光のドップラー効果と赤方偏移を 3 通りの方法で導出してみた

水野裕介

2022 年 5 月 14 日，15 日

私たちが光源から出てくる光を観測するとき，もともとの光の色とは違う色に見えることがあります．こうした色の変化は，光源との相対速度や重力，宇宙の膨張などによって引き起こされます．この記事では相対性理論についても触れながら，ドップラー効果や赤方偏移の導出を 3 通り紹介します．

読者は高校生を想定していますが，[発展] は少し踏み込んだ話をしているので大学 1，2 年生程度を考えています．

目次

1 準備

1.1 時空図

時空図を描きましょう！！！というのはこの記事で伝えたいことの一つです．時空図[*1] とは縦軸に時間座標，横軸に空間座標を書いたグラフです．相対性理論を考えるときは**誰の視点に立っているか**，何の座標系を考えているかをとりわけ意識しなくてはいけません．

A さんは地面の上で静止しているなか，B さんが速度 v で走っているとします．A さんから見た視点では図 1 のようになります．これを A さんの静止座標系といいます (単に静止系と呼ぶこともあります．)．一方で B さんからは図 2 のように見えているはずです．これを B さんの静止座標系といいます．

[*1] 距離が直感的でない (図の上では同じ長さの線に見えても実際は同じ距離ではない) ことは注意が必要です．2 点間の距離は

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2$$

で与えられます．

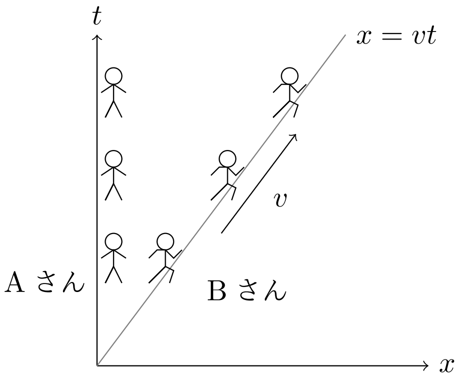

図 1　時空図 (A さんの静止座標系).

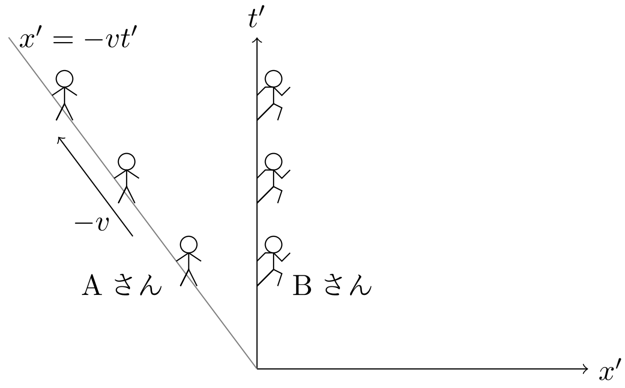

図 2　時空図 (B さんの静止座標系).

1.2　波動

いちおう波の性質について復習しておきます．波は何かしらの量 $u(t,x)$ が空間を伝わっていくものです．u はなんでもよくて，水面の高さでも電場の強さでもいいです．

周期的に変化する波の場合，ある山から次の山が来るまでの時間間隔を周期といい，T で表します．逆に，ある時間間隔にやって来る山の個数を振動数といい，ν と表します．振動数 ν と周期 T は

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{1.1}$$

の関係があります．

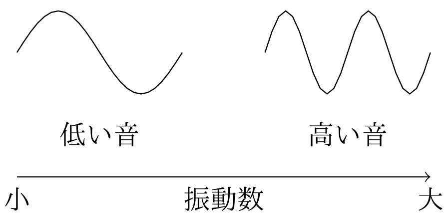

図 3　音の波.

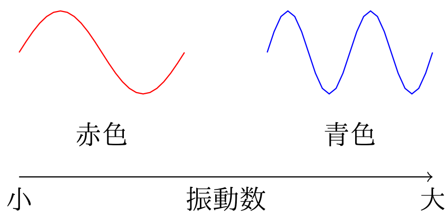

図 4　光の波.

音の場合，振動数が大きい，すなわち波長が短いと高い音，振動数が小さい，すなわち波長が長いと低い音に聞こえます．

光の場合，振動数が大きい，すなわち波長が短いと青色，振動数が小さい，すなわち波長が長いと赤色に見えます．

最も基本的な波は，三角関数を使って

$$u(t,x) = A\sin(\omega t - kx + \phi) \tag{1.2}$$

というように表すことができます．この波が伝わる速さは

$$V = \frac{\omega}{k} \tag{1.3}$$

振動数は

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1.4}$$

波長は

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{1.5}$$

で計算できます．振動数 ν と速度 v はよく似ていますが違う文字なので注意してください．

2　時空図で考える

2.1　音のドップラー効果

音のドップラー効果を考えてみます．音は空気を伝わる振動で，同じ温度・密度・圧力の空気であれば同じ速度 V で伝わります．身近な音のドップラー効果の例は救急車のサイレンです．

A さんから発せられた音を B さんが聞くとき，振動数にどんな変化があるか見てみましょう．波を考えるのは少しややこしいので，代わりに A さんに手をパンパンと 2 回叩いてもらいます[*2]．叩くタイミングは例えば波の高いところに合わせるなど，波の 1 周期を測れるのでしたらどうとってもいいでしょう．その時間間隔を Δt とすれば，振動数は $\nu = 1/\Delta t$ です．手を 2 回叩いた音は音速 V で伝わって B さんに届きますが，1 回目の音が B さんに届いたあと B さんは少し移動しているので，2 回目の音はやや遅れて届くはずです．

時空図に整理してみれば図 5 のようになります．

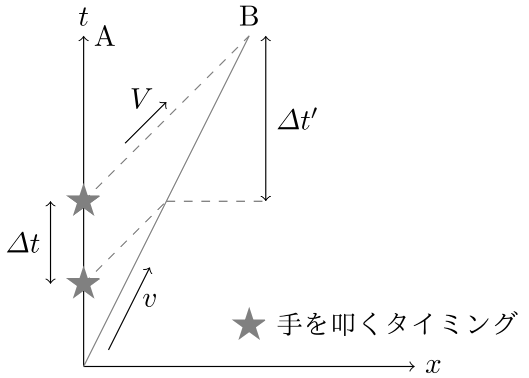

図 5　A さんが手を叩く (A さんの静止系)．

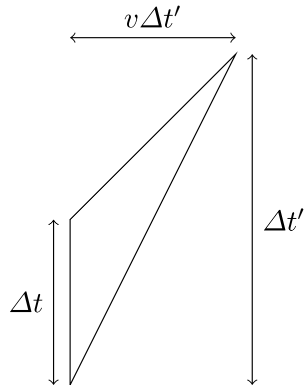

図 6　三角形に注目する．

この図を見るだけでも B さんに届く音が間延びしている，つまり振動数が小さくなっていることがわかります．

計算も簡単で，図 6 のような三角形に注目すれば，

$$\Delta t + \frac{v\Delta t'}{V} = \Delta t' \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{\Delta t'} = \frac{V - v}{V}\frac{1}{\Delta t} \tag{2.2}$$

振動数は $\nu = \frac{1}{\Delta t}$，$\nu' = \frac{1}{\Delta t'}$ なので，

$$\nu' = \frac{V - v}{V}\nu \tag{2.3}$$

というようにドップラー効果の公式を導くことができました．

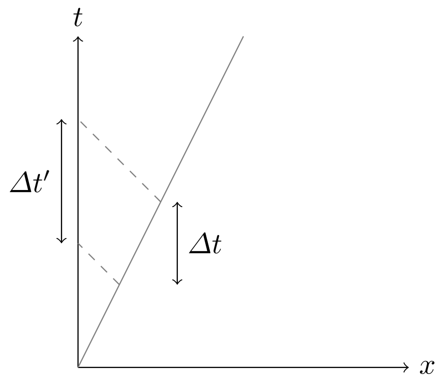

図 7　B さんが手を叩く (A さんの静止系)．

B さんが手を叩いた場合も図 7 を見れば簡単に計算できて

$$\nu' = \frac{V}{V + v}\nu \tag{2.4}$$

[*2] A さんは「不義遊戯」を使えません．B さんもブラザーの略ではありません．

となります．

ドップラー効果は相対運動によって生じます．お互いが止まっていれば振動数は変化しません．

2.2　光のドップラー効果

時空図から光のドップラー効果を考えてみます．光は真空中を光速 c で伝わります[*3]．

波を考えるのはややこしいので，A さんに 2 回光を発してもらいます[*4]．今度は伝わる速度が c に変わるだけです．図 8 のような図が描けるはずです．

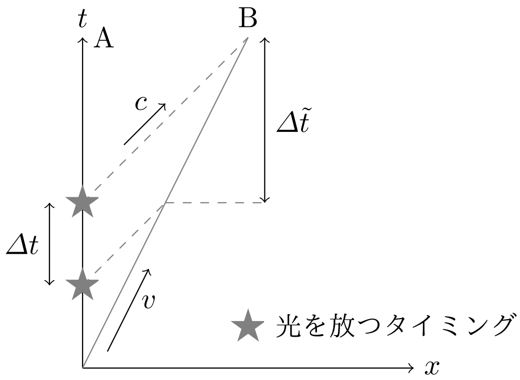

図 8　A さんが光を放つ (A さんの静止系)．

では B さんは時間間隔 $\Delta\tilde{t}$ で光を観測するのでしょうか？ここでは特殊相対論の効果を考慮しなくてはいけません．「A さんに対して速度 v で動いている B さんの時計は，(A さんの静止系で)$\gamma \coloneqq 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 倍に遅くなる」というのが特殊相対論の帰結です (γ は 1 より大きい数です．)．この時間の遅れの効果は次の節で示します．B さんの時計は A さんから見て遅れているので，**B さんの時計が $\Delta t'$ だけ進んだとき，A さんの時計は $\Delta\tilde{t} = \gamma\Delta t' (> \Delta t')$ も経過していることになります．**

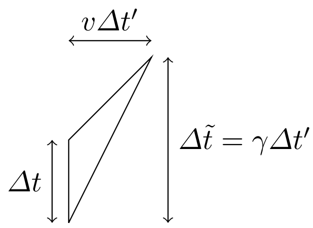

図 9　三角形に注目する．

あとは音のドップラー効果と同じように計算することができて，

$$\Delta t + \frac{v\gamma\Delta t'}{c} = \gamma\Delta t' \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{\Delta t'} = \gamma\frac{c-v}{c}\frac{1}{\Delta t} \tag{2.6}$$

よって，

$$\nu' = \gamma\frac{c-v}{c}\nu \tag{2.7}$$

となります．

2.3　[発展] 時間の遅れ (γ の導出)

A さんにとって，動いている B さんの時計は $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 倍だけ遅くなります．この γ の式を導出してみましょう．

[*3] ただし「慣性系で」，重力がある場合は「局所的に」という但し書きがつきます．

[*4] 黒閃ではありません．

B さんはある箱と一緒に x 方向に動いていて，y 方向に光を飛ばして往復させるとします．

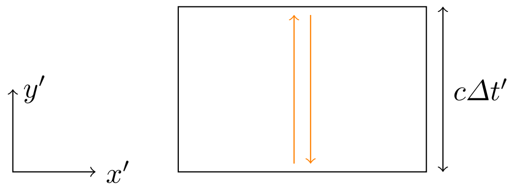

図 10　光時計で時間を測る (B さんの静止系)．

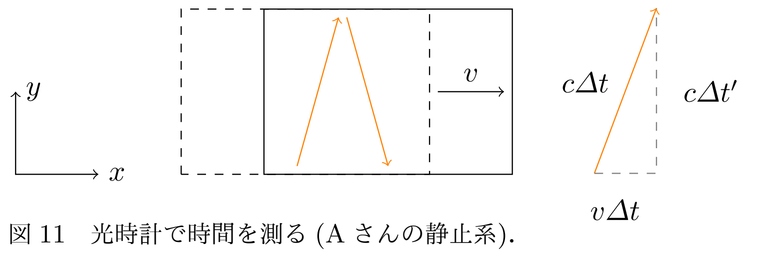

図 11　光時計で時間を測る (A さんの静止系)．

A さんにとって光が往復する時間を $2\Delta t$，B さんにとって光が往復する時間を $2\Delta t'$ とすると，三角形に注目すれば，

$$(v\Delta t)^2 + (c\Delta t')^2 = (c\Delta t)^2 \tag{2.8}$$

よって，

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\Delta t' \tag{2.9}$$

係数の $\gamma := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ は 1 より大きい数です．B さんにとっての時間間隔 $\Delta t'$ は，A さんにとっては $\Delta t = \gamma \Delta t'$ というように大きくなっています．つまり，B さんの持っている時計が $\Delta t'$ だけ進むのは，A さんにとっては $\Delta t = \gamma \Delta t$ 経ってからということになります．これが時間の遅れです．*5

2.4　宇宙論的赤方偏移

宇宙の膨張の効果で波が引き伸ばされて振動数が小さくなる，つまり赤色に近づく現象を宇宙論的赤方偏移といいます．

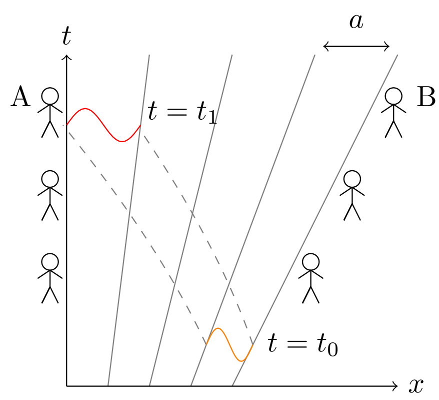

図 13　宇宙論的赤方偏移．

図 13 の状況では A さんと B さんは互いに静止しています．相対速度がないのでドップラー効果は生じません．ですが，光が時空を伝わって届くときには，空間の膨張によって波が引き伸ばされます．宇宙の膨張が a 倍であれば波

*5 光が点線のように真上に進むのではないかという誤解がよくあります．特殊相対性理論でもニュートン力学でも，光は実線のように斜め方向に速度 c で運動します．

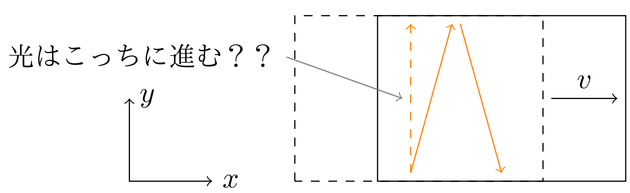

図 12　よくある誤解．

誰の目線から見ても事象が起きた点というのは変わりません．光が反射する場所は A さんと B さんで座標の値は違えど，本質的には同じ場所のはずです．

長は a 倍に引き伸ばされ，振動数は $1/a$ 倍になるでしょう．よって，A さんが見た光の振動数 ν' は，もともとの振動数 ν に対して

$$\nu' = \frac{1}{a}\nu \tag{2.10}$$

です．a は空間の膨張の程度を表すスケール因子と呼ばれる量で，$t = t_0$ に振動数 ν の光が放たれたとき $a(t_0)$，$t = t_1$ に振動数 ν' の光が届いたとき $a(t_1)$ であったとすれば，振動数の変化は

$$\nu' = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}\nu \tag{2.11}$$

となります．

もともとの光との振動数の変化は，その光が放たれたときのスケール因子 a の大きさに対応しています．つまり，B さんがいつ光を放ったのかがわかります．地球に届く光を考えている場合は，その光がどのくらい昔に放たれたのかがわかります[*6]．

3　座標変換で考える

3.1　音のドップラー効果

A さんの座標系で (t, x) にある点は，B さんの座標系でどこにあるでしょうか．その位置を (t', x') と書くと，

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \end{cases} \tag{3.1}$$

という関係が成り立ちます．私たちはこの式を使って，A さんの座標系と B さんの座標系を自由に行ったり来たりして計算できます．2 つの座標系のあいだで座標がどう変わるか，数値を変換して教えてくれます．この式を**ガリレイ変換**といいます．

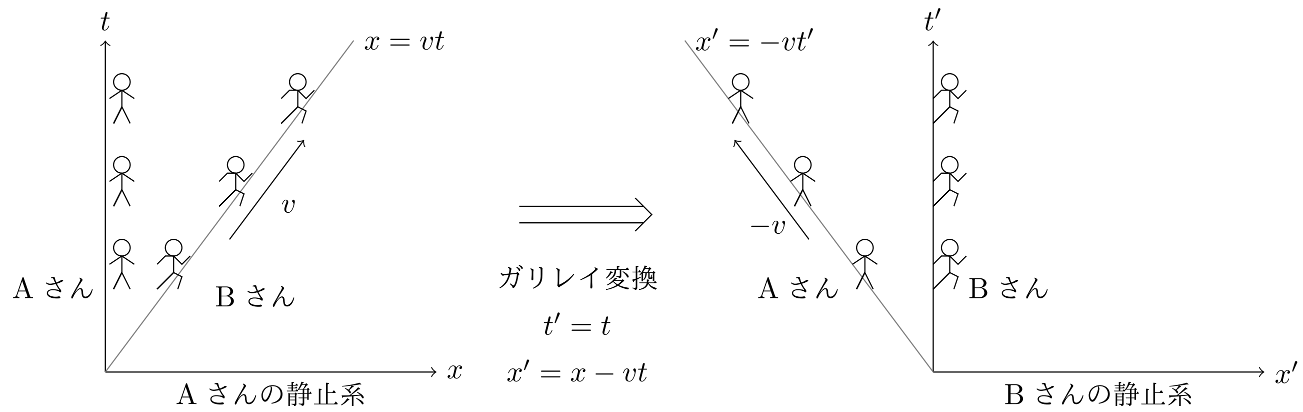

図 14　ガリレイ変換．

A さんの座標系で，音の波は

$$u(t, x) = A\sin(\omega t - kx + \phi) \tag{3.2}$$

という形をしています．これが A さんの座標系でどう見えるでしょうか？ガリレイ変換の式で簡単に計算することができます．(3.1) 式を変形して

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x' + vt' \end{cases} \tag{3.3}$$

これを (3.2) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} u(t', x') &= A\sin(\omega t' - k(x' + vt') + \phi) && (3.4) \\ &= A\sin\big(\underbrace{(\omega - vt)}_{=:\omega'}t' - kx' + \phi\big) && (3.5) \end{aligned}$$

[*6] 宇宙膨張の様子 a の時間変化がわかっているときに限ります．

これが B さんの座標系における波を表す式です．振動数は

$$\nu' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{\omega - kv}{2\pi} \tag{3.6}$$

音速の関係

$$V = \frac{\omega}{k} \tag{3.7}$$

を代入して

$$\nu' = \frac{V - v}{V}\nu \tag{3.8}$$

というように (2.3) 式と同じ形を得ることができました．

3.2　光のドップラー効果

同じように座標変換で光のドップラー効果の式を導出しましょう．ただし特殊相対論での座標変換はガリレイ変換ではありません．

$$\begin{cases} ct' = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(ct) - \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\dfrac{v}{c}x \\ x' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\dfrac{v}{c}(ct) + \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}x \end{cases} \tag{3.9}$$

この変換をローレンツ変換といいます．私たちはこの式を使って，A さんの座標系と B さんの座標系を自由に行ったり来たりして計算できます．[*7]

B さんの座標系で，光の波は

$$u(t,x) = A\sin(\omega t - kx + \phi) \tag{3.11}$$

という形をしています．これが A さんの座標系でどう見えるでしょうか？ローレンツ変換の式で簡単に計算することができます．

$$\begin{aligned} u(t',x') &= A\sin\left(\omega\frac{1}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(ct) + \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{v}{c}x\right) - k\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{v}{c}(ct) + \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}x\right) + \phi\right) \\ &= A\sin\left(\left(\underbrace{\omega\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - k\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}v}_{=:\omega'}\right)t - \left(-\frac{\omega v}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + k\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)x + \phi\right) \end{aligned}$$

これが B さんの座標系における波を表す式です．振動数は

$$\nu' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{\omega - kv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{3.12}$$

光速の関係

$$c = \frac{\omega}{k} \tag{3.13}$$

を代入して

$$\nu' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{c-v}{c}\nu \tag{3.14}$$

というように，(2.7) 式と同じ形を得ることができました．

[*7] ガリレイ変換に比べると煩雑な式ですが，行列で書けば

$$\text{ガリレイ変換:} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{ローレンツ変換:} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

となるので，ローレンツ変換の方が対称できれいと言えなくもない…？

4　運動量で考える

4.1　光のドップラー効果

振動数 ν の光はエネルギー $E = h\nu$，運動量 $p = h\nu/c$ を持ちます．h はプランク定数です．ここで，E/c と p はそれぞれ ct と x と同じ変換則を持つことが知られています．つまり，B さんの座標系での E'/c と p' は，(3.9) 式と同じ形

$$\begin{cases} E'/c = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(E/c) - \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\dfrac{v}{c}p \\ \quad p' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\dfrac{v}{c}(E/c) + \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}p \end{cases} \tag{4.1}$$

になります．2 つの式のどちらを使っても大丈夫ですが，$p = E/c$ より

$$E' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{c-v}{c}E \tag{4.2}$$

$E = h\nu$ から，

$$\nu' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{c-v}{c}\nu \tag{4.3}$$

というように導出することができました．

4.2　[発展] 宇宙論的赤方偏移

宇宙の膨張に伴って光の運動量がどう変化するのかを追いかけることで，宇宙論的赤方偏移を導出することもできます．

ロバートソン-ウォーカー計量

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2\gamma_{ij}dx^idx^j \tag{4.4}$$

のもとで測地線方程式

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}p^\nu p^\rho = 0 \tag{4.5}$$

の時間成分は

$$\frac{dp^0}{d\lambda} = -\frac{\dot{a}}{a}|\boldsymbol{p}|^2 \tag{4.6}$$

です．ここで，$(p^0)^2 = |\boldsymbol{p}|^2$ を微分して得られる $p^0\frac{dp^0}{d\lambda} = |\boldsymbol{p}|\frac{d|\boldsymbol{p}|}{d\lambda}$ と $p^0 = \frac{dt}{d\lambda}$ を代入すれば，

$$\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}d\boldsymbol{p} = -\frac{\dot{a}}{a}dt \tag{4.7}$$

よって，

$$|\boldsymbol{p}| \propto a^{-1} \tag{4.8}$$

運動量は振動数に比例するので ($|\boldsymbol{p}| \propto \nu$)，空間の膨張の程度を表すスケール因子 a が，$t = t_0$ に光が放たれたとき $a(t_0)$，$t = t_1$ に光が届いたとき $a(t_1)$ であったとすれば，振動数の変化は

$$\nu' = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}\nu \tag{4.9}$$

となることが導出できました．

5　おまけ

5.1　[発展] 共形時間で宇宙論的赤方偏移を導出する

共形時間 η を

$$d\eta = \frac{1}{a(t)}cdt \tag{5.1}$$

として定義すると，ロバートソン・ウォーカー計量は

$$ds^2 = a^2(-d\eta^2 + dr^2) \tag{5.2}$$

となります．この座標系では光が直進します．

(5.1) 式を見ると，宇宙の膨張 (a の増加) に伴い，固有時間の同じ刻み $\varDelta t$ は共形時間においてどんどん小さくなることがわかります．t は静止している観測者の固有時間ですから，宇宙膨張とは η に伴って固有時間 t が早くなっていくことだと捉えることができます．

この座標系を時空図に図示すれば図 15 のようになります．

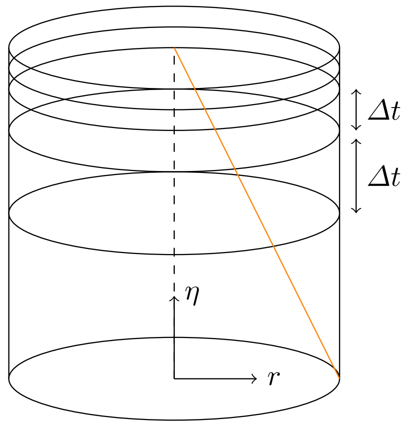

図 15　共形時間と共形座標で表した宇宙膨張.

再び A さんに 2 回光を発してもらいます．図 16 では軸が η と r になっています．

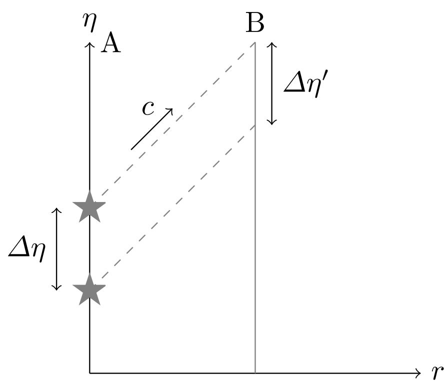

図 16　A さんが光を放つ (A さんと B さんの静止系).

光は互いに平行に進むので，$\varDelta\eta$ と $\varDelta\eta'$ は同じです．しかし宇宙膨張によって固有時間は変化します．つまり，

$$\frac{1}{a(t_0)} c\varDelta t = \frac{1}{a(t_1)} c\varDelta t' \tag{5.3}$$

赤方偏移の式

$$\nu' = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \nu \tag{5.4}$$

を導くことができました．

参考文献

[1]「場の古典論」 ランダウ=リフシッツ

[2]「宇宙論の物理 上」 松原隆彦

[3] 前期教養学部「相対論」の授業