えてしまう可能性は否定できません．指摘していただいた方たちには深く感謝申し上げます．

5 月 15 日修正分

p.34： word の定義内において polynomial を polinomial と誤った綴りで書いていたため修正した．

p.36 の一般化された word の定義のすぐ下：「見て見ましょう」を「見てみましょう」と修正した．

p.42, ダイアグラムの中心の定義の 2 行目：「$\mathcal{D} = (D, R_D)$ 根源的ダイアグラム (underlying diagram)」において「を」が抜けていたため「$\mathcal{D} = (D, R_D)$ を根源的ダイアグラム (underlying diagram)」と修正した．

p.42, ダイアグラムの中心の定義の 3 行下：「適応」と書いていた部分を「適用」と修正した．

p.52, 誘導された解釈の定義内：誘導された解釈の英語を書いていなかったため，induced interpretation と書き加えた．

p.53,l.9： $\mathcal{L}_n \models R \leq (\overline{\xi_1} \wedge \overline{\xi_2} \Rightarrow$ において) が抜けていたので $\mathcal{L}_n \models R \leq (\overline{\xi_1} \wedge \overline{\xi_2}) \Rightarrow$ と修正した．

P.75,l.2： Cu さんの TwitterID を @math_ter0731 と間違えていたため @math_ter0713 と修正した．(ハイパーリンク自体は間違っていなかった)