

宇宙マイクロ波背景放射 (CMB)

Physics Lab.2022 宇宙班 中根美七海

2022年5月14,15日

はじめに

この解説記事では、宇宙マイクロ波背景放射 (以下 CMB) について解説をします。CMB とは、宇宙の晴れ上がり時点からほぼ等方的に地球にやってくる光子のことです。CMB 観測衛星 COBE に搭載された遠赤外絶対分光器 (FIRAS) による測定の結果、CMB のスペクトルは $2.725 \pm 0.002 \text{ K}$ の黒体放射のスペクトルと一致すると結論づけられました。黒体放射のスペクトルは物質と光子が熱平衡状態であるときに実現されます。しかし、現在の宇宙では物質と光は熱平衡状態にないため、宇宙の初期は熱平衡状態が実現するほどの高温・高密度の火の玉状態であり、宇宙の膨張に伴って冷えた光子が CMB として観測されているといえます。こうして、CMB の発見はビッグバン理論の観測的証拠の 1 つとされています。

CMB は宇宙初期の情報を持った光子として注目され、研究が行われています。1 章では CMB が観測されるのには不可欠な宇宙の晴れ上がりを解説します。2 章では重力場が原因となる場合の温度異方性を考え、インフレーション理論の証拠となり得る CMB の偏光について簡単に述べています。

本記事は、理学部物理学科の学部 3 年生の秋学期に行われた「物理学ゼミナール」という輪講の授業で扱った教科書 [1] を読んでいく中で、CMB について興味を抱いたことに端を発しています。執筆者である私自身、学部 4 年生の勉強中の身であるため、間違いを見つけられた場合には指摘していただくと幸いです。最後に、本記事を読んでくださった方々へ感謝を申し上げます。

目次

1	宇宙の晴れ上がり	3
1.1	電子の再結合	3
1.2	宇宙の晴れ上がりの時刻	9
2	重力場による温度異方性	11
2.1	温度異方性	11
2.2	一般相対論	12
2.3	光子のエネルギー変化	14
2.4	ISW 効果	16
2.5	CMB の偏光と原始重力波	17

1 宇宙の晴れ上がり

初期の宇宙は高温・高密度な状態のため、光子と物質が熱平衡状態にあります。この時期は、光子は自由電子に散乱されて真っ直ぐ進めない不透明な状態でした。宇宙の温度が 3000 K 程度まで下がると、自由電子がヘリウム原子核や陽子に捕われる**再結合**が起こり、ヘリウム原子や水素原子が形成されていきます。再結合により宇宙空間の電子の数密度が大きく減少すると、光子は真っ直ぐ進めるようになります。これを光子と物質の**脱結合**といいます。日本では、霧が晴れて周りが見通せるようになることに喩えて、**宇宙の晴れ上がり**と呼んでいます。この章では、宇宙の晴れ上がりが起きた時刻を求めることを目標とします。この時刻を知るために、電子の再結合によりどのように水素原子が形成され、電子の数密度が変化していくかを見ていきます。

1.1 電子の再結合

水素原子の基底状態の束縛エネルギーである 13.6 eV を超えるエネルギーを持つ粒子が水素原子に衝突すると、水素原子は電離します。ここで、光子は他の粒子（電子や陽子など）より数密度が非常に大きいため、光子による電離のみを考えることにします。また、光子の数密度はバリオン（水素、ヘリウムなどの通常の物質）の数密度の約 17 億倍もある^{*1}ので、温度が高い間は再結合により水素原子が形成されてもすぐに電離してしまいます。宇宙膨張によって温度が 4000 K より下がり、光子の数密度も減少していくと、水素原子の形成が始まります。以下では、光子とバリオンの温度は等しいと仮定します^{*2}。

1.1.1 電離平衡近似

再結合の反応において**電離平衡** $p + e^- \longleftrightarrow H_{1s} + \gamma$ を仮定します。この時、温度 T のマクスウェル・ボルツマン分布に従う電子、陽子、水素原子の数密度 n_e , n_p , n_{1s} は、

$$n_e = g_e \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_e c^2 - \mu_e}{k_B T} \right) \quad (1)$$

$$n_p = g_p \left(\frac{m_p k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_p c^2 - \mu_p}{k_B T} \right) \quad (2)$$

$$n_{1s} = g_{1s} \left(\frac{m_{1s} k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_{1s} c^2 - \mu_{1s}}{k_B T} \right) \quad (3)$$

と表せます。ここで、 $g_e = 2$, $g_p = 2$, $g_{1s} = 4$ は各粒子のスピン状態数、 m_e , m_p , m_{1s} は各粒子質量、 μ_e , μ_p , μ_{1s} は各粒子の化学ポテンシャルです。光子の化学ポテンシャルは 0 であるので、化学平衡の条件より、

$$\mu_e + \mu_p = \mu_{1s} = 13.6 \text{ eV} \quad (4)$$

水素原子の基底状態の束縛エネルギーは、

$$E_1 = m_e c^2 + m_p c^2 - m_{1s} c^2 \quad (5)$$

と表します。宇宙は電気的中性であるので、

$$n_e = n_p \quad (6)$$

また、 $m_p \gg m_e$ より $m_{1s} = m_p + m_e \sim m_p$ とすると、式 (1)-(6) から、

$$\frac{n_e n_p}{n_{1s}} = \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{E_1}{k_B T} \right) \quad (7)$$

^{*1} 式 (13) を参照してください。

^{*2} ここでは簡単のため等しいと仮定しましたが、実際は約 1500 K より下がるとバリオンの温度は光子の温度より低くなるため、バリオンと光子で温度を分けて考える必要があります [1].

が成り立ちます。電離平衡の時の反応前後の粒子の数密度の比を表すこの式を**サハの式**といいます。電離度 X を

$$X \equiv \frac{n_p}{n_p + n_{1s}} = \frac{n_e}{n_e + n_{1s}} \quad (8)$$

で定義してサハの式を書き直すと、

$$\begin{aligned} \frac{X^2}{1-X} &= \frac{1}{n_p + n_{1s}} \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_1}{k_B T}\right) \\ &= \frac{1}{0.75 n_B} \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_1}{k_B T}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

が得られます。2つ目の等号では、バリオン密度を n_B として $n_p + n_{1s} = 0.75 n_B$ を用いました。電子・陽電子対消滅（晴れ上がり以前の出来事）の後はバリオンと光子の数密度は膨張とともに、膨張を表すスケール因子 $a(t)$ のマイナス3乗に比例するので、バリオン-光子比は一定となります。したがって、現在の物理量を0をつけて表すと、

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} = \frac{n_{B0}}{n_{\gamma 0}} \quad (10)$$

が一定となります。現在のバリオン密度はCMB観測で $n_{B0} = 2.47 \times 10^{-7} \text{ cm}^{-3}$ と見積もられています。光子の数密度が分かれば、バリオン密度 n_B も分かります。そこで、光子の数密度を求めていきます。黒体放射において、単位面積、単位立体角、単位周波数あたりの放射のエネルギー（輝度）は、以下のプランクの公式で与えられます。

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \quad (11)$$

輝度 $B(\nu, T)$ を光子1個のエネルギー $h\nu$ で割って立体角と周波数で積分すると、光子の数密度は以下のように計算できます。

$$\begin{aligned} n_\gamma &= \frac{1}{c} \int d\Omega d\nu \frac{B(\nu, T)}{h\nu} \\ &= \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty d\nu \frac{2\nu^2}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \\ &= \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{k_B T}{h} du \left(\frac{k_B T}{h}\right)^2 \frac{u^2}{e^u - 1} \quad \left(\because u = \frac{h\nu}{k_B T}\right) \\ &= \frac{k_B^3 T^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \Gamma(3)\zeta(3) \quad \left(\because \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty du \frac{u^{s-1}}{e^u - 1}\right) \\ &= \frac{2\zeta(3)k_B^3 T^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \quad (\because \Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N})) \end{aligned} \quad (12)$$

光子の数密度は温度の3乗に比例します。 $T = 2.725 \text{ K}$ を代入すると現在の光子密度 $n_{\gamma 0} = 411 \text{ cm}^{-3}$ が分かり、式(10)に代入すると、

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} = 6.01 \times 10^{-12} \quad (13)$$

$$n_B = 1.23 \times 10^{-2} T^3 \text{ m}^{-3} \quad (14)$$

が得られます。ここで、ゼータ関数の値 $\zeta(3) = 1.202057\dots$ を用いました。式(14)を式(9)に代入して X について解くと、

$$X = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 1.50 \times 10^{-24} T^{3/2} \exp\left(\frac{1.58 \times 10^5}{T}\right)}} \quad (15)$$

となり、電離度を温度の関数として表現することができます。

1.1.2 実効的 2 準位モデル

1.1.1 では基底状態と電離状態との平衡である電離平衡を仮定しました. ところが, 実際には電離度が小さくなってくると再結合の反応が遅くなり, 平衡状態に比べて電離度の減少は遅くなります. 電子が電離状態から直接基底状態へと再結合すると, 放出される光子は束縛エネルギーの 13.6eV を超えており, すぐに近くの別の水素原子を電離させてしまい, 実質的に水素原子の数は変わりません. そこで, 電子が $n = 2$ の励起状態へ遷移した後に基底状態へと遷移することを考えます. $n = 2$ としたのは, $n > 2$ からの基底状態への遷移の場合には, 先の理由と同様に放出される光子が別の水素原子を基底状態から $n = 2$ の励起状態へと励起させてしまうからです. ここで, 基底状態と平衡状態にある主量子数 n , 角運動量 l の水素原子の数密度は以下の式で表されます^{*3}.

$$n_{nl} = (2l + 1)n_{1s} \exp\left(\frac{E_n - E_1}{k_B T}\right) \quad (16)$$

$l = 0, 1, 2, \dots$ は s, p, d, \dots 軌道と対応します. まずは, 基底状態と $n = 2$ の励起状態が平衡であると仮定すると,

$$n_{2s} = n_{1s} \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right), \quad n_{2p} = 3n_{1s} \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right) = 3n_{2s} \quad (17)$$

と表せます. $n = 2$ の束縛エネルギーは $E_2 = 3.4 \text{ eV}$ です. 次に, $n = 2$ への再結合 $p + e^- \longleftrightarrow H_{2s} + \gamma$ ^{*4}において, 電離度の時間変化を考えます. 電子の数密度の時間変化を考えると, 宇宙膨張による減少の効果も考慮する必要があります. そこで, 数密度にスケール因子 $a(t)$ の 3 乗を掛けた, 電子数 $n_e a^3$ の時間微分を考えます. こうすることで, 再結合と再電離の効果のみを表せます. このときの電子数密度の時間変化は,

$$\begin{aligned} a^{-3} \frac{d}{dt} (n_e a^3) &= -\alpha n_e n_p + \beta n_{2s} \\ &= -\alpha n_e^2 + \beta n_{2s} \end{aligned} \quad (18)$$

となります. 第 1 項は再結合を表し, 電子と陽子の数密度に比例します. 第 2 項は再電離を表し, $2s$ 状態の水素原子の数密度に比例します. 比例係数 α, β はそれぞれ温度のみに依存します. 詳細釣り合い^{*5}の考え方をを用いて, 式 (18) の左辺を 0 にすると,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{n_e n_p}{n_{2s}} = \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_2}{k_B T}\right) \quad (19)$$

2 つ目の等号ではサハの式 (7) と式 (17) を用いました. 式 (18) を電離度 X を用いて書き直します.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{n_e}{n_p + n_{1s}} \right) &= -\alpha \frac{n_e n_p}{n_p + n_{1s}} + \beta \frac{n_{2s}}{n_p + n_{1s}} \\ \frac{dX}{dt} &= -\alpha \left[(n_p + n_{1s}) X^2 - \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_1}{k_B T}\right) (1 - X) \right] \\ \frac{dX}{dT} &= \frac{\alpha}{HT} \left[(n_p + n_{1s}) X^2 - \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_1}{k_B T}\right) (1 - X) \right] \\ &= \frac{\alpha}{HT} \left[0.75 n_B X^2 - \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_1}{k_B T}\right) (1 - X) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

1 行目は式 (18) の両辺を $(n_p + n_{1s})$ で割り, $(n_p + n_{1s}) a^3$ が定数であることを利用して微分の中に入れました. 2 行目は式 (8)(19) を, 3 行目は時間微分を温度微分に置き換えるため, $d/dt = -HT d/dT$ ^{*6}を用いています. 式 (20) において温度に依存するのは, n_B, α, H です. n_B に関しては, 式 (14) を利用します. α は, $n \leq 2$ の準位が平衡の

^{*3} n の値が非常に大きな励起状態に対しては使えません [2].

^{*4} $n_{2p} = 3n_{2s}$ と表せるので, $2s$ のみを考えています [1].

^{*5} 熱平衡における, ある過程とその逆の過程の起こる頻度は等しいという原理です. これにより, 反応の係数比が平衡の時を考えて求めることができるというもので, 平衡でない反応を考える時によく使われる考え方です.

^{*6} $T \propto a^{-1}$ より, $H = \dot{a}/a = -\dot{T}/T$

時の $n = 1$ 以外の準位から $n = 2$ への遷移率をすべて足した係数で, Case B の再結合係数と呼びます. Daniel G. Hummer の数値計算 [3] を踏まえ, 今考えている $10^3 \sim 10^4$ オーダーの温度ではよく近似できる式 [1] が,

$$\alpha = 10^{-19} \frac{4.309(T/10^4\text{K})^{-0.6166}}{1 + 0.6703(T/10^4\text{K})^{0.5300}} \text{m}^3\text{s}^{-1} \quad (21)$$

です. 最後にハッブル宇宙膨張率 H は,

$$H(T) = 7.204 \times 10^{-19} T^{3/2} \sqrt{0.14 + 1.534 \times 10^{-5} T} \text{Ts}^{-1} \quad (22)$$

で与えられます [1]. 以上より, 式 (14)(21)(22) を式 (20) に代入して解くことで, 電離度 X が温度 T の関数として求まります. このように, 基底状態と電離状態が平衡ではなく, その他の準位間は平衡であるとするモデルを, **実効的 2 準位モデル** といいます.

1.1.3 実効的 3 準位モデル

実効的 2 準位モデルにおいては基底状態と $n = 2$ の状態が平衡であると仮定しました. しかし, 電離度が下がり, 電子の数密度が下がってくると再結合の反応率が宇宙膨張率より大きくなり*7, 平衡状態を保てなくなります. そこで, 基底状態と電離状態と $n = 2$ の励起状態以外は平衡状態であるとする**実効的 3 準位モデル**を考えます. $n = 2$ の状態では遷移の仕方は 2 種類あり, $2p \rightarrow 1s + \gamma$ のライマン α 遷移と $2s \rightarrow 1s + \gamma + \gamma$ の 2 光子遷移があります. 本来, 2 光子遷移は禁制遷移とも呼ばれ, ライマン α 遷移に比べて起こる確率が低い遷移です. ところが, ライマン α 遷移で生じた光子 (ライマン α 光子) は, すぐに別の $1s$ 状態の水素原子を $2p$ 状態へ励起させてしまうので実質的に電離が行われていないこととなります. ただ, ライマン α 光子が宇宙論的赤方偏移を受けてエネルギーが小さくなると励起ができなくなり, 実質的に電離が行われたことになるので, 本来のライマン α 遷移が起こる確率とライマン α 光子が別の水素原子の励起に使われず宇宙論的赤方偏移を受ける確率をかけた確率を考える必要があります. この場合には正味の水素原子の形成に関わるライマン α 遷移の確率も小さくなるので, 2 光子遷移も考える必要が出てきます. 以上を考慮すると, 電離状態からの遷移による $n = 2$ の状態の水素原子数の増加と基底状態への遷移による $n = 2$ の状態の水素原子数の減少の釣り合いの式は,

$$\begin{aligned} \alpha n_e^2 - \beta n_{2s} &= \Gamma_{2s} n_{2s} + \Gamma_{2p} P n_{2p} - \varepsilon n_{1s} \\ &= (\Gamma_{2s} + 3\Gamma_{2p} P) n_{2s} - \varepsilon n_{1s} \end{aligned} \quad (23)$$

ここで, $\Gamma_{2p}, P, \Gamma_{2s}, \varepsilon$ はそれぞれライマン α 遷移の確率, ライマン α 光子が他の水素原子を励起せずに宇宙論的赤方偏移を受ける脱出確率, 2 光子遷移の確率, ライマン α 遷移を除いた $n = 1 \rightarrow 2$ の遷移率です. 詳細釣り合いを考えると, 平衡状態の時, 式 (23) の両辺は 0 になるので,

$$\frac{n_{2s}}{n_{1s}} = \frac{\varepsilon}{\Gamma_{2s} + 3\Gamma_{2p} P} \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right) \quad (24)$$

平衡状態でない時は, 式 (23)(24) より,

$$\begin{aligned} n_{2s} &= \frac{\alpha n_e^2 + \varepsilon n_{1s}}{\Gamma_{2s} + 3\Gamma_{2p} P + \beta} \\ &= \frac{1}{\Gamma_{2s} + 3\Gamma_{2p} P + \beta} \left[\alpha n_e^2 + (\Gamma_{2s} + 3\Gamma_{2p} P) n_{1s} \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

式 (25) を式 (18) に代入して,

$$\begin{aligned} a^{-3} \frac{d}{dt} (n_e a^3) &= -\alpha n_e^2 + \beta n_{2s} \\ &= \frac{\Gamma_{2s} + 3\Gamma_{2p} P}{\Gamma_{2s} + 3\Gamma_{2p} P + \beta} \left[-\alpha n_e^2 + \beta n_{1s} \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

*7 詳細は 1.2.1 で述べています.

式 (24) を式 (9) と同様に電離度 X の温度微分の式に直すと,

$$\frac{dX}{dT} = \frac{C\alpha}{HT} \left[0.75n_B X^2 - \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_1}{k_B T}\right) (1-X) \right] \quad (27)$$

$$C \equiv \frac{\Gamma_{2s} + 3\Gamma_{2p}P}{\Gamma_{2s} + 3\Gamma_{2p}P + \beta} \quad (28)$$

$C < 1$ より, $n = 1, 2$ 間の平衡を仮定する 2 準位モデルに比べて, 平衡を仮定しない 3 準位モデルの方が電離度の減少が小さくなっていることが分かります. それでは式 (28) に出てくるそれぞれの確率を計算してみましょう. まず, Γ_{2p}, Γ_{2s} は計算で与えられており,

$$\Gamma_{2p} = 4.699 \times 10^8 \text{ s}^{-1}, \quad \Gamma_{2s} = 8.22458 \text{ s}^{-1} \quad (29)$$

という数値を取ります [2]. 先ほど述べたように, 2 光子遷移の確率はライマン α 遷移の確率よりも 10^8 倍も小さくなっていることが分かります. 次に, ライマン α 光子の脱出確率を求めます. この確率は一般に,

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega p(\omega) \exp\left[-\int_t^{\infty} dt' n_{1s}(t') c\sigma\left(\omega \frac{a(t)}{a(t')}\right)\right] \quad (30)$$

と表せます [2]. ここで, $p(\omega)d\omega$ はライマン α 遷移で放出された光が $\hbar\omega \sim \hbar(\omega + d\omega)$ にある確率で規格化条件 $\int p(\omega)d\omega$ を満たします. $\sigma(\omega)$ は $1s \rightarrow 2p$ の励起の反応断面積であり, 変数 $\omega a(t)/a(t')$ は時刻 t での角周波数になるようにしています. ブライト・ウィグナーの公式*8

$$\sigma(n \rightarrow n'; E) = \frac{\pi(2j_R + 1)}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \frac{\Gamma_n \Gamma_{n'}}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4} \quad (31)$$

において, s_1, s_2, j_R には, 光子のスピン $s_1 = 1, 2p$ 状態のスピン $s_2 = 1/2$ と軌道角運動量 $l = 1$, 光子と $2p$ 状態を合わせた共鳴状態の全角運動量 $j_R = s_1 + s_2 + l = 5/2$ を代入します. また, ライマン α 光子の平均波数 $k_\alpha = (B_1 - B_2)/\hbar c$ と共鳴角周波数 $\omega_\alpha = ck_\alpha$ を用い, エネルギー, 共鳴幅を \hbar で割ってそれぞれ ω, Γ_{2p} に変換すると, 反応断面積は次のように表せます.

$$\sigma(\omega) = \frac{3}{2} \frac{2\pi^2 \Gamma_{2p}}{k_\alpha^2} p(\omega) \quad (32)$$

$$p(\omega) = \frac{\Gamma_{2p}}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_\alpha)^2 + \Gamma_{2p}^2/4} \quad (33)$$

式 (32)(33) を式 (30) に代入して, 積分計算をします. ここで, 再結合が行われる時間は宇宙年齢に比べて十分短いので $n_{1s}(t') = n_{1s}(t)$ とし, 宇宙膨張率も $H(t) = H(t')$ とします. このとき,

$$\begin{aligned} H(t) = H(t') &= \frac{\dot{a}(t')}{a(t')} \sim \frac{a(t') - a(t)}{a(t')(t' - t)} \\ \therefore \frac{a(t)}{a(t')} &= 1 - H(t)(t' - t) \end{aligned} \quad (34)$$

となるので, 式 (30) において変数変換

$$\omega \frac{a(t)}{a(t')} = \{1 - H(t)(t' - t)\}\omega = \omega' \quad (35)$$

*8 導出は省略します. 詳細は [4] を参照してください.

を行うと,

$$\begin{aligned}
P(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega p(\omega) \exp \left[-\frac{3\pi^2 \Gamma_{2p} n_{1s}(t) c}{k_{\alpha}^2} \int_{\omega}^{-\infty} \left(-\frac{d\omega'}{\omega H(t)} \right) p(\omega') \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega p(\omega) \exp \left[-\frac{3\pi^2 \Gamma_{2p} n_{1s}(t) c}{\omega_{\alpha} k_{\alpha}^2 H(t)} \int_{-\infty}^{\omega} d\omega' p(\omega') \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} du \exp [-x(u(\omega) - u(-\infty))] \left(x = \frac{3\pi^2 \Gamma_{2p} n_{1s}(t)}{k_{\alpha}^3 H(t)}, du = p(\omega) d\omega \right) \\
&= \left[\frac{\exp [-x(u(\omega) - u(-\infty))]}{-x} \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{1 - e^{-x}}{x}, \quad \left(\because u(\infty) - u(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega p(\omega) = 1 \right)
\end{aligned} \tag{36}$$

まとめると,

$$P(t) = F \left(\frac{3\pi^2 \Gamma_{2p} n_{1s}(t)}{k_{\alpha}^3 H(t)} \right), \quad F(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} \tag{37}$$

が得られました. 考えたい温度の $T < 6000 \text{ K}$ では, $x > 10$ となるので指数関数部分は十分小さくなって無視することができ [2],

$$P = \frac{k_{\alpha}^3 H}{3\pi^2 \Gamma_{2p} n_{1s}} = \frac{8\pi H}{3\lambda_{\alpha}^3 \Gamma_{2p} n_{1s}}, \quad \lambda_{\alpha} = 1215.682 \times 10^{-10} \text{ m} \tag{38}$$

となります. λ_{α} はライマン α 光子の波長です. ここで, 式 (8)(14) より,

$$n_{1s} = 0.75 n_B (1 - X) = 9.23 \times 10^{-3} (1 - X) T^3 \text{ m}^{-3} \tag{39}$$

です. 以上より, 式 (19)(21)(22)(28)(29)(38)(39) を実効的 3 準位モデルの電離度の式 (27) に代入して解くことができます.

電離平衡, 実効的 2 準位モデル, 実効的 3 準位モデルにおいて計算した電離度のグラフは図 1 のようになります.

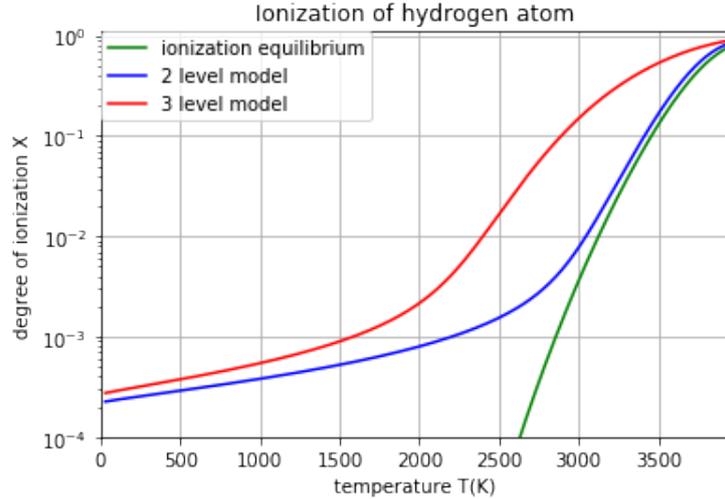


図 1 水素原子の再結合における電離度の温度変化のグラフ. 横軸は温度 $T[\text{K}]$, 縦軸は電離度 X を対数表示で表しています. 電離平衡 (15), 実効的 2 準位モデル (20), 実効的 3 準位モデル (27) に基づいた電離度の温度変化をそれぞれ, 緑線, 青線, 赤線で示しています. 実効的 2 準位モデル, 実効的 3 準位モデルの微分方程式は 4 次のルンゲ・クッタ法を用いて解いています.

電離平衡と実効的 2 準位モデルは約 3000K までの挙動は一致していますが, さらに温度が下がると実効的 2 準位モデルの方が電離度の減少が弱くなっています. これは電離度の減少に伴って, 再結合反応の平均自由時間がハッブル時間を超えてしまい, 反応が遅くなるからです. 実効的 3 準位モデルは実効的 2 準位モデルよりも再結合がさらに遅

れていることが分かります。より正確な電離度を求めたい場合は、1.1 の冒頭で等しいと仮定した光子とバリオンとの温度が異なるとして計算したり、扱う準位を増やした 300 準位モデル [5] を考えたりすることもできます。300 準位モデルは実効的 3 準位モデルと比べて、温度が 2000 K 以下では電離度が 10% ほど小さくなりますが、それ以上の温度ではよく一致しており、3 準位までの反応が電離度の変化の大部分を担っているといえます。ここで重要なことは、一気に多くの準位で計算を始めずに、まずは 2 準位、次に 3 準位と少しずつ考慮することを増やして計算を進めることで、どの準位の反応が大きな役割を果たしているかが理解できたということにあります。

1.2 宇宙の晴れ上がりの時刻

1.1 で水素原子の形成過程を考え、電離度が時間とともにどう変化するかを見てきました。この節では、電離度から宇宙の晴れ上がりの時刻を求める方法について述べます。

1.2.1 ガモフの基準

ガモフの基準とは、宇宙年齢の指標となるハッブル時間 H^{-1} と反応が起こる平均時間を表す反応率の逆数 Γ^{-1} が等しくなるときに脱結合が起こるとする、目安のことです。光子の脱結合の場合には、反応としてトムソン散乱*9を考えると、反応率の逆数は光子が電子に散乱されてから次に散乱されるまでにかかる時間、**平均自由時間**で表されます。

$$\Gamma^{-1} = (\sigma_{\tau} n_e c)^{-1} \quad (40)$$

$\sigma_{\tau} = 6.652 \times 10^{-29} \text{ m}^2$ はトムソン散乱断面積です。ガモフの基準から、ハッブル時間と平均自由時間の比をとり、式 (14)(22) を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{H}{\sigma_{\tau} n_e c} &= \frac{H}{0.75 n_B X \sigma_{\tau} c} \\ &= \frac{7.204 \times 10^{-19} T^{3/2} \sqrt{0.14 + 1.534 \times 10^{-5} T}}{1.84 \times 10^{-22} T^3 X} \end{aligned} \quad (41)$$

1.1 で求めた電離度を用いることで式 (41) が 1 と等しくなる温度が分かります。温度と時間の関係ですが、今考えている物質優勢期の宇宙でのハッブル宇宙膨張率は、

$$H(t) = \frac{2}{3t} \quad (42)$$

と表せるので*10、式 (22) と比較して、温度から時間に変換することができます。電離平衡、実効的 2 準位モデル、実効的 3 準位モデルにおいてそれぞれ、 H と $\sigma_{\tau} n_e c$ の比を数値計算したのが図 2 です。ガモフの基準を示す直線と他の曲線との交点から温度を求め、時刻に変換したのが表 1 です。

表 1 ガモフの基準に基づいた宇宙の晴れ上がりの温度と時刻。

	電離平衡	実効的 2 準位モデル	実効的 3 準位モデル
温度 (K)	3121	3047	2459
時刻 (万年)	33.8	35.2	50.2

1.2.2 最終散乱時刻

ガモフの基準は近似としてはよく成り立っていますが、より正確に晴れ上がりの時刻を求めるために、光子が最後に電子と散乱する確率が最大となる時刻を**最終散乱時刻**と定義して、宇宙の晴れ上がりの時刻とします。さらに、**光学的厚さ**を平均自由時間の逆数を時間で積分した無次元量

$$\tau(t) \equiv \int_t^{t_0} dt c \sigma_{\tau} n_e(t) \quad (43)$$

*9 電荷を持った自由粒子による光子の散乱で、散乱前後で光子の波長が変わらない弾性散乱です。

*10 スケール因子が $a(t) \propto t^{2/3}$ と書けるアインシュタイン-ド・ジッター宇宙と呼ばれるモデルで、フリードマン方程式の解の 1 つです [6].

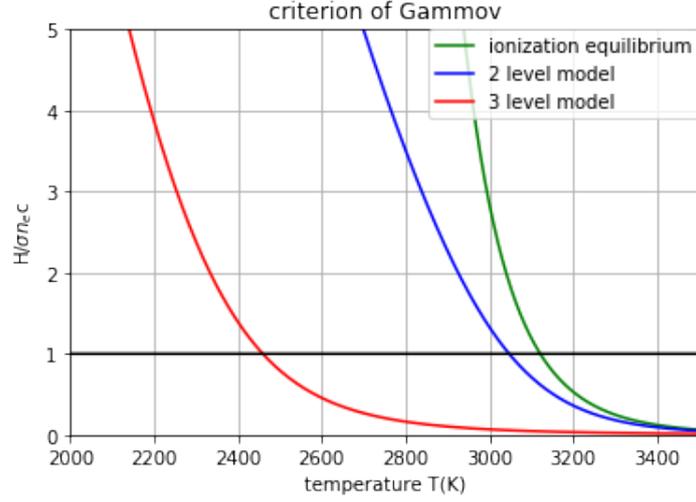


図2 ハッブル時間と平均自由時間の比のグラフ. 横軸は温度 T [K], 縦軸はハッブル時間と平均自由時間の比 $H/\sigma_\tau n_e c$ を表しています. 電離平衡 (15), 実効的 2 準位モデル (20), 実効的 3 準位モデル (27) に基づいた式 (41) の数値計算の結果をそれぞれ, 緑線, 青線, 赤線で示しています. 黒線はハッブル時間と平均自由時間が等しくなるガモフの基準を示しています.

で定義します. このとき, 時刻 t の光子が現在の時刻に至るまでに少なくとももう一度, 電子に散乱される確率を表す不透明度 $\mathcal{O}(t)$ は,

$$\mathcal{O}(t) = 1 - \exp[-\tau(t)] = 1 - \exp\left[-\int_{t(T)}^{t_0} dt c\sigma_\tau n_e(t)\right] \quad (44)$$

と書くことができます. 変数を時間から温度に変換しておきます.

$$\mathcal{O}(T) = 1 - \exp\left[-c\sigma_\tau \int_{2.725}^T \frac{n_e(T')dT'}{H(T')T'}\right] \quad (45)$$

光子が最後に散乱した時の温度が T から $T - dT$ である確率を考えます. 全体の確率 1 から, 最後に散乱した時の温度が T より高い確率 $1 - \mathcal{O}(T)$ と最後に散乱した時の温度が $T - dT$ より低い確率 $\mathcal{O}(T - dT)$ を除いて,

$$\begin{aligned} 1 - (1 - \mathcal{O}(T)) - \mathcal{O}(T - dT) &= \mathcal{O}'(T)dT \\ &= \frac{c\sigma_\tau n_e(T)}{H(T)T} \exp\left[-c\sigma_\tau \int_{2.725}^T \frac{n_e(T')dT'}{H(T')T'}\right] dT \\ &= \frac{c\sigma_\tau 0.75n_B X(T)}{H(T)T} \exp\left[-c\sigma_\tau \int_{2.725}^T \frac{0.75n_B X(T')dT'}{H(T')T'}\right] dT \\ &= \frac{1.84 \times 10^{-22} T^2 X(T)}{H(T)} \exp\left[-\int_{2.725}^T \frac{1.84 \times 10^{-22} T'^2 X(T')dT'}{H(T')} \right] dT \quad (46) \end{aligned}$$

となります. 確率 $\mathcal{O}'(T)$ が最大になる温度を求めると, その時の時刻が最終散乱時刻となります. 式 (46) にハッブル宇宙膨張率の式 (22) と電離平衡, 実効的 2 準位モデル, 実効的 3 準位モデルから得られる電子数密度を代入して, 数値解を求めます. 式 (46) の確率を数値計算した結果が図 3 です. また, 確率が最大になる温度とその時刻を示しているのが表 2 になります. ガモフの基準を用いた場合とオーダーでは同じ程度となっています. この章で目指していた結論としては, 実効的 3 準位モデルにおいて不透明度を用いて数値計算を行った結果, 宇宙の晴れ上がりが起きたのは, 温度 2937 K で時刻 37.5 万年の時であるといえます.

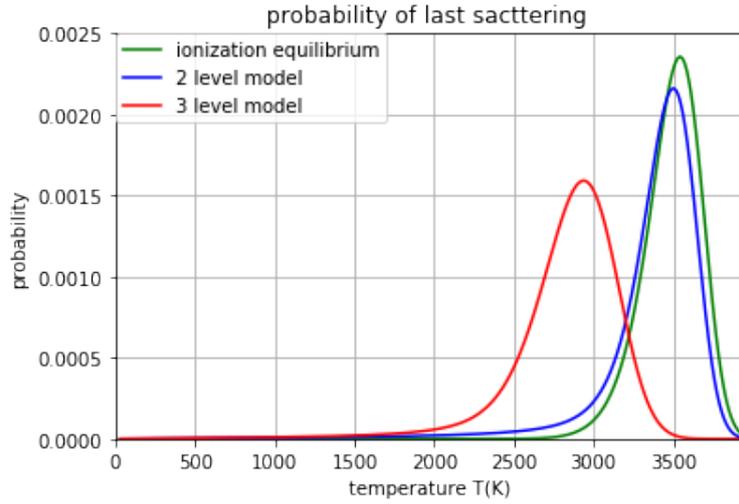


図3 光子が最後に散乱した時の温度が T から $T - dT$ である確率のグラフ。横軸は温度 T [K], 縦軸は光子が最後に散乱した時の温度が T から $T - dT$ である確率を表しています。電離平衡 (15), 実効的 2 準位モデル (20), 実効的 3 準位モデル (27) に基づいた式 (46) の数値計算の結果をそれぞれ、緑線, 青線, 赤線で示しています。

表2 不透明度を用いた宇宙の晴れ上がりの温度と時刻。

	電離平衡	実効的 2 準位モデル	実効的 3 準位モデル
温度 (K)	3541	3499	2937
時刻 (万年)	27.2	27.8	37.5

2 重力場による温度異方性

冒頭で CMB はほぼ等方的であると述べましたが, 実際には温度分布が天球上の方向によってわずかに異なります。これを温度異方性と呼びます。温度異方性が生じる原因はいくつかあります^{*11}が, ここでは重力場に起因する異方性を扱います。この章では $c = 1$ とする単位系を用いることとします。

2.1 温度異方性

温度異方性は天球上の方向に依存するので, 球面調和関数を用いて表現します。球座標での単位ベクトルを $\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ として, 天球上の平均温度を,

$$\bar{T} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} T(\hat{n}) \quad (47)$$

と定義すると, \hat{n} 方向の CMB の温度と平均温度との差 $\Delta T(\hat{n})$ は,

$$\Delta T(\hat{n}) = T(\hat{n}) - \bar{T} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_l^m(\hat{n}) \quad (48)$$

^{*11} 観測者の運動による光のドップラー効果や CMB 光子が銀河団を通過する際に高温のプラズマに散乱されてエネルギー分布が変化するスニャエフ・ゼルドビッチ (SZ) 効果があります。ドップラー効果や SZ 効果については他の班員が書いてくれた記事を読むと面白いです!

と展開できます。球面調和関数 $Y_l^m(\hat{n})$ は、

$$Y_l^m(\hat{n}) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} P_l^m(x) &= (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \\ &= (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d}{dx^m} \left(\frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2-1)^l] \right) \end{aligned} \quad (50)$$

と定義します。ここで、 $P_l^m(x)$ はルジャンドル陪多項式、 $P_l(x)$ はルジャンドル多項式です。ここでは、簡単に $m=0$ の軸対称の場合について考えてみます。このとき、式 (48) は、

$$\Delta T(\hat{n}) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{l0} P_l(\cos\theta) \quad (51)$$

となります。このとき、式 (51) を全天で積分すると、

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \Delta T(\hat{n}) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a_{l0} P_l(\cos\theta) d\cos\theta \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \delta_{l0} a_{l0} \\ &= a_{l0} = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

2行目の等号ではルジャンドル多項式の規格化条件

$$\int_{-1}^1 \frac{d\cos\theta}{2} P_l(\cos\theta) = \delta_{l0} \quad (53)$$

を、最後の等号では平均温度の定義 (47) を用いました。つまり、 $l=0$ は温度異方性のない、等方的な成分を表しています。また、 $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$ 、 $P_2(\cos\theta) = (3\cos^2\theta - 1)/2$ であり、 θ 依存性^{*12}から $l=1$ が双極の異方性、 $l=2$ が四重極異方性であることが分かります。 $m=0$ の特別な場合を考えてきましたが、一般の場合にも l が大きければより細かい温度異方性を表すことになります。このように、温度異方性を球面調和関数で展開することで角度依存性が見やすくなり、観測量の定量にも役に立ちます^{*13}。

2.2 一般相対論

この節では、次の節で用いる一般相対論の簡単な導入を行います。詳細について勉強したい場合は [8][9]などを参考にするといいでしょう。一般相対論は等価原理と一般相対性原理の2つを指導原理としています。局所的な領域では重力加速度と物体の加速度が区別できないとするのが等価原理です。一般相対性原理は、任意の座標系において物理法則が同じであるとします。この2つの原理をもとにした古典的な重力場の理論が一般相対論です。

4次元時空の座標を $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$ とします。ギリシャ文字は $0 \sim 3$ 、アルファベットは $1 \sim 3$ を走ることにします。無限小だけ離れた2点間の距離、線素を、

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (54)$$

と表します。 $g_{\mu\nu}$ は計量テンソルと呼ばれる、線素の性質を決める量です。式 (54) において、上下で同じ添字が現れる際は和をとるとする、**アインシュタインの規約**という記法を用いています。重力場がない慣性系 (ミンコフスキー時空) における線素は、

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (55)$$

*12 温度異方性は、 $l=1$ では、 $\theta=0$ で最大、 $\theta=\pi$ で最小となります。 $l=2$ では、 $\theta=0, \pi$ で最大、 $\theta=\pi/2$ で最小となります。

*13 温度異方性の観測量としては、その大きさを表すパワースペクトルという量があります。詳細は [1] をご覧ください。

となります。 $\eta_{\mu\nu}$ はミンコフキー計量で、 $ds^2 = 0$ は光の軌跡となります。重力場が存在する一般的な座標では線素は式 (54) のようになりますが、等価原理から時空の任意の点の近傍では座標変換によって慣性系 (局所慣性系) (55) へと移ることができます。

一般に、物理量は座標変換に対する変換性からスカラー、ベクトル、テンソルに分けられます。ある座標 x^μ から別の座標 \tilde{x}^μ への変換でスカラーは、

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x) \quad (56)$$

と変換されます。線素 ds^2 はスカラーです。次に、ベクトルの変換性を考えます。座標と同じ変換

$$\tilde{A}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \quad (57)$$

をする量を反変ベクトルといい、添字は上に書きます。座標基底と同じ変換

$$\tilde{A}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} A_\nu \quad (58)$$

をする量を共変ベクトルといい、添字は下に書きます。 dx^μ は反変ベクトルで、偏微分 $\partial/\partial x^\mu = \partial_\mu$ は共変ベクトルです。最後にテンソルはベクトルの積と同じ変換をする量です。

$$\tilde{A}^{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta} A^{\alpha\beta} \quad (59)$$

$$\tilde{A}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} A_{\alpha\beta} \quad (60)$$

$$\tilde{A}^\mu{}_\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} A^\alpha{}_\beta \quad (61)$$

上から2階の反変テンソル、共変テンソル、混合テンソルであり、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は2階の共変テンソルです。スカラーは0階のテンソル、ベクトルは1階のテンソルになります。

一般相対性原理によると、物理法則は任意の座標変換に対して共変な方程式で表されなくてはなりません。そこで、座標変換をした際の反変ベクトルの偏微分の変換性を考えてみます。

$$\begin{aligned} \tilde{A}^\mu{}_{;\nu} &\equiv \tilde{\partial}_\nu \tilde{A}^\mu = \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \partial_\beta \left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha \right) \\ &= \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha{}_{;\beta} + \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} A^\alpha \end{aligned} \quad (62)$$

第2項が出てくることで、反変ベクトルの偏微分はテンソルとしての変換をしません。そこで、偏微分の代わりに共変微分

$$\nabla_\nu A^\mu = A^\mu{}_{;\nu} \equiv A^\mu{}_{;\nu} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} A^\lambda \quad (63)$$

を導入すると、2階混合テンソルとして変換することが確かめられます (計算して確認してみましょう)。ここで $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ はクリストッフエル記号と呼ばれ、局所慣性系の存在を要請すると、

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \quad (64)$$

と表されます。共変ベクトルの共変微分は、

$$\nabla_\nu A_\mu = A_{\mu;\nu} \equiv A_{\mu;\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} A_\lambda \quad (65)$$

で定義します。

座標 x^μ における時間 t は座標変換に対して不変ではありません。そこで、固有時間 τ を次のように定義します。

$$d\tau^2 = -ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (66)$$

ds^2 はスカラーなので、座標変換に対して不変です。したがって、観測者の基準系の時間 t ではなくて物体の固有時間 τ を用いることにします。それでは、重力以外の力を受けない粒子の運動方程式、測地線方程式を求めていきます。まず作用 S を

$$S \equiv \int L d\tau = \int g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau \quad (67)$$

と定義して、Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} = 0 \quad (68)$$

に代入すると (\dot{x}^λ は x^λ の τ による微分を表します),

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} [g_{\mu\nu} (\delta_\lambda^\mu \dot{x}^\nu + \dot{x}^\mu \delta_\lambda^\nu)] - g_{\mu\nu, \lambda} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0 \\ \frac{d}{d\tau} (g_{\lambda\nu} \dot{x}^\nu + g_{\mu\lambda} \dot{x}^\mu) - g_{\mu\nu, \lambda} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0 \\ 2g_{\alpha\lambda} \ddot{x}^\alpha + (g_{\lambda\nu, \mu} + g_{\lambda\mu, \nu} - g_{\mu\nu, \lambda}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0 \\ \ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\nu, \mu} + g_{\lambda\mu, \nu} - g_{\mu\nu, \lambda}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0 \\ \therefore \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (69)$$

最終的に得られた式 (69) が測地線方程式です。

2.3 光子のエネルギー変化

この節では、測地線方程式 (69) を用いて光子のエネルギー変化を求めます。まず、ニュートンゲージと呼ばれる座標系を導入します [1].

$$ds^2 = -\exp(2\Phi) dt^2 + a^2(t) \exp(-2\Psi) [\exp(D)]_{ij} dx^i dx^j \quad (70)$$

この座標系では計量は,

$$g_{00} = -\exp(2\Phi), \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = a^2 \exp(-2\Psi) [\exp(D)]_{ij} \quad (71)$$

となっています。対称行列 $g_{\mu\nu}$ の独立成分は 10 個ありますが³, 4 つの自由度が座標変換に使われ、スカラー型ゆがみ (Φ, Ψ), ベクトル型ゆがみ G_i , テンソル型ゆがみ D_{ij} のそれぞれに対して 2 つの自由度が使われます。ベクトル型のゆがみは時間とともに減衰するのでここでは除いています。また、 Φ, Ψ, D_{ij} は 1 より十分小さいとします。

ゆがみの変数について、 Φ はニュートンの重力ポテンシャル、 Ψ は空間曲率のゆらぎ、 D_{ij} は重力波の偏光テンソルを表します。 Φ は空間の任意の 2 点間の距離を等方的に、 D_{ij} は非等方的に変えます。重力波として平面波

$$h_{ij} = D_{ij} \exp\{ik_a x^a\} \quad (72)$$

を考えます。 k_a は波数ベクトルです。3 × 3 対称行列 D_{ij} の独立成分は 6 個ですが、前述のように真の自由度は 2 個です。そのために課される条件式は,

$$h^i{}_i = 0 \quad (73)$$

$$\partial^i h_{ij} \equiv h_{ij}{}^{;i} = 0 \rightarrow k^i D_{ij} = 0 \quad (74)$$

式 (74) には、式 (72) を代入しました。平面波の進行方向が z 方向の場合には,

$$D_{11} + D_{22} = 0, \quad D_{3i} = 0 \quad (75)$$

となるので D_{ij} の行列表示は,

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (76)$$

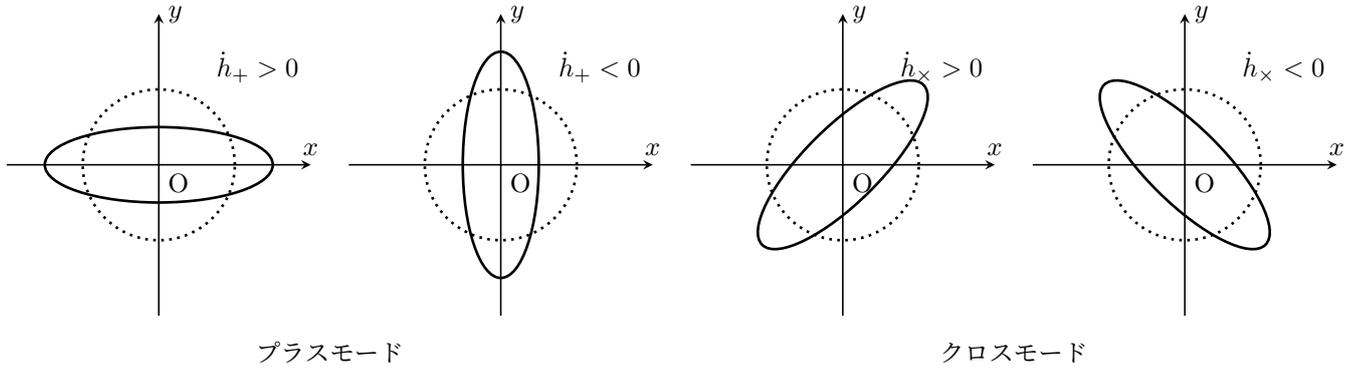


図4 重力波の偏光モード. 点線は重力波が通過する前の質点の位置を表し, 実線は z 軸方向に重力波が通過した後の質点の位置を表しています.

と書くことができます. h_+ , h_\times に由来するそれぞれの偏光はプラスモード, クロスモードと呼ばれています.

ここで, 光子の四元運動量を, 光子の軌跡に沿った座標 u を用いて次のように定義します.

$$p^\lambda = \frac{dx^\lambda}{du} \quad (77)$$

$$\mathbf{p}^2 = g_{ij} p^i p^j \quad (78)$$

式 (77)(78) を用いて測地線方程式 (69) を書き換えます. ここで, 測地線方程式 (69) で用いている固有時間 τ は光子のような質量をもたない粒子については $d\tau = 0$ となり, 用いることができません. したがってパラメータとして τ の代わりに u を用います.

$$\begin{aligned} \frac{dt}{du} \frac{dp^\lambda}{dt} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda p^\mu p^\nu &= 0 \\ \frac{dp^\lambda}{dt} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{p^\mu p^\nu}{p^0} &= 0 \end{aligned} \quad (79)$$

光子の軌跡は $ds^2 = 0$ であるので, 式 (78) を用いて,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu &= -\exp(2\Phi) p_0^2 + g_{ij} p^i p^j = 0 \\ p &= p_0 \exp(\Phi) \end{aligned} \quad (80)$$

また, 光子の運動量方向の単位ベクトル γ^i は計量から,

$$\gamma^i = a \exp(-\Psi) \frac{p^i}{p} \quad (81)$$

となります. 以上より, 測地線方程式 (79) で $\lambda = 0$ として,

$$\begin{aligned} \frac{dp^0}{dt} &= -\Gamma_{00}^0 \frac{p^0 p^0}{p^0} - \Gamma_{0i}^0 \frac{p^0 p^i}{p^0} - \Gamma_{ij}^0 \frac{p^i p^j}{p^0} \\ \frac{d}{dt}(p \exp(-\Phi)) &= -\dot{\Phi} p \exp(-\Phi) - \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} p^i - \exp(-\Phi) \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} - \dot{\Psi} \right) \frac{g_{ij} p^i p^j}{p} + \frac{a^2}{2} \exp(-2\Psi) \dot{D}_{ij} \frac{p^i p^j}{p} \right] \\ \exp(-\Phi) \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} p^i - \exp(-\Phi) \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} - \dot{\Psi} \right) p + \frac{a^2}{2} \exp(-2\Psi) \dot{D}_{ij} \frac{p^i p^j}{p} \right] \\ \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} &= -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} a \exp(\Phi) \frac{p^i}{p} - \left(\frac{\dot{a}}{a} - \dot{\Psi} \right) - \frac{1}{2} \dot{D}_{ij} \left[a \exp(-\Psi) \frac{p^i}{p} \right] \left[a \exp(-\Psi) \frac{p^j}{p} \right] \\ \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} &= -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \gamma^i - \frac{\dot{a}}{a} + \dot{\Psi} - \frac{1}{2} \dot{D}_{ij} \gamma^i \gamma^j \end{aligned} \quad (82)$$

を得ます。ドット (·) は時間 t での偏微分を表します。2 行目では計量 (71) を用いて計算したクリストッフエル記号の値を代入しています*14。4 行目では両辺に $\exp(\Phi)/p$ をかけています。最後の行では、式 (81) で光子の運動量方向ベクトルを用いて書いていますが、 Φ, Ψ, D_{ij} の 1 次までで考えています。式 (82) を t で積分するため、 Φ の t による全微分を考えると、

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= \dot{\Phi} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \\ &= \dot{\Phi} + \frac{p^i}{p^0} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \\ &= \dot{\Phi} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} a \exp(\Phi) \frac{p^i}{p} \\ &= \dot{\Phi} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \gamma^i\end{aligned}\quad (83)$$

式 (82) に代入して、最終散乱時刻 t_L から現在の時刻 t_0 にかけて t で積分すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{a} \frac{da}{dt} &= -\frac{d\Phi}{dt} \dot{\Phi} + \dot{\Psi} - \frac{1}{2} \dot{D}_{ij} \gamma^i \gamma^j \\ \ln(ap)(t_0) &= \ln(ap)(t_L) + \Phi(t_L) - \Phi(t_0) + \int_{t_L}^{t_0} (\dot{\Phi} + \dot{\Psi}) dt - \int_{t_L}^{t_0} \frac{1}{2} \dot{D}_{ij} \gamma^i \gamma^j dt\end{aligned}\quad (84)$$

光子のエネルギー変化は光子の温度の変化になるので、 $p \sim \bar{T} + \Delta T$ 、また、平均温度は $a(t)$ のマイナス 1 乗に比例して減少するので、

$$ap \sim \frac{\bar{T} + \Delta T}{\bar{T}} = 1 + \frac{\Delta T}{\bar{T}} \sim \exp\left(\frac{\Delta T}{\bar{T}}\right) \quad \left(\because \frac{\Delta T}{\bar{T}} \ll 1\right)\quad (85)$$

となるので、式 (84) は、

$$\frac{\Delta T(\hat{n})}{\bar{T}_0} = \frac{\delta T(t_L, \hat{n}r_L)}{\bar{T}(t_L)} + \Phi(t_L, \hat{n}r_L) - \Phi(t_0, 0) + \int_{t_L}^{t_0} (\dot{\Phi} + \dot{\Psi})(t, \hat{n}r) dt - \int_{t_L}^{t_0} \frac{1}{2} \dot{D}_{ij}(t, \hat{n}r_L) \gamma^i \gamma^j dt\quad (86)$$

となります。式 (86) において、左辺の温度異方性は、右辺の第 1 項と第 2, 3 項と第 4, 5 項で表されています。第 1 項は、最終散乱面に存在する温度揺らぎです。第 2, 3 項は、最終散乱面と観測位置における重力ポテンシャルの差による重力赤方偏移の効果を表し、**ザックス・ヴォルフエ (SW) 効果**と呼ばれます。第 4, 5 項は、時空の歪みを示す変数 Φ, Ψ, D_{ij} の時間変動がもたらす重力赤方偏移の効果を表し、**積分ザックス・ヴォルフエ (ISW) 効果**と呼ばれます。

2.4 ISW 効果

ISW 効果について、もう少し詳しく見ていきます。式 (86) の第 4 項はスカラー型のゆがみによる温度異方性です。光子が重力ポテンシャルの谷を通過することを考えます。この時、重力場に時間変動がなければ、谷に落ちて重力赤方偏移によってエネルギーを得ますが、谷から出る際に同じだけのエネルギーを重力赤方偏移によって失います。重力場に時間変動がある場合、例えば谷を通過中に重力ポテンシャルが弱まったとすると、谷から出る際に失うエネルギー

*14 $g_{0i} = 0$ を利用して 0 になる項は省いて計算しています。また、 D_{ij} については 1 次までとっています。

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} g^{0\rho} (g_{\rho 0,0} + g_{\rho 0,0} - g_{00,\rho}) = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,0} = \frac{1}{2} 2\dot{\Phi} g^{00} g_{00} = \dot{\Phi} \\ \Gamma_{0i}^0 &= \frac{1}{2} g^{0\rho} (g_{\rho 0,i} + g_{\rho i,0} - g_{0i,\rho}) = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,i} = \frac{1}{2} 2 \frac{d\Phi}{dx^i} g^{00} g_{00} = \frac{d\Phi}{dx^i} \\ \Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2} g^{0\rho} (g_{\rho i,j} + g_{\rho j,i} - g_{ij,\rho}) = \frac{1}{2} g^{00} (-g_{ij,0}) \\ &= -\frac{1}{2} (-\exp(-2\Phi)) \frac{d}{dt} [a^2 \exp(-2\Psi) [\exp(D)]_{ij}] \\ &= \frac{1}{2} \exp(-2\Phi) \left[2 \frac{\dot{a}}{a} g_{ij} - 2 \dot{\Psi} g_{ij} + a^2 \exp(-2\Psi) \dot{D}_{ij} \right] \\ &= \exp(-2\Phi) \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} - \dot{\Psi} \right) g_{ij} + \frac{a^2}{2} \exp(-2\Psi) \dot{D}_{ij} \right]\end{aligned}$$

が小さくなり、正味でエネルギーが増加することになります。これが、スカラー型の ISW 効果です。

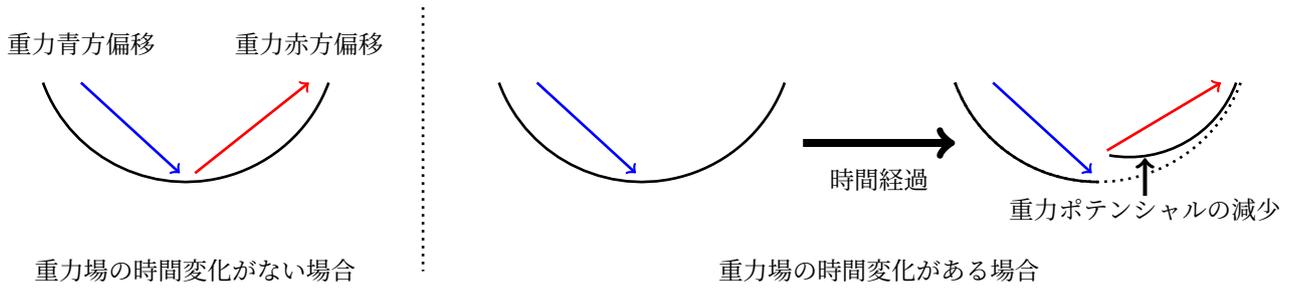


図5 光子の重力ポテンシャル谷の通過の様子を表しています。左の図は重力場の時間変化がない場合で、重力青方偏移で得るエネルギーと重力赤方偏移で失うエネルギーが等しいので、正味のエネルギー変化は0になります。中央と右の図は重力場の時間変動がある場合で、光子が谷底を通過する際に重力ポテンシャルが減少した状況を考えられています。この時、重力青方偏移で得るエネルギーより重力赤方偏移で失うエネルギーの方が小さくなるので、正味でエネルギーを得ることになります。

式 (86) の第5項はテンソル型のゆがみによる温度異方性です。 x^3 方向 (z 方向) に進む重力波について式 (76) を用いて被積分関数を具体的に書き表してみると、

$$-\frac{1}{2}\dot{D}_{ij}\gamma^i\gamma^j = -\frac{1}{2}\dot{h}_+[(\gamma^1)^2 - (\gamma^2)^2] - \dot{h}_\times\gamma^1\gamma^2 \quad (87)$$

となります。 h_+ が増加すると x 方向に空間が伸びて重力赤方偏移によりエネルギーを失い、 y 方向に空間が縮んで重力青方偏移によりエネルギーを得ます。 h_\times が増加すると xy 空間の 45° 方向に空間が伸びて重力赤方偏移によりエネルギーを失い、直交する方向に空間が縮んで重力青方偏移によりエネルギーを得ます。このように、重力波による温度異方性 (テンソル型 ISW 効果) は四重極の角度依存性を持っていることが大きな特徴となっています。

2.5 CMB の偏光と原始重力波

この節では少し話が変わって、CMB の偏光について述べていきます。光は横波であり、進行方向と垂直な方向に電場と磁場が振動しています。この振動の方向が規則的である状態を光の偏光といいます。宇宙は一様等方ですので、偏光は生じないように思いますが、実際はCMBは直線偏光をしています。この偏光を引き起こすのが、電子とCMB光子の散乱とCMBの温度分布の四重極異方性です。ここからは偏光がどのように生じるのかを考えていきます。電子の静止系において、電子が光子とトムソン散乱をしているとします。まずは、温度異方性がない場合です。この時は図6のように、 x, y 方向から無偏光の光子が電子に衝突しても、無偏光のままです。ところが四重極異方性がある場合は、図7のように x, y 方向から無偏光の光子が電子に衝突すると光子は偏光します。これは、 x 方向の冷たい光子と y 方向の熱い光子の存在により、散乱後は x 方向と y 方向で電場の振幅の大きさが異なるためです。

偏光には2つのモードがあり、偏光強度が変化する方向に対する偏光の向きが水平または垂直の時はEモード、偏光の向きが 45° の時はBモードといいます。偏光のBモードは、方位角依存性があるテンソル型のISW効果によって生じます。ただ、スカラー型のISW効果によって生じる偏光が重力レンズ効果によってBモードとなり得るので、テンソル型由来かスカラー型由来かの区別を目指した研究がなされています。また、初期宇宙が指数関数的な加速膨張をしたとする、現在最も有力な宇宙の進化モデルであるインフレーション理論は、原始重力波を予言しています。重力波のようなテンソル型ゆらぎはほぼスケール不変 (ゆらぎの大きさが波長によらず一定) であると推測されており、テンソル型由来のBモード偏光の発見がすなわち原始重力波の発見となり、インフレーション理論の決定的な証拠となるのです。

現在、LiteBIRDという衛星が原始重力波由来のBモード偏光の観測のため、2020年代後半の打ち上げを目指して開発中です。Bモード偏光は現在地上にある望遠鏡SPT、BICEP3などによっても観測が行われていますが、大気の影響を除き、全天での観測を行うことでより高い精度での観測を実現するためには衛星の打ち上げが必要になります。

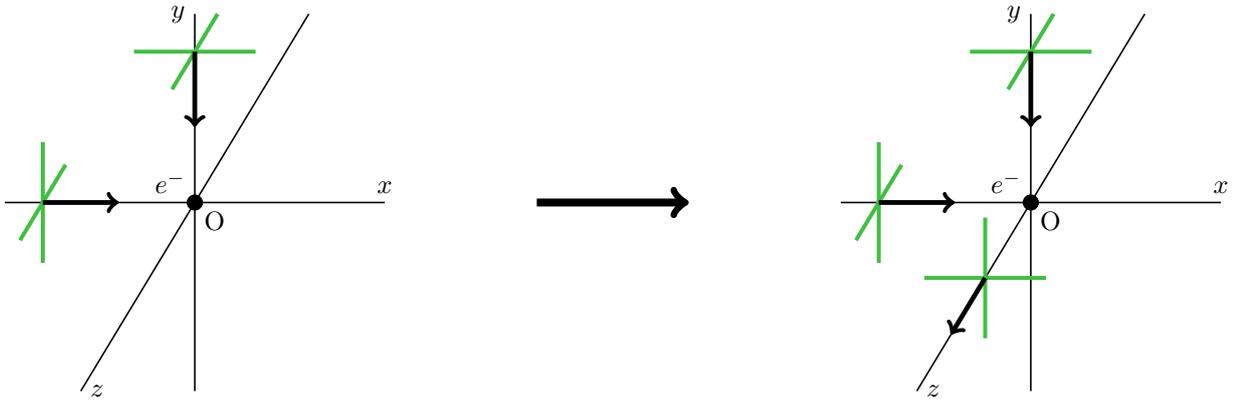


図6 温度異方性がない場合の電子の静止系における光子の散乱の様子。

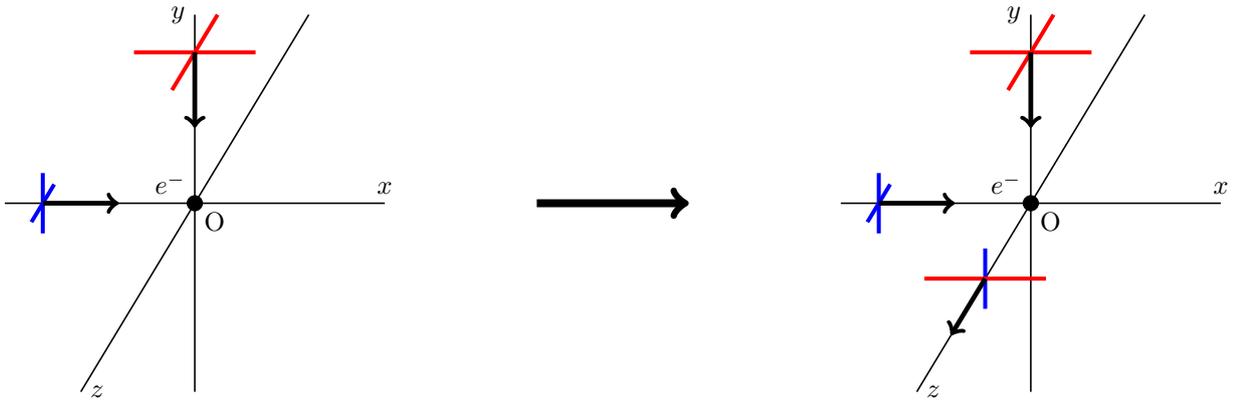


図7 四重極異方性がある場合の電子の静止系における光子の散乱の様子。

原始重力波の強さの指標として、テンソル型ゆらぎとスカラー型ゆらぎの振幅の2乗の比を表す**テンソル-スカラー比** r があります。LiteBIRD は、 r の誤差を 0.001 以下の精度で測定することを目標としており [10], $r > 0.001$ であれば LiteBIRD で原始重力波を発見できることとなります。原始重力波は CMB 研究がもたらし得る、宇宙の真理に迫るための1つの重要な手がかりです。このように豊富な情報が詰まった CMB というのはとても魅力的な研究対象であるといえるのではないのでしょうか。

参考文献

- [1] 小松英一郎, 『宇宙マイクロ波背景放射』, 日本評論社, 2019.
- [2] 小松英一郎, 『ワインバーグの宇宙論 (上)』, 日本評論社, 2013.
- [3] D. G. Hummer, “Total recombination and energy-loss coefficients for hydrogenic ions at low density for $10 \leq T_e/Z^2 \leq 10 \times 10^7$ K”, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 268, 109, 1994.
- [4] Steven Weinberg, 『The Quantum Theory of Fields Volume I: Foundations』, Cambridge University Press, 1995.
- [5] S. Seager, D. D. Sasselov, D. Scott, ”How exactly did the universe become neutral?”, Astrophysical Journal Supplement Series, 128, 407, 2000.
- [6] 高原文郎, 『宇宙物理学』 朝倉書店 2015.
- [7] 松原隆彦, 『宇宙論の物理 (上)』, 東京大学出版会, 2014.
- [8] 須藤靖, 『一般相対論入門 [改訂版]』, 日本評論社, 2019.
- [9] 江里口良治, 二間瀬敏史訳, 『シュッツ 相対論入門』, 丸善株式会社, 2010.
- [10] <https://litebird.isas.jaxa.jp>