量子測定

量子物理学班 (文責:法橋 顕広)

2021 年 5 月 2 日

0　はじめに

この文書では, 量子測定理論の初歩的な部分, 特に一般化測定や間接測定モデルについてその考え方を中心に紹介します. 1 章では数式を使わず, 量子測定理論の意義について考えます. 2 章以降では, 量子論に触れたことのある読者を想定して, より具体的な内容を述べます. 前提知識としては, Hilbert 空間を用いた量子論の記述, 混合状態, 合成系, ブラケット記法 (+ ちょっとした数学的定義) が分かる程度で十分です. これらの事項は末尾の付録にまとまっているので, 参照しながら読むこともできます.

1　"測定" とは何か

量子測定を考える前に, そもそも測定とは何か, なぜ量子論において測定が重要かを検討します.

1.1　日常/古典論における測定

日常生活において, 測定という行為は身近なものだと思います. 身長を測る, 体重を量る, 速さを測る, などなど (漢字は違えど) これらは "測定" と呼ばれるものたちです. これらの性質を抽出して測定とは何かを考えてみると, 基準となる器具や装置に照らし合わせて, その目盛りを読み取る行為といえます. また, 我々は測定に関わらず "真の値"が実在することを暗に了解して, 理想的には系に影響を与えず測定値が真の値と一致することを期待します. 以上のことを標語的に言うと, 「**測定とは真の値を知ることだ**」となると思います. 実際, 我々は自分の (真の) 体重が知りたいから体重計に乗るのであり, 車の (真の) 速さが知りたいからスピードガンを使うのです.

このような精神は高校物理で初めに習うであろう Newton 力学にも引き継がれています. 位置や速度, エネルギーといった物理量は時間の関数として実在し, 我々は必要ならばいつでもそれらの値を知ることができるとされています. この枠組みを **(素朴) 実在論**と呼び, 広義には古典論とも呼びます [1].

1.2　量子論における測定

一方で, 量子論においてはこのような素朴な考えは成立しないことが明らかになっています[*1]. すなわち, 物理量の値は確率的にしか定まらず, "真の値" という概念は意味をなしません. さらに, 量子論においては測定

[*1] 解説 "局所実在論の破れ" に詳しく書いてあります.

をすると状態が変わってしまうことも知られています[*2]. これにより, 測定は “知ること”ではなくなり, 単に (測定器との相互作用のもと) 何らかの値を得ることであるとしか言えません. このような事情から, 量子論では測定という物理的過程がどのように記述されるかが (それが自明であった古典論とは異なり) 重要になってきます[*3].

では, 測定の記述とは具体的に何をすればよいのでしょうか. まず, 測定値が得られるルールを指定する必要があります. 測定値は確率的に定まるので, これはすなわち任意の状態に対して**測定値の確率分布** (出力分布) を定めるべしと言い換えられます. また, 測定後も状態に興味があるとき, 例えば連続して測定を行うときのために, **測定直後の (条件付き[*4]) 状態**も記述する必要があります. 広く知られた**射影測定**のモデルでは, 前者は **Born の確率規則**, 後者は**射影仮説**によって実現されます.

これらの要請を適切に利用すれば, 測定過程を正しく記述できます. ですが, “適切に”と書いたように, 射影仮説の使い方には注意が必要です. 実際, 被測定系に直接射影仮説を適用できない/適用すると誤った結果を与えるような測定があります[*5]. これを解決するのが, 量子測定理論です. 量子測定理論は正しく射影仮説を適用する処方箋を与えます (**間接測定**). また, 他のアプローチとして物理的に自然な要請から測定を特徴づける (**一般化測定**) というものがあり, こちらも成功を収めています. 以下では, これら 2 つの基本的な考えを解説していきます.

2　量子測定の記述

1 章で述べた量子測定を, 数式も交えつつより詳しく紹介します[*6]. 定義, 意味を省略することの多い記号をまとめておきます.

表 1　記号の一覧

記号	定義	物理的意味
$\mathcal{H}$	Hilbert 空間	状態空間
$\mathcal{L}(V)$	線形空間 V 上の線形写像[*7]の空間	
$\mathcal{S}(\mathcal{H})$	$\mathcal{H}$ 上の密度演算子[*8]の空間	(混合) 状態の集合
ρ など	$\mathcal{H}$ 上の密度演算子	(混合) 状態
$\lvert\psi\rangle$ など	$\mathcal{H}$ の元	純粋状態

2.1　射影測定

よく知られている射影測定について復習しておきます.

[*2] 詳しい人への注:古典混合状態でも測定により状態が変わります. ここでは, 測定していない物理量まで影響を受けるという意味で状態が変化すると言っています.
[*3] もちろん状態や物理量がどう定義/記述されるかも重要かつ不可分な事柄ですが, ここでは割愛します.
[*4] ある測定値が得られた場合の, という意味です.
[*5] 3 章を参照してください.
[*6] 以下では, (数学的に煩雑になるのを防ぐため) 断らない限り有限次元の状態空間を持つ量子力学を扱い, ありうる測定値が有限個の測定を考えます.
[*8] 例えば V として $\mathbb{C}^n$ をとると, $\mathcal{L}(V)$ の元は複素数を成分にもつ $n \times n$ の行列とみなせます.
[*8] 付録 B を参照してください.

Born の確率規則

(原理的に) 任意の状態で任意の物理量一つを正確に測定可能である.
状態 ρ において物理量 A を正確に測定する[*9]と, 測定値 $\mathbf{x}$ が a である確率 $\Pr\{\mathbf{x}=a\|\rho\}$ は

$$\Pr\{\mathbf{x}=a\|\rho\}=\mathrm{Tr}(E^A(a)\rho) \tag{1}$$

で与えられる. ここで, $E^A(a)$ は $\{|\phi\rangle\in\mathcal{H}\mid A|\phi\rangle=a|\phi\rangle\}$ なる部分空間への射影である. すなわち, a が A の固有値のときのみ $E^A(a)$ は 0 写像でなくなり, a の固有空間への射影となる.

射影仮説

物理量の正確な測定に対し, 以下を満たすという意味で理想的な測定が存在する:
状態 ρ において物理量 A を測定し, 測定値が $\mathbf{x}=a$ であったとき, 測定直後の状態 $\rho_{\{\mathbf{x}=a\}}$ は

$$\rho_{\{\mathbf{x}=a\}}=\frac{E^A(a)\rho E^A(a)}{\Pr\{\mathbf{x}=a\|\rho\}} \tag{2}$$

で与えられる. このような測定を射影測定あるいは理想測定と呼ぶ.

ここで, 射影測定が理想測定と呼ばれる物理的, 操作的理由について述べておきます. 射影仮説は “同じ測定を連続して行ったら結果は同じ” という仮定[*10]と等価であることが知られており [2, 5], この仮定を理想的と表現していると言えます. この仮定は妥当に思えますが, 例えば吸収型[*11]の光子数測定など反復不可能な測定も存在します.

2.2 間接測定

上述のような理想的でない測定も扱うために, より一般的な測定のモデルを考えます. 具体的には, 合成系を用いて測定器と着目系 (測定したい対象) をまとめて量子論で記述します. これにより, 1 章で述べたような測定器との相互作用を素直に表現できます. 物理的に実現するには, 以下のようにします.

1. 始状態 ρ の着目系に対し, それと無相関なプローブ系 (測定器の部分系) を適当な状態 $\sigma(\in\mathcal{S}(\mathcal{K}))$ で用意する. ($\mathcal{K}$:プローブ系に付随する Hilbert 空間)
2. 合成系の状態 $\rho\otimes$[*12]σ を (ユニタリ演算子 U で) 時間発展させる.
3. **プローブ系を** (その系での物理量 M で) 射影測定する.

2 番で着目系の情報を測定器に写し取り, 3 番でそれを測定器から読み取るというイメージです. このような測定のモデルを**間接測定** (モデル) と呼びます. 量子論の要請を用いて, これを数式で表現すると以下のようになります.

[*9] これを単に物理量 A の測定といいます.
[*10] 反復可能性仮説といいます.
[*11] 光子が測定されるとき, 測定器に吸収されるということです. 後で詳しく説明します.
[*12] テンソル積の記号です. 付録 A を参照してください.

間接測定モデル

上記の間接測定において, 測定値 $\mathbf{x}$ が m である確率 $\Pr\{\mathbf{x}=m\|\rho\otimes\sigma\}$ は

$$\Pr\{\mathbf{x}=m\|\rho\otimes\sigma\}=\mathrm{Tr}([I\otimes E^M(m)]U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger) \tag{3}$$

で与えられる. また, 測定後の全系の状態 ρ_c は

$$\rho_c=\frac{[I\otimes E^M(m)]U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger[I\otimes E^M(m)]}{\mathrm{Tr}([I\otimes E^M(m)]U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger)} \tag{4}$$

となる.

(4) 式でプローブ系をトレースアウト[*13] すれば, 測定後の着目系の状態 $\rho_{\{\mathbf{x}=m\}}$ は

$$\rho_{\{\mathbf{x}=m\}}=\frac{\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}([I\otimes E^M(m)]U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger)}{\mathrm{Tr}([I\otimes E^M(m)]U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger)} \tag{5}$$

だと分かります.

このように定式化することで, 理想的でない測定器も扱うことができます. 実際の測定に適用するには, 理想的な測定器とみなせる境目[*14]をとり, 非理想的な部分を上記のように量子系として扱うことになります.

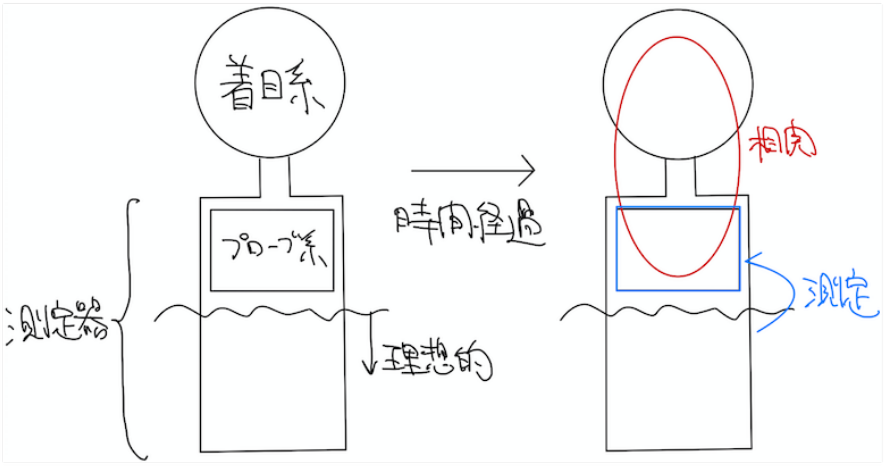


図 1　間接測定の概念図

2.3　一般化測定

前節とは別に, 物理的に自然な要請から測定を特徴づけます. 測定とは出力分布と条件付き状態を定めるものだということは 1 章で既に述べました. 他に自然な要請はあるでしょうか? 一つに, **状態の確率混合との整合性**が挙げられます. これは, “確率混合された状態”における出力分布は, 各々の状態における出力分布の確率混合と一致するべし[*15] という要請です. この要請から, 以下のことが言えます [2, 4].

[*13] 付録 B を参照してください.
[*14] これを Heisenberg cut といいます [3].
[*15] これは (混合状態の定義から) 射影測定では自明です. また, 数学の言葉ではこの要請を “出力分布は状態に関して affine であるべし”と簡潔に表現できます.

測定の POVM

任意の測定に対し, 以下を満たすような $\{\Pi(x)\}_{x\in S}(\subset \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ が一意に存在する. ただし, $S(\subset \mathbb{R})$ は測定値 $\mathbf{x}$ のとりうる値の集合である.

$$\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\}=\mathrm{Tr}(\Pi(x)\rho) \tag{6}$$

ここで, 以下の概念を導入します.

POVM

$S(\subset \mathbb{R})$ を有限集合とする. 以下を満たすような $\{\Pi(x)\}_{x\in S}(\subset \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ を (有限な)**POVM** という:

i **正値性**: 任意の状態 $|\psi\rangle$ に対し, $\langle\psi|\,\Pi(x)\,|\psi\rangle\geq 0$ (これを $\Pi(x)\geq 0$ とも書く)

ii **単位性**: $\sum_{x\in S}\Pi(x)=\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ ($\mathcal{H}$ 上の恒等演算子).

ところで, 確率分布の性質から, (6) 式右辺の $\{\Pi(x)\}$ は POVM であることが分かります[*16]. よって, 上の性質は “任意の測定に対し出力分布に対応する POVM が一意に定まる”と言い換えられます. これを単に測定の POVM と呼びます. (1) 式と (6) 式を比較すると, 物理量 A の正確な測定とはその POVM が $\{E^A(a)\}_{a\in\sigma(A)}$[*17]に一致することと言えます.

測定後状態も考えるには追加の要請が必要になります. まず, 先程の要請における “出力分布”を “結合出力分布”として, 拡張します. ここで, 結合出力分布とは, 測定を連続して行い得られる 2 つの測定値の結合確率分布[*18]です. 結合出力分布を周辺化[*19]すれば出力分布が得られるので, これは確かに元の要請を含んでいます. この要請から, 以下のことが言えます [2, 4].

測定のインストルメント

$S(\subset \mathbb{R})$ に測定値をとる任意の測定に対し, 写像の族 $\{\mathcal{I}(x)\}_{x\in S}$ を

$$\mathcal{I}(x):\mathcal{S}(\mathcal{H})\to\mathcal{L}(\mathcal{H});\ \rho\mapsto\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\}\rho_{\{\mathbf{x}=x\}} \tag{7}$$

と定めると, これは affine 写像[*20]である.

$\mathcal{I}(x)(\rho)=\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\}\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}$ の両辺のトレースをとれば, $\mathrm{Tr}\left(\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}\right)=1$ であることから

$$\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\}=\mathrm{Tr}(\mathcal{I}(x)(\rho)) \tag{8}$$

$$\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}=\frac{\mathcal{I}(x)(\rho)}{\mathrm{Tr}(\mathcal{I}(x)(\rho))} \tag{9}$$

が分かります. ここで, 以下の概念を導入します.

[*16] $\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$ のとき, $\mathrm{Tr}(\Pi(x)\rho)=\langle\psi|\,\Pi(x)\,|\psi\rangle$ であることに注意すれば容易です.
[*17] $\sigma(A)$ を A の固有値の集合としています.
[*18] 同時確率分布ともいいます.
[*19] 一方の測定値に関する和を取り, もう一方のみの分布にする操作のことです.
[*20] $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の線形写像に一意に拡張できるので, 線形写像と読み替えても良いです.

インストルメント

$S(\subset \mathbb{R})$ を有限集合とする．以下を満たすような $\{\mathcal{I}(x)\}_{x\in S}(\subset \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{H})))$ を (有限な) **インストルメント**という:

i **正値性**: $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ に対し, $A \geq 0$ ならば $\mathcal{I}(x)(A) \geq 0$ (これを $\mathcal{I}(x) \geq 0$ とも書く)

ii **TP**[*21]**性**: $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ に対し, $\mathrm{Tr}(\sum_{x\in S} \mathcal{I}(x)(A)) = \mathrm{Tr}(A)$.

ところで, 確率分布と密度演算子の性質から, (7) の $\{\mathcal{I}(x)\}$ はインストルメントであることが分かります. よって, 上の性質は “任意の測定に対し (7) を満たすインストルメントが一意に定まる”と言い換えられます. また, (8), (9) 式から, インストルメントは測定を特徴づけるのに必要十分になっています. (2) 式を見ると, 射影測定とはインストルメントが $\mathcal{I}(a)(\rho) := E^A(a)\rho E^A(a)$ であるような測定と言い換えられます.

さらに, **自明な拡張の可能性**も要請します. これは, 着目系をそれより大きな系の部分系と見て, 測定もそれに伴って大きな系の上での (部分的な) 操作とみなしても, それは実質的には元の測定と変わらないということです. この要請から, 測定に対応するインストルメントの **CP 性**[*22] が示されます [4].

CP 性は数学的によい性質が知られており, 例えば Kraus 表現と呼ばれる性質を用いると, 以下のことが言えます [2, 4].

CP インストルメントの Kraus 表現

任意の測定に対し, 以下を満たすような $\{M_k(x)\}_{x\in S,k}(\subset \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ が一意に存在する. ただし, S は測定値 $\mathbf{x}$ のとりうる値の集合, k は有限種類のラベルである.

$$\mathcal{I}(x)(\rho) = \sum_k M_k(x)\rho M_k(x)^\dagger \tag{10}$$

$$\sum_{k,x} M_k(x)^\dagger M_k(x) = \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \tag{11}$$

逆に, (11) 式を満たす $M_k(x)$ を用いて (10) 式で $\mathcal{I}(x)$ を定義すると, その $\mathcal{I}(x)$ は CP インストルメントになる. $\{M_k(x)\}$ を Kraus 演算子という.

これを (8), (9) 式に適用すると,

$$\Pr\{\mathbf{x} = x \| \rho\} = \mathrm{Tr}(\sum_k M_k(x)\rho M_k(x)^\dagger) = \sum_k \mathrm{Tr}(M_k(x)^\dagger M_k(x)\rho) \tag{12}$$

$$\rho_{\{\mathbf{x}=x\}} = \frac{\sum_k M_k(x)\rho M_k(x)^\dagger}{\sum_k \mathrm{Tr}(M_k(x)^\dagger M_k(x)\rho)} \tag{13}$$

となります. この $\{M_k(x)\}_{x\in S,k}$ を**測定演算子**とも呼び, (11), (12), (13) 式で記述される測定の枠組みを**一般化測定**と言います. この一般化測定 (の簡略化) を量子論の要請に採用している本もあります [7].

2.4 等価性

2.2 節で物理的なモデルを元に, 2.3 節で自然な要請を元にそれぞれ測定の記述を考察しました. これらの関係はどうなっているのでしょうか. すぐに分かる事実に, 以下があります.

[*21] トレース保存 (trace-preserving) の略です.

[*22] 完全正値 (completely positive) の略で, 任意の自然数 n に対し, $\mathcal{I}(x) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)} \geq 0$ という性質です.

間接測定のインストルメント

2.2 節で記述した間接測定には CP インストルメント

$$\mathcal{I}(m)(\rho) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}([I \otimes E^M(m)]U(\rho \otimes \sigma)U^\dagger) \tag{14}$$

が対応する. $\mathcal{H}$ の正規直交基底を $\{|e_j\rangle\}$, $\sigma = \sum_k p_k |k\rangle\langle k|$ とすると, 測定演算子は

$$M_{j,k}(m)|\psi\rangle = \sqrt{p_k}(I \otimes \langle e_j|)[I \otimes E^M(m)]U(|\psi\rangle \otimes |k\rangle) \tag{15}$$

で与えられる.

逆に, 以下の事実も知られています.

CP インストルメントの Stinespring 表現

任意の CP インストルメントに対して, (14) 式を満たすような間接測定のモデル, すなわち組 $(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ が存在する. さらに, σ は純粋状態にとれる.

以上のことから, 間接測定のモデルと CP インストルメント (もしくは一般化測定) は等価であることが分かります. つまり, 測定過程を記述するのにどちらを用いてもよいです.

ここまでの議論は射影仮説を仮定して進めてきました. 具体的には, 間接測定モデルの (4) 式で射影仮説を用いています. 実は射影仮説なしで同じ結論を得られます [4]. 間接測定のモデルにおいて, プローブ系に対し (4) 式が成り立つとは限らない (理想的でない) 測定をしたとしても, その測定が局所的[*23] なら (5) 式が成り立つことが知られています. 射影仮説を仮定しない本として, [2] があげられます.

3 実際の物理系への適用

光子数が 0 か 1 であるような 2 準位系での光子数測定を例に, 一般的な測定の例を説明します [6]. 状態は $|0\rangle, |1\rangle$ 及びその重ね合わせで表せます. ただし, $|i\rangle$ は光子数が i である状態です. 間接測定モデルで物理的意味を見てから, 測定演算子や POVM を計算するという形をとります.

3.1 射影測定

まず射影測定を復習します. 着目系の初期状態を $c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ とします. 光子数に対応する物理量 A と固有値 a, $E^A(a)$ は,

$$A = |1\rangle\langle 1|, \ a = 0, 1 \tag{16}$$

$$E^A(0) = |0\rangle\langle 0|, \ E^A(1) = |1\rangle\langle 1| \tag{17}$$

となります. (17) 式の形から, この測定を $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ での射影測定とも言います. 測定による状態ベクトルの変化は,

$$c_0|0\rangle + c_1|1\rangle \to \begin{cases} |0\rangle & (\text{測定結果が } 0 \text{ (確率 } |c_0|^2)) \\ |1\rangle & (\text{測定結果が } 1 \text{ (確率 } |c_1|^2)) \end{cases} \tag{18}$$

となります.

[*23] プローブ系で測定した後, 結果を知らなければ着目系での測定に影響を与えないという性質で, 物理的には自然 (どころか, 相対論と両立するために必要) な条件です.

3.2 正確だが理想的でない測定

着目系の初期状態は前節と同じであるとし, プローブ系の初期状態を $|0\rangle$ とします. 合成系の時間発展として, 以下のものを考えます.

$$|0\rangle|0\rangle \to |0\rangle|0\rangle \tag{19}$$
$$|1\rangle|0\rangle \to |0\rangle|1\rangle \tag{20}$$

ただし, 1つ目のケットが着目系の状態とします. そして, プローブ系を $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ で射影測定します. この時間発展は, 物理的には吸収型の測定に対応します. すなわち, 着目系の光子はプローブ系に吸収され, 始状態が何であっても着目系の終状態は $|0\rangle$ になるような過程です. 以上の過程における状態ベクトルの変化は,

$$(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle)|0\rangle \to c_0|0\rangle|0\rangle + c_1|0\rangle|1\rangle = |0\rangle(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) \to \begin{cases} |0\rangle|0\rangle & (\text{測定結果が } 0 \text{ (確率 } |c_0|^2)) \\ |0\rangle|1\rangle & (\text{測定結果が } 1 \text{ (確率 } |c_1|^2)) \end{cases} \tag{21}$$

となります. 測定結果の確率分布は着目系に Born の規則を適用した場合に等しく, したがってこの測定は正確です. もちろん, POVM は射影子:

$$E_0 = |0\rangle\langle 0|, \ E_1 = |1\rangle\langle 1| \tag{22}$$

です[*24]. 一方で, 測定後の状態は射影仮説を満たしていません. よって, この測定は理想的ではありません. 測定演算子は,

$$M_0 = |0\rangle\langle 0|, \ M_1 = |0\rangle\langle 1| \tag{23}$$

となります.

3.3 誤差のある測定

初期状態は前節と同じであるとし, 時間発展を

$$|0\rangle|0\rangle \to |0\rangle(\sqrt{1-\epsilon}|0\rangle + \sqrt{\epsilon}|1\rangle) \tag{24}$$
$$|1\rangle|0\rangle \to |1\rangle(\sqrt{\epsilon}|0\rangle + \sqrt{1-\epsilon}|1\rangle) \tag{25}$$

とします. ここで, ϵ は 0 以上 1 以下の実数です. そして, 同様にプローブ系を射影測定します. 測定前の状態は

$$(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle)|0\rangle \to c_0|0\rangle(\sqrt{1-\epsilon}|0\rangle + \sqrt{\epsilon}|1\rangle) + c_1|1\rangle(\sqrt{\epsilon}|0\rangle + \sqrt{1-\epsilon}|1\rangle) \tag{26}$$
$$= (c_0\sqrt{1-\epsilon}|0\rangle + c_1\sqrt{\epsilon}|1\rangle)|0\rangle + (c_0\sqrt{\epsilon}|0\rangle + c_1\sqrt{1-\epsilon}|1\rangle)|1\rangle \tag{27}$$

となるので, 測定演算子は

$$M_0 = \sqrt{1-\epsilon}|0\rangle\langle 0| + \sqrt{\epsilon}|1\rangle\langle 1|, \ M_1 = \sqrt{\epsilon}|0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-\epsilon}|1\rangle\langle 1| \tag{28}$$

で, POVM は

$$E_0 = (1-\epsilon)|0\rangle\langle 0| + \epsilon|1\rangle\langle 1|, \ E_1 = \epsilon|0\rangle\langle 0| + (1-\epsilon)|1\rangle\langle 1| \tag{29}$$

[*24] 添字で測定値を表しています. 以下同様です.

であると分かります. $\epsilon = 0$ でこの測定が射影測定に一致することを考えると, この測定は物理的には ϵ で特徴づけられた誤差[*25]のある測定だと解釈できます.

この他にも, 例えば時間発展を前節との組み合わせ:

$$|0\rangle |0\rangle \to |0\rangle (\sqrt{1-\epsilon}\,|0\rangle + \sqrt{\epsilon}\,|1\rangle) \tag{30}$$
$$|1\rangle |0\rangle \to |0\rangle (\sqrt{\epsilon}\,|0\rangle + \sqrt{1-\epsilon}\,|1\rangle) \tag{31}$$

とすれば, 吸収型かつ誤差のある測定も記述できます.

付録 A　量子論の要請 (純粋状態 ver.)

量子論の基本的な要請[*26] [*27]を復習します.

要請 1:状態

任意の量子系には状態空間と呼ばれるある (可分)Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が対応し, 状態は単位ベクトルで表される. 逆に, 任意の単位ベクトルにある状態が対応する. ただし, 定数倍の差は同一視する.

要請 2:物理量

物理量と状態空間上の自己共役演算子[*28]は 1 対 1 に対応する.

要請 3:Born の確率規則

(原理的に) 任意の状態で任意の物理量一つを正確に測定可能である.
状態 $|\psi\rangle$ において物理量 A を正確に測定すると, 測定値 $\mathbf{x}$ が a である確率 $\Pr\{\mathbf{x} = a \| |\psi\rangle\}$ は

$$\Pr\{\mathbf{x} = a \| |\psi\rangle\} = \langle\psi| E^A(a) |\psi\rangle = \mathrm{Tr}(E^A(a) |\psi\rangle \langle\psi|) \tag{32}$$

で与えられる. ここで, $E^A(a)$ は $\{|\phi\rangle \in \mathcal{H} \mid A|\phi\rangle = a|\phi\rangle\}$ なる部分空間への射影である. すなわち, a が A の固有値のときのみ $E^A(a)$ は 0 写像でなくなり, a の固有空間への射影となる.

要請 4:時間発展

孤立系の状態の時間発展は, あるユニタリ演算子 $U(t)$ を用いて

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle \tag{33}$$

と書ける. 逆に, 任意のユニタリ演算子は時間発展を表す.

[*25] 正確な定義は解説 “不確定性原理” を参照してください. 今回の場合, 例えば初期状態 $|0\rangle$ から出力 1 となる確率が ϵ となります.
[*26] 測定理論, 情報理論に都合のいい書き方になっています. 一般的に成り立つかは怪しい部分 (例えば, “任意の単位ベクトルに状態が対応する” など) もあります [1].
[*27] 本文でも述べたように射影仮説は要請ではないという考え方もありますが, ここでは要請として紹介しておきます.

要請 5:合成系

状態空間がそれぞれ $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ であるような 2 つの系 $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2$ の合成系 S_{12} は, $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$[*29]を状態空間にもつ.
また, S_1 の物理量 A は S_{12} の物理量 $A \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_2}$ と, S_2 の物理量 B は S_{12} の物理量 $\mathbf{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes B$ と, それぞれ同一視される.

要請 6:射影仮説

物理量の正確な測定に対し, 以下を満たすという意味で理想的な測定が存在する:
状態 $|\psi\rangle$ において物理量 A を測定し, 測定値が $\mathbf{x} = a$ であったとき, 測定直後の状態 $|\psi\rangle_{\{\mathbf{x}=a\}}$ は

$$|\psi\rangle_{\{\mathbf{x}=a\}} = \frac{E^A(a)\,|\psi\rangle}{\Pr\{\mathbf{x} = a \| |\psi\rangle\}} \tag{34}$$

で与えられる. このような測定を射影測定あるいは理想測定と呼ぶ.

要請 1 において, 状態のベクトルによる記述には定数倍の不定性があることが述べられています. この不定性は,

$$\mathcal{H} \to \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ |\psi\rangle \mapsto |\psi\rangle\langle\psi| \tag{35}$$

と埋め込むことで解消されます.

付録 B　混合状態, 密度演算子ショートコース

B.1　混合状態の記述

混合状態とは, ある複数の状態が存在して, 任意の物理量の出力分布がそれらの状態の出力分布の一定確率による混合に一致するような状態のことです.

光子の偏光の 2 準位系で簡単に説明します. $|H\rangle, |V\rangle$ を直交する直線偏光状態とします. $|H\rangle$ が水平方向, $|V\rangle$ が鉛直方向の偏光と思えばよいです. このとき, 確率 $1/2$ で $|H\rangle$, 確率 $1/2$ で $|V\rangle$ であるような “状態” を考えることができます. 操作的には, 確率 $1/2$ ずつで $|H\rangle, |V\rangle$ を作るような装置を考えればよいです. どちらかの状態であることはわかっているが, それがどちらなのかを知らないというイメージです[*30]. この状態における物理量の出力分布は, 条件付き確率を思い出せば, $|H\rangle, |V\rangle$ の出力分布を平均したものになります. 一方で, 量子重ね合わせ $|+\rangle := \frac{|H\rangle+|V\rangle}{\sqrt{2}}$ を考えることもできます. これは斜め 45° の直線偏光に対応します. $|H\rangle, |V\rangle$ で測定すると確率がそれぞれ $1/2$ となり一見先程の例と同じように見えますが, 異なる状態です. このことは, 斜め 45° の偏光板に通してみると分かります. 前者の混合状態では通過する確率は $1/2$ ですが, 後者の重ね合わせ状態では確率 1 で通過します.

その定義から, 混合状態は (有限な) 確率分布と状態の組:$\{p_i, |\psi_i\rangle\}_i$ で記述できます. ですが, この記述には不定性があります. すなわち, 同じ状態に対し複数の記述方法があり, あまりよい表現とは言えません[*31]. こ

[*29] (有限次元では) エルミート演算子と同義です.
[*29] $\otimes$ はテンソル積を表します. テンソル積に不慣れならば, 状態/演算子の組によい性質が備わっていると思えばよいです.
[*30] この説明からも分かるように, 混合状態は量子論特有の概念ではないです.
[*31] 混合状態を “純粋状態の確率混合” と定義していないのはこの事実によります. 同じ混合状態を作る純粋状態の組は複数 (実は無数に) あるのです. これは, 古典論と大きく異なる点です.

れを解消するため, 別の表記を考えます. (32) 式と混合状態の定義から,

$$\Pr\{\mathbf{x}=a\|\{p_i,|\psi_i\rangle\}_i\}=\sum_i p_i\Pr\{\mathbf{x}=a\||\psi_i\rangle\}=\mathrm{Tr}(E^A(a)\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) \tag{36}$$

が成り立ちます. この最右辺に現れた $\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\,(\in\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ を改めて混合状態の記述方法として定めます. これは (35) を含んでおり, なおかつ状態と 1 対 1 に対応します. このように書ける $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の元を密度演算子と呼び, その集合を $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ と表記します. 実は以下のことが知られています.

$\mathcal{S}(\mathcal{H})$ の特徴づけ

$\rho\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ に対し,

$$\rho\in\mathcal{S}(\mathcal{H})\iff\begin{cases}\rho\geq 0\ (\because\ \forall|\psi\rangle\in\mathcal{H},\ \langle\psi|\rho|\psi\rangle\geq 0)\\ \mathrm{Tr}(\rho)=1\end{cases} \tag{37}$$

すなわち, 密度演算子とは正値であってトレースが 1 の演算子です. これを用いると, $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ が $\mathcal{L}(\mathcal{H})$(を実線形空間とみなしたもの) の凸部分集合であることが簡単に分かります.

B.2 affine 写像

状態空間が凸であることに関連して, affine 写像について述べておきます.

affine 写像

V,W を実線形空間, $S(\subset V),T(\subset W)$ を凸部分集合とする. $f:S\to T$ が以下を満たすとき, **affine 写像**という[*32]:

$$\forall t\in[0,1],\ x,y\in V,\ f(tx+(1-t)y)=tf(x)+(1-t)f(y). \tag{38}$$

例えば, 本文では $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ から $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ への affine 写像がでてきます. 実は, 次のことが知られています.

線形拡大

V を実線形空間とする. affine 写像 $f:\mathcal{S}(\mathcal{H})\to V$ に対して, 以下を満たす線形写像 $\tilde{f}:\mathcal{L}(\mathcal{H})\to V$ が一意に存在する:

$$\forall x\in\mathcal{S}(\mathcal{H}),\ f(x)=\tilde{f}(x). \tag{39}$$

この写像を f の線形拡大という.

逆に, 線形写像の定義域を制限すれば affine 写像が作れるので, しばしば $\tilde{f}$ と f を同一視します.

B.3 部分系の状態

密度演算子を用いると, 部分系の状態も記述できます. 2 つの系 $\mathrm{S}_1,\mathrm{S}_2$ の合成系 S_{12} のとある状態を $\rho_{12}(\in\mathcal{S}(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2))$ とします. このとき, 部分系 S_1 の状態 $\rho_1(\in\mathcal{S}(\mathcal{H}_1))$ は, $\rho_1=\mathrm{Tr}_2(\rho_{12})$ となります. ここで, Tr_2 は系 S_2 に関する部分トレースで, $\{|i\rangle\}$ を $\mathcal{H}_2$ の基底とすると, $\mathrm{Tr}_2(\rho_{12})=\sum_i(\mathbf{1}_{\mathcal{H}_1}\otimes\langle i|)\rho_{12}(\mathbf{1}_{\mathcal{H}_1}\otimes|i\rangle)$ と表されます. この操作をすることを, "系 S_2 をトレースアウトする"ともいいます.

[*32] affine 写像という言葉で違うものを指す場合もあるので, 注意してください.

付録 C　量子論の要請 (混合状態 ver.)

密度演算子を用いて, 量子論の要請を混合状態にも適用できるよう書き換えます.

要請 1':状態

任意の量子系には状態空間と呼ばれるある (可分)Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が対応し, 状態は $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ の元と 1 対 1 に対応する.

要請 3':Born の確率規則

(原理的に) 任意の状態で任意の物理量一つを正確に測定可能である.
状態 ρ において物理量 A を正確に測定すると, 測定値 $\mathbf{x}$ が a である確率 $\Pr\{\mathbf{x}=a\|\rho\}$ は

$$\Pr\{\mathbf{x}=a\|\rho\}=\mathrm{Tr}(E^A(a)\rho) \tag{40}$$

で与えられる.

要請 4':時間発展

孤立系の状態の時間発展は, あるユニタリ演算子 $U(t)$ を用いて

$$\rho(t)=U(t)\rho(0)U(t)^\dagger \tag{41}$$

と書ける. 逆に, 任意のユニタリ演算子は時間発展を表す.

要請 6':射影仮説

物理量の (正確な) 測定に対し, 以下を満たすという意味で理想的な測定が存在する:
状態 ρ において物理量 A を測定し, 測定値が $\mathbf{x}=a$ であったとき, 測定直後の状態 $\rho_{\{\mathbf{x}=a\}}$ は

$$\rho_{\{\mathbf{x}=a\}}=\frac{E^A(a)\rho E^A(a)}{\Pr\{\mathbf{x}=a\|\rho\}} \tag{42}$$

で与えられる. このような測定を射影測定あるいは理想測定と呼ぶ.

これらが純粋状態の場合の拡張であることは簡単に確かめられます.

参考文献

[1] 清水明, 『新版　量子論の基礎　その本質のやさしい理解のために』(サイエンス社, 2004)
[2] 石坂智・小川朋宏・河内亮周・木村元・林正人, 『量子情報科学入門』(共立出版, 2012)
[3] 清水明, *Modern Theory of Quantum Measurement and its Applications* (2009)
https://as2.c.u-tokyo.ac.jp/archive/handai2009.pdf
[4] 小澤正直, 量子測定理論入門, 第 56 回 物性若手夏の学校 (2011 年度).
[5] 岡村和弥, 量子測定理論の数理, 数理解析研究所講究録 ,2059: 103-112 (2017).
[6] 沙川貴大・上田正仁, 『量子測定と量子制御』(サイエンス社、2016)
[7] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information 10th Anniversary Edition* (Cambridge University Press, 2010)