

不確定性関係

量子物理学班 (文責：坪内健人)

2021 年 5 月 11 日

この PDF は、東京大学理学部物理学科の学生有志による企画 [Physics Lab. 2021](#) の、量子物理学班の展示物として作成されました。

1 はじめに

不確定性関係と言われて皆さんが思い浮かべる式は何でしょうか。ある程度量子力学を学んだことがある人は、最初に

$$\sigma(\hat{x})\sigma(\hat{p}) \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1)$$

(Kennard の不等式 [2]) やこれを一般化させた

$$\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B}) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right| \quad (2)$$

(Kennard-Robertson の不等式 [3]) を思い浮かべるかと思います (ただし、 $\sigma(\hat{A}) := \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}$ は物理量 $\hat{A}$ のゆらぎ (標準偏差))。しかし、一口に不確定性関係といっても、例えば Heisenberg の当初考えた思考実験やエントロピーを用いた定式化など、実に様々な種類の関係式があります。そのため、不確定性関係が一般に何を指すのかは人により異なりますが、ここでは二つの (非可換) 物理量の「ばらつき」に関する性質について、何かしらの制約を表す関係式であるとしておきましょう。この『ばらつき』に関する性質」というのは、例えば分散 $\sigma(\hat{A})^2$ だったり、測定誤差や擾乱だったり^{*1}、射影測定の結果の確率分布のエントロピーだったり、場合によって様々です。

この記事では、特に測定についての関係式に着目し、量子力学をある程度学んだことがある方を対象にして不確定性関係について解説します^{*2}。ここでは具体的な導出は紹介せず、各不確定性関係の意味や解釈に重点をおいて解説します。この記事を読むにあたり、基本的な量子力学の知識以外に間接測定について少しだけ知っていることが望ましいです。間接測定について詳しくない方は、量子物理学班の記事「[量子測定をじっくり学ぶ](#)」やその解説 PDF の解説も合わせてお読みください。

2 測定における「ばらつき」

ある量子系の量子状態 $|\psi\rangle$ に対して物理量 $\hat{A}$ についての誤差のない理想的な測定 (射影測定) をしたとき、一般にその測定結果はばらつきを持ちます。このときの測定結果の標準偏差は

$$\sigma(\hat{A}) := \sqrt{\langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle^2} \quad (3)$$

と表され、これをゆらぎと呼びます。このばらつきは測定自体に誤差がなかったとしても生じるため、測定とは独立した、量子状態そのものに内在する性質であると言えます。

しかし、一般に測定は理想的であるとは限らず、測定自体に誤差が含まれる場合があります。このとき、測定は間接測定モデルによって記述されます。被測定系の物理量 $\hat{A}$ を間接測定するとき、プローブ系の物理量 $\hat{A}'$ に $\hat{A}$ の情報

^{*1} これらの詳しい定義は後述する。

^{*2} 簡単のため、純粋状態のみを扱う。しかし、ここで扱う不確定性関係は、混合状態においても成立する (純粋状態や混合状態が何かかわからない方はこの注釈を無視してもかまわない)。

を(ユニタリ相互作用により) 相関させ、 $\hat{A}'$ を射影測定することによって $\hat{A}$ の情報を推定します。このとき、 $\hat{A}'$ は $\hat{A}$ の情報を完全に写しとっているとは限らないので、一般に測定結果は $\hat{A}$ を射影測定したものとは異なり、誤差が生じます。また、測定結果のばらつきも、元々の $\hat{A}$ のゆらぎに対して増大します^{*3}。このような誤差のある測定における測定結果のばらつき(測定結果の標準偏差)の増大のことを測定誤差と言い、 $\varepsilon(\hat{A})$ とよく書かれます^{*4}。

また、ある量子系を物理量 $\hat{A}$ について測定すると、一般にそれに非可換な物理量 $\hat{B}$ のゆらぎが増大します。例えば、 z 軸方向のスピン固有状態について、 x 軸方向のスピン大きさを測定する射影測定を行うと、測定後の状態は x 軸方向のスピン固有状態になるため、測定の前で z 軸方向のスピンゆらぎが増大します。つまり、ある物理量についての測定は、その非可換物理量のばらつきを増大させます。この測定に伴うばらつき(ゆらぎ)の増大のことを擾乱や反作用^{*5}と呼び、 $\eta(\hat{A})$ とよく書かれます^{*6}。

このように、測定における「ばらつき」に関係がある性質として、主にゆらぎ $\sigma(\hat{A})$ 、測定誤差 $\varepsilon(\hat{A})$ 、擾乱 $\eta(\hat{A})$ の3つがあります。以下では、これら3つの性質についての制限を設ける不確定性関係として、主に

- Heisenberg の思考実験による関係式
- Kennard-Robertson の不等式
- Arthurs-Goodman の不等式
- Heisenberg の不確定性関係
- 小澤の不等式

の5つを紹介します。

3 Heisenberg の思考実験による関係式

量子力学がまだ発展途上であった1927年、ハイゼンベルグは γ 線顕微鏡を用いて微小な粒子の位置を測定する思考実験を行いました。その結果、位置の測定誤差 $\varepsilon(x)$ と運動量の擾乱 $\eta(p)$ には

$$\varepsilon(x)\eta(p) \gtrsim \hbar \quad (4)$$

のトレードオフの関係があることがわかりました[1]。式(4)において x や p にハットをつけていないのは、後述する通りこの式が半古典的に導出されているためです。また、ここでの測定誤差 $\varepsilon(x)$ や擾乱 $\eta(p)$ は前節で述べたものとは(粒子のゆらぎの影響を考えていないという意味で)異なり、 $\varepsilon(x)$ は測定時の分解能に、 $\eta(p)$ は測定後の運動量がとり得る値の範囲の大きさ(つまり測定後の運動量のばらつき)に対応していると認識しても大丈夫です。

ハイゼンベルグの考えた内容は、大雑把にいうと以下ようになります。 γ 線を微小な古典的粒子に向かって入射させ、散乱された光をレンズで集光することにより粒子の位置を測定する状況を考えます。ここで、粒子の位置の測定誤差 $\varepsilon(x)$ (顕微鏡の分解能に対応)を小さくするためには、 γ 線の波動的性質を考えればレンズの半径を大きくすれば良いことがわかります。しかし、レンズの半径を大きくすればするほど、散乱された γ 線がより色々な向きでレンズに入射できるようになります。そのため、散乱後の γ 線光子の運動量がとりうる範囲も増大します。

ここで、光子の散乱の影響による粒子の運動量変化を知るためには、散乱後の光子の運動量を正確に知っていなければなりません。しかし、 $\varepsilon(x)$ の減少、即ちレンズの半径の増大とともに、散乱後の光子の運動量がとりうる範囲が増大してしまうため、散乱後の粒子の運動量のばらつきも合わせて増大します。そのため、位置の測定誤差 $\varepsilon(x)$ の減少により、運動量の擾乱 $\eta(p)$ は増大し、これら二つの量にはトレードオフの関係があることがわかります。ここでの議論をより丁寧に行うことにより、式(4)が導出されます。

式(4)について、いくつか注意すべき点があります。まず、ここでの議論は、 γ 線に対しては波動性と粒子性の

^{*3} 意味のある測定に限る。極端な例では、 $\hat{A}'$ が $\hat{I}$ のとき、測定結果の標準偏差は0になる。このとき、一見ばらつきがゆらぎよりも小さく思えるが、この測定は $\hat{A}$ についての情報を何も引き出せていない。

^{*4} 測定誤差の定義はここに述べたもの以外にもある。例えば、後述する小澤の不等式における測定誤差の定義はここでの説明と必ずしも一致しない。

^{*5} 反作用というのは古典力学で用いられる「反作用」とは明確に意味が異なる。ここで重要なのは、測定により単に状態が変化することではなく、その状態変化によりある物理量にたいしてのばらつきが増大することにある。

^{*6} 擾乱の定義はここに述べたもの以外にもある。例えば、後述する小澤の不等式における擾乱の定義はここでの説明と必ずしも一致しない。

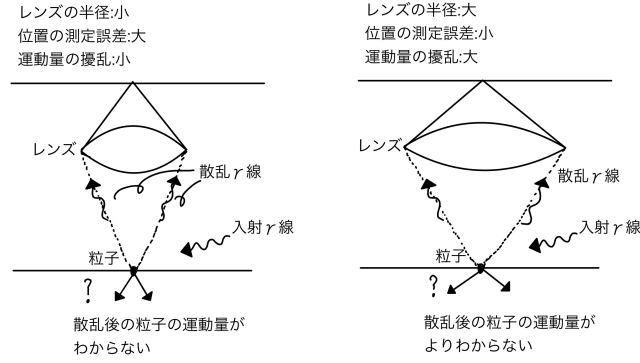


図1 ハイゼンベルグの思考実験の概略

両方を考えていますが、測定対象の粒子に対しては位置と運動量の確定した古典的粒子であることを仮定しており、そのために本質的に半古典論であるという点です。それゆえ、測定誤差 $\varepsilon(x)$ や擾乱 $\eta(p)$ の定義は前節で述べたものとは異なっており、前者は単純に測定時の位置の分解能を、後者は測定後の運動量のばらつきを表しています。また、Kennard の不等式 (1) は歴史的に長らく式 (4) の厳密な定式化だと思われていましたが、その物理的意味は全く異なります。詳しくは後述しますが、式 (1) は $\hat{x}$ と $\hat{p}$ のゆらぎについてのトレードオフ関係を与える式であり、その意味で状態について制限を与える式であると言えます。一方、式 (4) は、 x の測定誤差と p の擾乱についてのトレードオフ関係を与える式であり、状態についての制限ではなく測定についての制限を与える式であると考えられます。

4 Kennard-Robertson の不等式

Kennard-Robertson の不等式 [3] は、二つの (非可換) 物理量 $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$ のゆらぎ $\sigma(\hat{A}) = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}$ 、 $\sigma(\hat{B}) = \sqrt{\langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{B} \rangle^2}$ についての制約を表す式で、

$$\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B}) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle| \quad (5)$$

と表されます。この式は、Cauchy-Schwarz の不等式を用いることにより導出されます。

Kennard-Robertson の不等式の意味は、次の例を考えることによりわかります。まず、 N 個の同じ量子状態を準備し、それを $N/2$ 個と $N/2$ 個の二つのグループに分割します。そして、片方のグループには $\hat{A}$ についての射影測定を、もう片方のグループについては $\hat{B}$ についての射影測定を行います。このとき、 N が十分大きいならば、それぞれのグループの測定結果の標準偏差は、定義よりそれぞれ $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$ のゆらぎ $\sigma(\hat{A})$ 、 $\sigma(\hat{B})$ になります。このときの標準偏差 $\sigma(\hat{A})$ と $\sigma(\hat{B})$ が、式 (5) による制約を受ける、というのが Kennard-Robertson の不等式の意味になります。

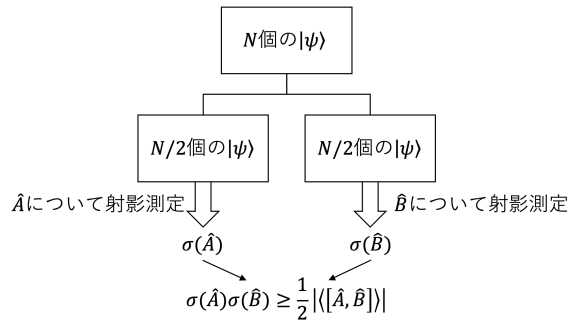


図2 Kennard-Robertson の不等式の意味

この例で本質的なことは、考えている測定が誤差のない理想的なものであることと、 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の測定は立て続けに行われているわけではなく、別々の対象に向かって行われていることです。そのため、Kennard-Robertson の不等式

(5) は、測定についての制約を表しているというよりは、量子状態そのものの制約を表しているのだと言えます。つまり、式 (5) は、測定についての制約を表している式 (4) の一般化であるとはみなせないのです。

Kennard-Robertson の不等式と同様に量子状態そのものの制約を表す不等式として、他にも **Schrödinger** の不等式 [4] や **Deutsch** のエントロピー不確定性関係 [6] があります。

Schrödinger の不等式は

$$\sigma(\hat{A})^2 \sigma(\hat{B})^2 - C_S(\hat{A}, \hat{B}) \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|^2 \quad (6)$$

と表される不等式です。ただし、 $C_S(\hat{A}, \hat{B})$ は $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の相関や共分散と呼ばれる量で、

$$C_S(\hat{A}, \hat{B}) = \frac{1}{2} \langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle \quad (7)$$

と表されます。Schrödinger の不等式 (6) は、Kennard-Robertson の不等式 (5) をより厳しくしたものです。

Deutsch のエントロピー不確定性関係は、その名の通り (射影測定の測定結果の) エントロピーを用いた不確定性関係で、

$$H[\{P_a\}] + H[\{P_b\}] \geq 2 \ln \frac{2}{1 + \sup |\langle a|b \rangle|} \quad (8)$$

と表されます。ここで、 $|a\rangle, |b\rangle$ はそれぞれ物理量 $\hat{A}, \hat{B}$ の固有ケットで、 $\sup$ は $\hat{A}, \hat{B}$ の全固有ケット $\{|a\rangle\}, \{|b\rangle\}$ についてとっています。また、 $P_a = |\langle a|\psi \rangle|^2$ は状態 $|\psi\rangle$ に $\hat{A}$ についての射影測定を行ったときに測定結果が a となる確率を表し、 $H[\{P_a\}]$ はそのエントロピーを表します。Deutsch のエントロピー不確定性関係 (8) は、Kennard-Robertson の不等式 (5) と異なり、その右辺が系の状態 $|\psi\rangle$ に依存しないことが特徴となります。

5 Arthurs-Goodman の不等式

Kennard-Robertson の不等式 (5) は、 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の測定を別々に行ったときのばらつきについての制限を与える式でした。では、 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の測定を同じ対象に対して同時に行ったとき、測定結果のばらつきの大きさはどうなるのでしょうか。この同時測定に対してのばらつきの制限を与えるのが、**Arthurs-Goodman の不等式** [7] です。

まず、 $\hat{A}, \hat{B}$ の同時測定を行う方法を考えてみましょう。物理量 $\hat{A}, \hat{B}$ が非可換なときは同時測定が不可能なように思えますが、間接測定モデルを考えることによってこれが可能になります。以下、被測定系をシステム、システムと相互作用させた後に測定する系をプローブと呼ぶことにします。

まず、システムが状態 $|\psi\rangle$ にあるとし、プローブを初期状態 $|0\rangle$ にしておきます。また、プローブの可換な物理量 $\hat{R}_A, \hat{R}_B$ を適当にとります。ここで、システムとプローブを合わせた全系をユニタリ演算子 $\hat{U}$ について相互作用させ、 $\hat{R}_A$ と $\hat{R}_B$ がそれぞれ $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の情報をもつようにします。最後に、プローブについての可換な物理量 $\hat{R}_A$ と $\hat{R}_B$ を同時に射影測定し^{*7}、その結果から $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の情報を得ます。このプロセスにより、非可換物理量 $\hat{A}, \hat{B}$ の同時測定を行うことができます。しかし、 $\hat{R}_A$ や $\hat{R}_B$ は $\hat{A}$ や $\hat{B}$ と完全に相関しているわけではないので、測定結果のばらつきは一般に射影測定のときのばらつき $\sigma(\hat{A})$ や $\sigma(\hat{B})$ よりも増大します。このときのばらつき (標準偏差) の大きさを $\sigma_{\text{meas}}(\hat{A}), \sigma_{\text{meas}}(\hat{B})$ とおきましょう。

ここで、 $\hat{A}, \hat{B}$ についての誤差演算子を

$$\hat{N}_A := \hat{U}^\dagger (\hat{I} \otimes \hat{R}_A) \hat{U} - \hat{A} \otimes \hat{I} \quad (9)$$

$$\hat{N}_B := \hat{U}^\dagger (\hat{I} \otimes \hat{R}_B) \hat{U} - \hat{B} \otimes \hat{I} \quad (10)$$

と定義します。また、以下の $|\psi\rangle$ について、

$$\langle \psi | \langle 0 | \hat{N}_A | \psi \rangle | 0 \rangle = 0 \quad (11)$$

$$\langle \psi | \langle 0 | \hat{N}_B | \psi \rangle | 0 \rangle = 0 \quad (12)$$

^{*7} 可換な物理量 $\hat{R}_A$ と $\hat{R}_B$ には同時固有状態が存在するので、同時に射影測定できる。

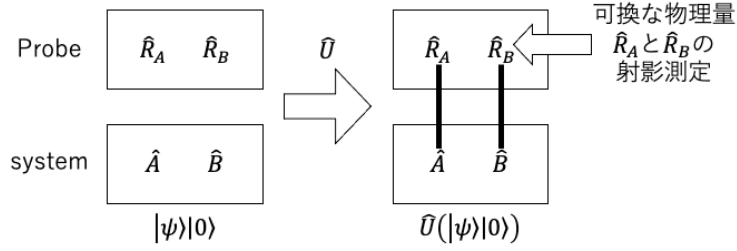


図3 非可換物理量 $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$ の同時測定の概略

が成り立つ測定のみを考えます。これは**不偏性条件**と呼ばれます。不偏性条件は、全ての $|\psi\rangle$ について

$$\langle\psi|\langle 0|\hat{U}^\dagger(\hat{I}\otimes\hat{R}_A)\hat{U}|\psi\rangle|0\rangle=\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \quad (13)$$

$$\langle\psi|\langle 0|\hat{U}^\dagger(\hat{I}\otimes\hat{R}_B)\hat{U}|\psi\rangle|0\rangle=\langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle \quad (14)$$

が成り立つことと同値であり、つまり今回の間接測定によって得られる $\hat{A}$ や $\hat{B}$ の期待値が必ず $\hat{A}$ や $\hat{B}$ を射影測定したものの期待値に一致することを意味します。

測定が不偏性条件を満たすとき、

$$\sigma_{\text{meas}}(\hat{A})^2=\sigma(\hat{A})^2+\langle\psi|\langle 0|\hat{N}_A^2|\psi\rangle|0\rangle \quad (15)$$

$$\sigma_{\text{meas}}(\hat{B})^2=\sigma(\hat{B})^2+\langle\psi|\langle 0|\hat{N}_B^2|\psi\rangle|0\rangle \quad (16)$$

が成り立つことが示されます。これより、この同時測定について、測定結果のばらつきが増大するのは式 (15)、(16) の右辺第二項の影響であることがわかります。そのため、不偏性条件を満たす同時測定において、測定誤差 $\varepsilon(\hat{A})$ 、 $\varepsilon(\hat{B})$ を

$$\varepsilon(\hat{A}):=\sqrt{\langle\psi|\langle 0|\hat{N}_A^2|\psi\rangle|0\rangle} \quad (17)$$

$$\varepsilon(\hat{B}):=\sqrt{\langle\psi|\langle 0|\hat{N}_B^2|\psi\rangle|0\rangle} \quad (18)$$

と定義するのが妥当であると言えます。この定義を採用すると、式 (15)、(16) は

$$\sigma_{\text{meas}}(\hat{A})^2=\sigma(\hat{A})^2+\varepsilon(\hat{A})^2 \quad (19)$$

$$\sigma_{\text{meas}}(\hat{B})^2=\sigma(\hat{B})^2+\varepsilon(\hat{B})^2 \quad (20)$$

と書き換えられるため、この同時測定の測定結果のばらつき $\sigma_{\text{meas}}(\hat{A})$ 、 $\sigma_{\text{meas}}(\hat{B})$ は、元々のゆらぎ $\sigma(\hat{A})$ 、 $\sigma(\hat{B})$ から測定誤差 $\varepsilon(\hat{A})$ 、 $\varepsilon(\hat{B})$ 分だけ増大したと言えます。

話を Arthurs-Goodman の不等式に戻します。Arthurs-Goodman の不等式は、不偏性条件 (11)、(12) を満たす非可換物理量 $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$ の同時測定について、測定誤差 $\varepsilon(\hat{A})$ 、 $\varepsilon(\hat{B})$ についての制約を表す不等式で、

$$\varepsilon(\hat{A})\varepsilon(\hat{B})\geq\frac{1}{2}\left|\left\langle[\hat{A},\hat{B}]\right\rangle\right| \quad (21)$$

と表されます。

Arthurs-Goodman の不等式 (21) の形は Kennard-Robertson の不等式 (5) の不等式と形が似ていますが、その意味は全く異なります。まず、Kennard-Robertson の不等式 (5) は $\frac{N}{2}$ 個の状態には $\hat{A}$ についての測定を、 $\frac{N}{2}$ 個の状態には $\hat{B}$ についての測定を行うという状況を考えていたのに対し、Arthurs-Goodman の不等式 (21) はいわば N 個の状態全てに対して $\hat{A}$ と $\hat{B}$ についての測定を二つとも行うという状況を考えています。また、Kennard-Robertson の不等式 (5) が二つの非可換物理量のゆらぎについてのトレードオフを表す不等式であり、それゆえ量子状態そのものに対する制限を与える不等式であったのに対し、Arthurs-Goodman の不等式 (21) は二つの非可換物理量の同時測定の際の測定誤差についてのトレードオフを表す不等式であり、測定過程について制限を与える不等式であると言えます。

6 Heisenberg の不確定性関係

Arthurs-Goodman の不等式 (21) と同様の考え方により、Heisenberg の思考実験による関係式 (4) に似た、測定誤差と擾乱のトレードオフの関係式を得ることもできます。

間接測定により $\hat{A}$ を測定することを考えます。今までは $\hat{B}$ との同時測定を考えましたが、今回は $\hat{A}$ のみを測定し、 $\hat{B}$ のゆらぎ $\sigma(\hat{B})$ の変化を考えます。 $\hat{B}$ のゆらぎの変化は、一般に測定直後の状態に依存するため、 $\hat{R}_A$ の測定結果に依存します。そのため、ここでは $\hat{R}_A$ の測定結果について平均化した際の $\hat{B}$ のゆらぎの変化に着目して考察します。これは、 $\hat{R}_A$ の測定はするがその測定結果を得ない場合に対応し、また $\hat{U}$ に従う時間発展をした後にプローブとシステムを切り離す場合にも対応しています。

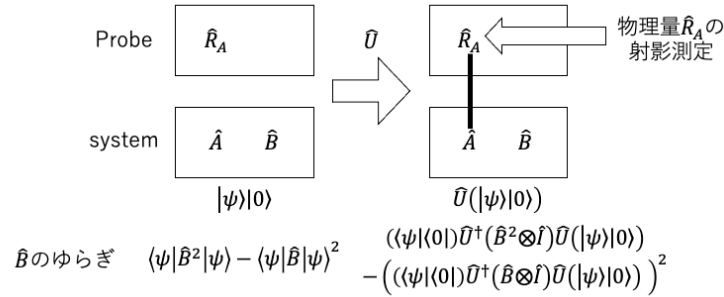


図4 $\hat{A}$ の測定による $\hat{B}$ の擾乱

ここで、 $\hat{B}$ についての反作用演算子を

$$\hat{D}_B := \hat{U}^\dagger(\hat{B} \otimes \hat{I})\hat{U} - \hat{B} \otimes \hat{I} \quad (22)$$

と定義します。また、以下、 $\hat{A}$ についての測定が不偏性条件を満たしていることに加え、全ての $|\psi\rangle$ について、

$$\langle \psi | \langle 0 | \hat{D}_B | \psi \rangle | 0 \rangle = 0 \quad (23)$$

が成り立つ測定のみを考えます。これも不偏性条件と呼ばれます。不偏性条件は、全ての $|\psi\rangle$ について

$$\langle \psi | \langle 0 | \hat{U}^\dagger(\hat{B} \otimes \hat{I})\hat{U} | \psi \rangle | 0 \rangle = \langle \psi | \hat{B} | \psi \rangle \quad (24)$$

が成り立つことと同値であり、つまり今回の間接測定によって $\hat{B}$ の期待値は平均として変化しないことを意味します。

擾乱が不偏性条件を満たすとき、測定後の $\hat{B}$ のゆらぎを $\hat{R}_A$ の測定結果について平均化したものを $\sigma_{\text{after}}(\hat{B})$ とすると、

$$\sigma_{\text{after}}(\hat{B})^2 = \sigma(\hat{B})^2 + \langle \psi | \langle 0 | \hat{D}_B^2 | \psi \rangle | 0 \rangle \quad (25)$$

が成り立つことが示されます。これより、この測定について、 $\hat{B}$ のゆらぎが増大するのは式 (25) の右辺第二項の影響であることがわかります。そのため、擾乱が不偏性条件を満たすとき、擾乱 $\eta(\hat{B})$ を

$$\eta(\hat{B}) := \sqrt{\langle \psi | \langle 0 | \hat{D}_B^2 | \psi \rangle | 0 \rangle} \quad (26)$$

と定義するのが妥当であると言えます。このとき、式 (25) は

$$\sigma_{\text{after}}(\hat{B})^2 = \sigma(\hat{B})^2 + \eta(\hat{B})^2 \quad (27)$$

と書き換えられるため、この測定により $\hat{B}$ のゆらぎは $\eta(\hat{B})$ 分だけ増大したと言えます。

話を Heisenberg の思考実験による関係式 (4) の一般化に戻します。 $\hat{A}$ についての測定と $\hat{B}$ についての擾乱が不偏性条件 (11)、(23) を満たす測定について、 $\hat{A}$ についての測定誤差 $\varepsilon(\hat{A})$ と $\hat{B}$ についての擾乱 $\eta(\hat{B})$ についての制約を表す不等式として、

$$\varepsilon(\hat{A})\eta(\hat{B}) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right| \quad (28)$$

を示すことができます。これは、Heisenberg の思考実験による関係式 (4) との類似性から、**Heisenberg** の不確定性関係と呼ばれます [17]。

7 小澤の不等式

小澤の不等式 [8][9][10] は、Arthurs-Goodman の不等式 (21) から不偏性条件 (11)、(12) を無くしたときの、二つの非可換物理量 $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$ の同時測定の際の測定誤差 $\varepsilon(\hat{A})$ 、 $\varepsilon(\hat{B})$ の制限を与える不等式であり、

$$\varepsilon(\hat{A})\varepsilon(\hat{B}) + \varepsilon(\hat{A})\sigma(\hat{B}) + \sigma(\hat{A})\varepsilon(\hat{B}) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right| \quad (29)$$

と表されます。ここで、 $\varepsilon(\hat{A})$ 、 $\varepsilon(\hat{B})$ の定義は式 (17)、(18) で与えられます。

また、Heisenberg の不確定性関係 (28) から不偏性条件 (11)、(23) を無くしたときの、物理量 $\hat{A}$ の測定における $\hat{A}$ の測定誤差 $\varepsilon(\hat{A})$ と $\hat{B}$ の擾乱 $\eta(\hat{B})$ の制限を与える不等式

$$\varepsilon(\hat{A})\eta(\hat{B}) + \varepsilon(\hat{A})\sigma(\hat{B}) + \sigma(\hat{A})\eta(\hat{B}) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right| \quad (30)$$

も小澤の不等式と言われます。ここで、 $\varepsilon(\hat{A})$ 、 $\eta(\hat{B})$ の定義は式 (17)、(26) で与えられます。

小澤の不等式 (29)、(30) は Arthurs-Goodman の不等式 (21) や Heisenberg の不確定性関係 (28) よりも真に緩い不等式です。そのため、 $\varepsilon(\hat{A})$ 、 $\varepsilon(\hat{B})$ や $\varepsilon(\hat{A})$ 、 $\eta(\hat{B})$ が小澤の不等式 (29)、(30) は満たすが、Arthurs-Goodman の不等式 (21) や Heisenberg の不確定性関係 (28) は満たさないような例も作ることができます。実際、このことは実験的にも確かめられています [13]。

しかし、だからと言って Arthurs-Goodman の不等式 (21) や Heisenberg の不確定性関係 (28) が誤りというわけではありません。小澤の不等式 (29)、(30) がこれらを破ることができるのは、測定や擾乱に不偏性関係 (11)、(12)、(23) を課していないからです。

8 小澤の不等式の問題点とその後の発展

この節では、簡単のため二つの非可換物理量 $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$ の同時測定の際の測定誤差 $\varepsilon(\hat{A})$ 、 $\varepsilon(\hat{B})$ についての式 (29) についてのみ述べます。同様のことが二つの非可換物理量 $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$ の測定誤差 $\varepsilon(\hat{A})$ と擾乱 $\eta(\hat{A})$ についての式 (30) にも言えます。

小澤の不等式 (29) は実験的にも確かめられた不等式ですが、いくつかの問題があります。

まず、小澤の不等式 (29) はタイトな不等式ではありません。つまり、任意の状態と任意の演算子について、式 (29) の等号が成立するような測定が存在するわけではありません。この問題を解決したのが **Branciard** の不等式 [15] であり、

$$\varepsilon(\hat{A})^2\sigma(\hat{B})^2 + \sigma(\hat{A})^2\varepsilon(\hat{B})^2 + 2\varepsilon(\hat{A})\varepsilon(\hat{B})\sqrt{\sigma(\hat{A})^2\sigma(\hat{B})^2 - C^2} \geq C^2 \quad (31)$$

と表されます。ここで、

$$C = \frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \quad (32)$$

です*8。

*8 Branciard の不等式 (31) は純粋状態についてはタイトな不等式であるが、混合状態の場合はそうであるとは限らない [16]。

小澤の不等式 (29) のより深刻な問題は、測定誤差の定義 (17)、(18) が物理的に妥当であるとは限らないということです。測定が不偏性条件 (11)、(12) を満たすならば、式 (19)、(20) が成り立つため、この測定誤差の定義は妥当だと言えます。しかし、小澤の不等式 (29) は不偏性条件 (11)、(12) を仮定していないため、式 (19)、(20) が成り立たず、測定誤差の定義 (15)、(16) が妥当であるとは限らなくなります。

極端な例として、測定器が壊れており、同一の測定結果 c しか返さない測定を行うことを考えてみましょう。これは、 $\hat{R}_A = \hat{R}_B = c\hat{I}$ とすることによって実現できます。このとき、測定誤差 $\varepsilon(\hat{A})$ 、 $\varepsilon(\hat{B})$ は

$$\varepsilon(\hat{A}) = \sqrt{\langle \psi | (c\hat{I} - \hat{A})^2 | \psi \rangle} \quad (33)$$

$$\varepsilon(\hat{B}) = \sqrt{\langle \psi | (c\hat{I} - \hat{B})^2 | \psi \rangle} \quad (34)$$

という有限値になります。しかし、この測定により系の情報を得られることはありません。このような場合に測定誤差が有限になってしまうことは少し妥当性に欠けるように思えます。

さらに極端な例として、たまたま $|\psi\rangle = |a\rangle$ 、 $c = a$ であったとき、

$$\varepsilon(\hat{A}) = 0 \quad (35)$$

となります。測定器が壊れており、系の情報を一切得られないのに、測定誤差が 0 になってしまうのはおかしいと言えるでしょう。

では、不偏性条件を満たさない場合、測定誤差 $\varepsilon(\hat{A})$ をどのように定義すれば良いのでしょうか。それを考えるために、一般に測定と呼ばれているものは (量子か古典かによらず)

1. 測定器から測定結果を得る
2. 測定結果から、元々知りたかったものの値を推定する

という 2 つのプロセスに分かれていることを着目してみましょう。例えば、バネを使って物質の質量を測定するとき、

1. バネの長さを定規で測る
2. 1. の測定結果から、フックの法則を使って物質の質量を推定する

というプロセスに分けることができます。

このことを考えると、一般に知りたい値を推定するときの誤差の要因として

- ゆらぎ
- 測定誤差
- 推定が悪かったことによる誤差

の三つがあると考えられます。そのため、測定誤差 $\varepsilon(\hat{A})$ を

$$\varepsilon(\hat{A}) = (\text{推定結果の誤差}) - (\text{推定時の誤差}) - (\text{ゆらぎによる誤差}) \quad (36)$$

$$= (\text{一番良い推定をしたときの推定結果の分散}) - \sigma(\hat{A})^2 \quad (37)$$

と定義することが妥当そうです^{*9*10}。

この定義を採用し、二つの非可換物理量 $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$ の測定誤差 $\varepsilon(\hat{A})$ 、 $\varepsilon(\hat{B})$ に制限を与える不等式が渡辺-沙川-上田の不等式 [12] であり、

$$\varepsilon(\hat{A})\varepsilon(\hat{B}) \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|^2 \quad (38)$$

と表されます^{*11}。

^{*9} 今までは標準偏差の増加分を測定誤差と呼んでいたが、ここでは分散の増加分を測定誤差と定義している。

^{*10} ただし、これは無限回の測定により $\hat{A}$ の期待値を正しく推定する手段のある測定に限る。そのような良い推定ができない測定の場合は、 $\varepsilon(\hat{A}) = \infty$ と定義される。先ほど述べた測定器が壊れており、 $\hat{R}_A = c\hat{I}$ となる例はこれに相当するため、 $\varepsilon(\hat{A}) = \infty$ である。

^{*11} が、これはまだ有限次元系でしか示されていないと思われる。

9 おわりに

この記事では、不確定性関係の一部について、特にその意味や解釈に重点を置いて解説しました。ここで紹介した各不等式の証明が気になる方は、混合状態の扱いや間接測定についての考え方に慣れた後に [14] を参照してください^{*12}。これらの考え方に慣れていない場合は、[17] も合わせて参照してください。また、[Physics Lab. 2021](#) の他の解説記事も読んでいただければ幸いです。

参考文献

- [1] W. Heisenberg, Zeitschrift für Physik A Hadrons Nuclei 43, 172 (1927)
- [2] E.H. Kennard, Zeitschrift für Physik A Hadrons Nuclei 44, 326 (1927)
- [3] H.P. Robertson, Phys. Rev. 34, 163 (1929)
- [4] E. Schrödinger, Proc. Prussian Acad. Sci. Phys. Math. Sect. XIX, 293 (1930)
- [5] E. Arthurs, J.L. Kelly, Bell Syst. Tech. J 44, 725 (1965)
- [6] D. Deutsch, Phys. Rev. Lett. 50, 631 (1983)
- [7] E. Arthurs, M.S. Goodman, Phys. Rev. Lett. 60, 2447 (1988)
- [8] M. Ozawa, Phys. Rev. A 67, 042105 (2003)
- [9] M. Ozawa, Phys. Lett. A 320, 367 (2004)
- [10] M. Ozawa, Ann. Phys. 311, 350 (2004)
- [11] 清水明, 「新版 量子論の基礎 その本質の優しい理解のために」 (サイエンス社, 2004)
- [12] Y. Watanabe, T. Sagawa, M. Ueda, Phys. Rev. A 84, 042121 (2011)
- [13] G. Sulyok, S. Sponar, J. Erhart, G. Badurek, M. Ozawa, and Y. Hasegawa, Phys. Rev. A 88, 022110 (2013)
- [14] Yu Watanabe, "Formulation of Uncertainty Relation Between Error and Disturbance in Quantum Measurement by Using Quantum Estimation Theory" (Springer Science & Business Media, 2013)
- [15] C. Branciard, PNAS 110, 6742-6747 (2013)
- [16] C. Branciard, Phys. Rev. A 89, 022124 (2014)
- [17] 沙川貴大, 上田正仁 「量子測定と量子制御」 (サイエンス社、2016)

^{*12} Deutsch のエントロピー不確定性 (8) 関係及び Branciard の不等式 (31) の証明は載っていないので原論文参照。