

熱的スニヤエフ・ゼルドビッチ効果とハッブル定数の測定

Physics Lab. 2022

文責：手良脇大誠（宇宙班所属）

最終更新日:2022年5月15日

はじめに

この解説記事では、まず宇宙背景放射 (CMB) の熱的スニヤエフ・ゼルドビッチ効果と呼ばれる現象について説明し、その後、この効果と銀河団の X 線観測を合わせることによってハッブル定数が計算できることを見ていきます。ところで、宇宙で起きる現象は基本的に電磁波を使って観測することになります。そのため、光子の振る舞いや放射を考えることが重要です。主題はあくまで前述の内容にありますが、この記事では光子に関する素過程、具体的には逆コンプトン散乱や熱的制動放射の解説も詳しく書き記しています。その影響もあって、かなり数式が多めになっております。この数式部分については、読者として物理学科の学部3年生程度を想定しておりますが、扱っている事柄自体はシンプルなものですので、ご自身で「式を追う部分」と「そういうものと受け入れる部分」に適宜分けながら読んでいただければと思います。具体的な章立てですが、まず1章はCMBとは一体どのようなものであるのかを概略的に説明しています。2章では、CMB光子にとって重要となる素過程として光子と電子の相互作用（逆コンプトン散乱）を考え、光子のエネルギー分布関数が従うカンパニエーツ方程式という方程式を見ます。3章ではカンパニエーツ方程式を元に、CMBのスペクトルに歪みが生じる熱的スニヤエフ・ゼルドビッチ効果という現象の存在を明らかにします。最後の4章では、X線観測の重要な素過程として熱的制動放射について説明したのちに、ここまでの知識を総動員するとハッブル定数が求められるようになることを示します。正しい記述には拘ったつもりですが、筆者自身まだ浅学の身であるため、間違いが存在しないと断言することはできません。その点に注意していただき、必要であれば参考文献に挙げた資料を確認していただければと思います。

目次

1	CMB と銀河団	3
1.1	CMB とは	3
1.2	飛来する CMB 光子と銀河団	3
2	光子と電子の相互作用	4
2.1	逆コンプトン散乱	4
2.2	カンパニエーツ方程式	9
2.3	カンパニエーツ方程式の解	11
3	tSZ 効果	12
3.1	tSZ 効果の理論的説明	12
3.2	実際の観測	14
4	tSZ 効果を用いたハッブル定数の測定	14
4.1	熱的制動放射	15
4.2	ハッブル定数の計算法	20
4.3	実際の測定	26
5	参考文献	28

1 CMB と銀河団

1.1 CMB とは

CMB は、宇宙から等方的に（どの方向を見ても同様に）到来するマイクロ波のことです。英語の Cosmic Microwave Background Radiation の略であり、日本語では宇宙背景放射と呼ばれています。この CMB を観測すると、図 1 のような結果になります。

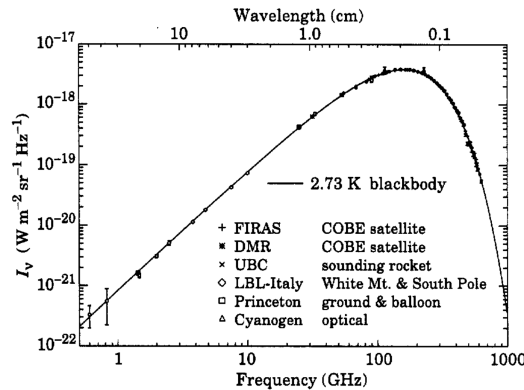


図 1 CMB の周波数と強度の関係。Smoot and Scott(2000) より引用。

この図から、CMB の観測結果はおよそ 2.73K の黒体放射のスペクトルと合致していることが読み取れます。このことは何を意味するのでしょうか。黒体放射のスペクトルが見られるということは、物質と光の熱平衡状態を見ているということです。しかし、現在の宇宙は物質の数密度が小さいため、相互作用の頻度が低く、熱平衡状態とは言えません。ここで、ビッグバン宇宙論を仮定すると、かつての宇宙は高温高密度の状態であり、熱平衡状態にあったと考えられます。つまり、CMB は現在でなくかつての宇宙が熱平衡状態にあったことを示しているのです。このことから、CMB はビッグバン宇宙論の重要な観測的証拠の一つになっています。

1.2 飛来する CMB 光子と銀河団

CMB 光子は、先述のように等方的に飛来します。しかし、宇宙には物質があるので、光子が地球へ飛来する途中でその影響を受けることがあります。そのような方向から飛来する CMB を観測すると、黒体放射の分布からはズレと考えられます。このような現象としては、スニヤエフ・ゼルドビッチ効果や（積分）ザックス・ヴォルフェ効果などがあります。スニヤエフ・ゼルドビッチ効果には、大きく熱的スニヤエフ・ゼルドビッチ効果と運動学的スニヤエフ・ゼルドビッチ効果という 2 種類がありますが、ここでは前者の熱的スニヤエフ・ゼルドビッチ効果 (Thermal Sunyaev-Zel'dovich effect, 以下 tSZ 効果) について見ていきます。

CMB 光子が銀河団に突入することを考えましょう。銀河団にはプラズマがあり、そこには電子が存在します。すると、飛来する CMB 光子は電子との相互作用によってそのエネルギーを変化させることになります。その結果、CMB 光子のエネルギー分布は図 1 のような黒体放射のスペクトルから歪むことになります。これが tSZ 効果の概略です。この議論から、tSZ 効果の理解には光子と電子の相互作用が重要であると分かります。次節以降では、この相互作用を具体的に計算することで、tSZ 効果の影響について詳しく調べていきます。

2 光子と電子の相互作用

この節では、まず光子と電子の散乱を考えることで、光子のエネルギー分布関数の従うカンパニエーツ方程式と呼ばれる微分方程式を導きます。尚、この計算は、『ワインバーグの宇宙論 (上)』に基づいて行います。その後、カンパニエーツ方程式の解について説明します。この節では、 $c = 1$ とする単位系を用います。

2.1 逆コンプトン散乱

2.1.1 1光子と1電子の散乱

まず、最も単純に光子一つと電子一つが散乱することを考えていきます。 z 軸方向に速度 v_e で動く電子を考え、実験室系での衝突前の電子の四元運動量を

$$p = (E_e, 0, 0, p_e) \quad E_e = \sqrt{m_e^2 + p_e^2} \quad (1)$$

とします。この電子にエネルギー ω を持つ光子が衝突するとし、その入射方向が極角 η 、方位角 ϕ であったとしましょう (図2左)。この時、光子の四元運動量は $\omega = |p|$ より

$$q = \omega(1, \sin \eta \cos \phi, \sin \eta \sin \phi, \cos \eta) \quad (2)$$

となります。同様に、衝突直後の光子のエネルギーを ω' 、運動方向の極角を η' 、方位角を ϕ' とすると、衝突後の光子の四元運動量は

$$q' = \omega'(1, \sin \eta' \cos \phi', \sin \eta' \sin \phi', \cos \eta') \quad (3)$$

と書けます。これらの量について、(衝突前の) 電子の静止系へと Lorentz 変換で移ることを考えましょう。 $\beta = v_e$ 、 $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ と書けば、

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (4)$$

を用いて、電子の静止系での光子の衝突前後の四元運動量は

$$Lq = k(1, \sin \alpha \cos \phi, \sin \alpha \sin \phi, \cos \alpha) \quad (5)$$

$$Lq' = k'(1, \sin \alpha' \cos \phi', \sin \alpha' \sin \phi', \cos \alpha') \quad (6)$$

と書けます。ここで、 α, α' はこの座標系での極角、 k, k' はそれぞれ衝突前後の光子のエネルギーを表しています。尚、電子の運動が z 方向であるので、Lorentz 収縮は z 方向のみで起きますから、方位角については座標変換による変更を受けません (下図右)。

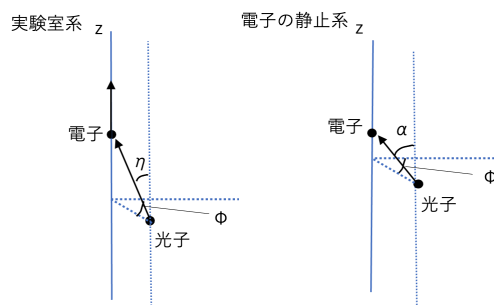


図2 Lorentz 変換.

(2)(4) 式を (5) 式に代入すると,

$$k = \gamma\omega(1 - \beta \cos \eta) \quad (7)$$

$$k \cos \alpha = \omega\gamma(\cos \eta - \beta) \quad (8)$$

$$\omega \sin \eta = k \sin \alpha \quad (9)$$

となります. (7) と (8) の比から,

$$\cos \alpha = \frac{\cos \eta - \beta}{1 - \beta \cos \eta} \quad (10)$$

を得ます. 尚, (9) は (7)(8) と独立ではないので考える必要はありません. 実際, (7)(10) より

$$k^2 \sin^2 \alpha = k^2 \left[1 - \left(\frac{\cos \eta - \beta}{1 - \beta \cos \eta} \right)^2 \right]^2 = k^2(1 - \beta^2) \frac{\sin^2 \eta}{(1 - \beta \cos \eta)^2} = \omega^2 \sin^2 \eta \quad (11)$$

となって (9) が得られます. また, (10) より

$$1 + \beta \cos \alpha = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta \cos \eta} \quad (12)$$

です. 衝突後についても全く同様にして,

$$k' = \gamma\omega'(1 - \beta \cos \eta') \quad (13)$$

$$1 + \beta \cos \alpha' = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta \cos \eta'} \quad (14)$$

を得ます.

ところで, 下図のようなコンプトン散乱を考えましょう.

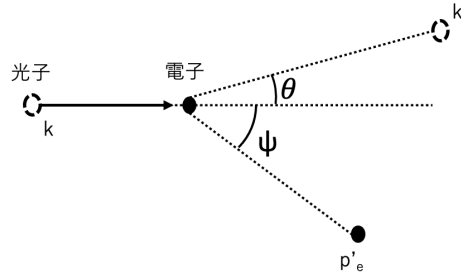


図3 コンプトン散乱

ここで, p'_e は衝突後の電子の運動量です. この時, エネルギー保存則と運動量保存則から,

$$k + m_e = k' + \sqrt{m_e^2 + p_e'^2} \quad (15)$$

$$k' \sin \theta = p'_e \sin \psi \quad (16)$$

$$k = k' \cos \theta + p'_e \cos \psi \quad (17)$$

です. (16)(17) より ψ を消すと

$$p_e'^2 = k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \theta \quad (18)$$

となるので, これを (15) に代入して p'_e を消去すれば,

$$\begin{aligned} (k - k' + m_e)^2 &= m_e^2 + k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \theta \\ \therefore k' &= \frac{k}{1 + \frac{k}{m_e}(1 - \cos \theta)} \end{aligned} \quad (19)$$

となります. ここでの θ は, (衝突前の) 電子の静止系から見た散乱前後での光子の運動量ベクトルの成す角度です. よって, これらの運動量についての内積を, θ を用いる方法と (5)(6) の運動量成分を用いる方法で計算することで,

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \sin\alpha\cos\phi\sin\alpha'\cos\phi' + \sin\alpha\sin\phi\sin\alpha'\sin\phi' + \cos\alpha\cos\alpha' \\ &= \cos\alpha\cos\alpha' + \cos(\phi-\phi')\sin\alpha\sin\alpha'\end{aligned}\quad (20)$$

という関係が得られます.

さて, 将来的には光子のエネルギー分布の振る舞いを知りたいのでしたから, コンプトン散乱による光子の実験室系でのエネルギー変化について考えましょう. これまでの結果から,

$$\begin{aligned}\frac{\omega' - \omega}{\omega} &= \frac{\frac{k'}{1-\beta\cos\eta'} - \frac{k}{1-\beta\cos\eta}}{\frac{k}{1-\beta\cos\eta}} \quad (\because (7)(13)) \\ &= \frac{1-\beta\cos\eta}{1-\beta\cos\eta'} \frac{1}{1+\frac{k}{m_e}(1-\cos\theta)} - 1 \quad (\because (19)) \\ &= \frac{1+\beta\cos\alpha'}{1+\beta\cos\alpha} \frac{1}{1+\frac{k}{m_e}(1-\cos\theta)} - 1 \quad (\because (12)(14))\end{aligned}\quad (21)$$

こうして光子のエネルギー変化を全て電子の静止系の量で書けたこととなります. ここで, $\beta = v_e \ll 1$ (非相対論的) かつ $k \ll m_e$ であるような状況を考えましょう. (2つ目の条件は, 光子の波長について $\lambda \gg 2.4\text{pm}$ であることを表しており, 多くの状況では成立していると考えられます.) $\frac{k}{m_e}$ の 1次と β の 0次の積の項, 及び $\frac{k}{m_e}$ の 0次と β の任意次数までの積の項を残せば,

$$\begin{aligned}\frac{\omega' - \omega}{\omega} &\simeq -\frac{k}{m_e}(1-\cos\theta) + \frac{1+\beta\cos\alpha'}{1+\beta\cos\alpha} - 1 \\ &= -\frac{k}{m_e}(1-\cos\theta) + \frac{\beta(\cos\alpha' - \cos\alpha)}{1+\beta\cos\alpha}\end{aligned}\quad (22)$$

となります.

2.1.2 光子の平均的なエネルギー変化

ここまで, 一つの光子の散乱についてのエネルギー変化を考えてきました. しかし, 実際には多くの光子と多くの電子が相互作用します. そのため, 光子の平均的な振る舞いが重要となります. ここでは, エネルギー変化の平均値を考えましょう. 量子電磁気学の計算によれば, コンプトン散乱の微分散乱断面積は

$$d\sigma = \frac{3\sigma_\tau}{16\pi}(1+\cos^2\theta)d(\cos\alpha')d\phi' \quad (23)$$

で与えられます. $\sigma_\tau = e^4/6\pi m_e^2$ はトムソン散乱断面積です. また, コンプトン散乱の全断面積は,

$$\begin{aligned}\sigma &= \int d\sigma = \frac{3\sigma_\tau}{16\pi} \int_{-1}^1 d(\cos\alpha') \int_0^{2\pi} d\phi'(1+\cos^2\theta) \\ &= \frac{3\sigma_\tau}{16\pi} \int_{-1}^1 d(\cos\alpha') \int_0^{2\pi} d\phi' [1+\cos^2\alpha\cos^2\alpha' + \cos^2(\phi-\phi')\sin^2\alpha\sin^2\alpha'] \quad (\because (20)) \\ &= \sigma_\tau\end{aligned}\quad (24)$$

であり, トムソン散乱断面積に等しいことがわかります. 今, 光子のエネルギー変化の期待値を考えましょう. そのためには, 各エネルギー変化について, その変化が起きる確率で重み付けする必要があります. この遷移確率は, $d\sigma$ 及び相対速度 u , そして $d\cos\eta$ に比例します. ここで, 四元運動量 p_i , エネルギー E_i , 質量 m_i を持つ二粒子 $i = 1, 2$ の相対速度 u は,

$$u \equiv \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2} \quad (25)$$

と定義されます。まず, (22) について散乱方向に関して平均を取ると,

$$\begin{aligned}
\langle \omega' - \omega \rangle &= \frac{1}{\sigma_\tau} \int (\omega' - \omega) d\sigma \\
&= \frac{3}{16\pi} \int_{-1}^1 d(\cos \alpha') \int_0^{2\pi} d\phi' (\omega' - \omega) (1 + \cos^2 \theta) \\
&= \frac{3\omega}{16\pi} \int_{-1}^1 d(\cos \alpha') \int_0^{2\pi} d\phi' \left[-\frac{k}{m_e} (1 - \cos \theta) (1 + \cos^2 \theta) + \frac{\beta(\cos \alpha' - \cos \alpha)}{1 + \beta \cos \alpha} (1 + \cos^2 \theta) \right] \quad (26)
\end{aligned}$$

よって (20) 式を用いれば積分が実行できます。 ϕ' の積分で残るのは $\cos(\phi' - \phi)$ の偶数乗の項のみであることなどに注意して,

$$\begin{aligned}
(\text{第一項}) &= -\frac{3k\omega}{16\pi m_e} \int_{-1}^1 d(\cos \alpha') \int_0^{2\pi} d\phi' (1 - \cos \alpha \cos \alpha' + \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha' + \cos^2(\phi - \phi') \sin^2 \alpha \sin^2 \alpha' \\
&\quad - \cos^3 \alpha \cos^3 \alpha' + 3 \cos^2(\phi - \phi') \sin^2 \alpha \sin^2 \alpha' \cos \alpha \cos \alpha') \\
&= -\frac{3k\omega}{16m_e} \int_{-1}^1 d(\cos \alpha') (2 - 2 \cos \alpha \cos \alpha' + 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha' + \sin^2 \alpha \sin^2 \alpha' \\
&\quad - 2 \cos^3 \alpha \cos^3 \alpha' + 3 \sin^2 \alpha \sin^2 \alpha' \cos \alpha \cos \alpha') \\
&= -\frac{k\omega}{m_e} \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{第二項}) &= \frac{3\beta\omega}{16(1 + \beta \cos \alpha)} \int_{-1}^1 d(\cos \alpha') (\cos \alpha' - \cos \alpha) \int_0^{2\pi} d\phi' [1 + \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha' + \cos^2(\phi - \phi') \sin^2 \alpha \sin^2 \alpha'] \\
&= \frac{3\beta\omega}{16(1 + \beta \cos \alpha)} \int_{-1}^1 d(\cos \alpha') (\cos \alpha' - \cos \alpha) [2 + 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha' + \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha')] \\
&= -\frac{3\beta\omega \cos \alpha}{16(1 + \beta \cos \alpha)} \int_{-1}^1 d(\cos \alpha') [2 + 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha' + \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha')] \\
&= -\frac{\beta\omega \cos \alpha}{1 + \beta \cos \alpha} \quad (28)
\end{aligned}$$

以上より,

$$\langle \omega' - \omega \rangle = -\frac{\beta\omega \cos \alpha}{1 + \beta \cos \alpha} - \frac{k\omega}{m_e} \quad (29)$$

となります。続いて, この結果の $ud \cos \eta$ の重み付け平均を取りましょう。今, $p_e = E_e \beta$ ですから, (1)(2)(12)(25) より, 実験系から見た光子と電子の相対速度は,

$$u = \frac{E_e \omega - p_e \omega \cos \eta}{E_e \omega} = 1 - \beta \cos \eta = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta \cos \alpha} \quad (30)$$

と計算できます。また, (12) より

$$d \cos \eta = \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta \cos \alpha)^2} d \cos \alpha \quad (31)$$

ですから,

$$\begin{aligned}
\langle \langle \omega' - \omega \rangle \rangle &= \frac{\int_{-1}^1 \langle \omega' - \omega \rangle u d \cos \eta}{\int_{-1}^1 u d \cos \eta} \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \langle \omega' - \omega \rangle u d \cos \eta \quad (\because u = 1 - d \cos \eta) \\
&= -\frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{\beta \cos \alpha}{1 + \beta \cos \alpha} + \frac{k}{m_e} \right) \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 + \beta \cos \alpha)^3} d \cos \alpha \quad (32)
\end{aligned}$$

この被積分関数について β の二次まで近似すると,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\beta \cos \alpha}{1 + \beta \cos \alpha} + \frac{k}{m_e} \right) \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 + \beta \cos \alpha)^3} &\simeq \left(\beta \cos \alpha (1 - \beta \cos \alpha) + \frac{k}{m_e} \right) (1 - 2\beta^2) (1 - \beta \cos \alpha + \beta^2 \cos^2 \alpha)^3 \\ &\simeq \left(\beta \cos \alpha (1 - \beta \cos \alpha) + \frac{k}{m_e} \right) (1 - 2\beta^2) (1 - 3\beta \cos \alpha + 6\beta^2 \cos^2 \alpha) \\ &\simeq \frac{k}{m_e} + \beta \cos \alpha \left(1 - \frac{3k}{m_e} \right) - \beta^2 \left(4 \cos^2 \alpha + \frac{k}{m_e} (2 - 6 \cos^2 \alpha) \right) \end{aligned} \quad (33)$$

よって, β の一次の項は積分で消え,

$$\frac{\langle \langle \omega' - \omega \rangle \rangle}{\omega} = -\frac{1}{2} \left(\frac{2k}{m_e} - \frac{8}{3} \beta^2 \right) = \frac{4}{3} \beta^2 - \frac{k}{m_e} \quad (34)$$

この計算では, k/m_e について一次まで, β の二次までをとり, k/m_e と β の積の項については落としていました. この近似の下では, (7) より

$$\frac{\omega}{m_e} = \frac{k}{m_e} \frac{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \beta \cos \eta} \simeq \frac{k}{m_e} \quad (35)$$

と書けるので,

$$\frac{\langle \langle \omega' - \omega \rangle \rangle}{\omega} = \frac{4}{3} \beta^2 - \frac{\omega}{m_e} \quad (36)$$

です.

続いて, エネルギー変化の二乗の平均値についても求めておきましょう. 今考えている精度の下では, (22) より

$$\frac{(\omega' - \omega)^2}{\omega^2} \simeq \beta^2 (\cos \alpha' - \cos \alpha)^2 \quad (37)$$

です. 例によって, これに $u d\sigma d \cos \eta$ の重み付けを行って平均を取ります. ここで, (37) が β^2 に比例する量であることから, 他の量については β についても k/m_e についても 0 次まで取れば十分で, (30)(31) より

$$u \simeq 1, \quad d \cos \eta \simeq d \cos \alpha \quad (38)$$

として計算すれば十分となります. よって,

$$\begin{aligned} \langle \langle (\omega' - \omega)^2 \rangle \rangle &= \frac{\int (\omega' - \omega)^2 d\sigma d \cos \alpha}{\sigma_\tau \int d \cos \alpha} \\ &= \frac{3\omega^2 \beta^2}{32\pi} \int_{-1}^1 d \cos \alpha \int_{-1}^1 d \cos \alpha' \int_0^{2\pi} d\phi' (\cos \alpha - \cos \alpha')^2 (1 + \cos^2 \theta) \\ &= \frac{3\omega^2 \beta^2}{32} \int_{-1}^1 d \cos \alpha \int_{-1}^1 d \cos \alpha' (\cos \alpha - \cos \alpha')^2 (2 + 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha' + \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha')) \quad (\because (20)) \\ &= \frac{2}{3} \beta^2 \omega^2 \end{aligned} \quad (39)$$

(36)(39) は共にある電子の速度 $\beta = v_e$ の下での値でした. 最後に, β^2 についても平均を取りましょう. 電子の速度は Maxwell-Boltzmann 分布に従うとするものとします. すると β の平均値は, 電子の温度を T_e として

$$\begin{aligned} \langle \beta^2 \rangle &= \frac{\int_0^\infty \beta^2 \exp\left(-\frac{m_e \beta^2}{2k_B T_e}\right) \beta^2 d\beta}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{m_e \beta^2}{2k_B T_e}\right) \beta^2 d\beta} \\ &= \frac{3k_B T_e}{m_e} \end{aligned} \quad (40)$$

と計算できます. よって, これを用いれば

$$\langle \langle \omega' - \omega \rangle \rangle = \frac{4k_B T_e}{m_e} \omega - \frac{\omega^2}{m_e} = \frac{\omega}{m_e} (4k_B T_e - \omega) \quad (41)$$

$$\langle \langle (\omega' - \omega)^2 \rangle \rangle = \frac{2k_B T_e}{m_e} \omega^2 \quad (42)$$

という結果に至ります。

ここで、(41) 式に注目しましょう。この式から、散乱前の光子のエネルギーが $4k_B T_e$ よりも低い時には、光子が散乱によってエネルギーを獲得することが読み取れます。このような散乱のことを逆コンプトン散乱と呼び、光子がエネルギーを失うコンプトン散乱と区別されます。先を見据えて、銀河団中の高温プラズマ (10^8K 程度) に存在する電子と CMB 光子の散乱に適用してみましょう。すると、このような電子に対して光子が逆コンプトン散乱を起こすのは、CMB 光子の振動数が $8 \times 10^9\text{GHz}$ 以下の時であり、図 1 を踏まえると CMB 光子の典型的な周波数では逆コンプトン散乱が起きるものと考えてよいと分かります。そのため、銀河団中を通過した CMB 光子の周波数-強度分布は、通過する以前と比べて高周波数側に歪んでいると期待されます。

2.2 カンパニエーツ方程式

前節を踏まえ、電子と相互作用する光子のエネルギー分布関数が従う方程式を導きましょう。エネルギーが $\omega \sim \omega + d\omega$ にある $N(\omega)d\omega$ 個の光子が非相対論的電子からなるガスと相互作用することを考えます。すると、光子の分布関数の変化率は以下の式で与えられます。 n_e は電子の数密度です。

$$\dot{n}(\omega)d\omega = n_e \int d\omega' n(\omega') R(\omega' \rightarrow \omega) d\omega (1 + N(\omega)) - n_e n(\omega) d\omega \int d\omega' R(\omega \rightarrow \omega') (1 + N(\omega')) \quad (43)$$

ここで、 $R(\omega \rightarrow \omega')d\omega'$ は $ud\sigma$ を電子の衝突前の速度 β で平均したもので、衝突によって光子のエネルギーが $\omega \sim \omega + d\omega \rightarrow \omega' \sim \omega' + d\omega'$ と移る過程の遷移率を表しており、 $\omega' - \omega \equiv \Delta$ を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) = \sigma_\tau \langle \langle \omega' - \omega \rangle \rangle \quad (44)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta^2 R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) = \sigma_\tau \langle \langle (\omega' - \omega)^2 \rangle \rangle \quad (45)$$

が成立します。また、 $N(\omega)$ は

$$N(\omega) = \frac{(2\pi\hbar)^3 n(\omega) d\omega}{8\pi\omega^2 d\omega} \quad (46)$$

であり、エネルギー ω を持つ光子の量子状態あたりの数を表しています。そして、 $1 + N(\omega)$ は光子が既に占有しているエネルギー状態に遷移する誘導放射を表しています。(43) 式に $(2\pi\hbar)^3/8\pi\omega^2$ をかけ、 ω' を Δ で書き換えると、次のようになります。

$$\begin{aligned} \dot{N}(\omega) = & \frac{n_e}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta (\omega - \Delta)^2 N(\omega - \Delta) R(\omega - \Delta \rightarrow \omega) (1 + N(\omega)) \\ & - n_e N(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) (1 + N(\omega + \Delta)) \end{aligned} \quad (47)$$

ここで (41) より、エネルギーの平均的な変化は $\frac{k_B T}{m_e}$, $\frac{\omega}{m_e}$ といった微小量ですから、遷移確率 $R(\omega \rightarrow \omega + \Delta)$ は $\Delta \approx 0$ にピークを持ちます。よって、

$$\begin{aligned} & (\omega - \Delta)^2 N(\omega - \Delta) R(\omega - \Delta \rightarrow \omega) \\ & = \omega^2 N(\omega) R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) - \Delta \frac{\partial(\omega^2 N(\omega) R(\omega \rightarrow \omega + \Delta))}{\partial \omega} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\omega^2 N(\omega) R(\omega \rightarrow \omega + \Delta))}{\partial \omega^2} \end{aligned} \quad (48)$$

$$N(\omega + \Delta) = N(\omega) + \Delta \frac{\partial N(\omega)}{\partial \omega} + \frac{1}{2} \Delta^2 \frac{\partial^2 N(\omega)}{\partial \omega^2} \quad (49)$$

と Δ^2 まで展開すると, (47) は Δ の 0 次の項が打ち消しあって,

$$\begin{aligned}
\dot{N}(\omega) &= -\frac{n_e}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta (1 + N(\omega)) \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 N(\omega) R(\omega \rightarrow \omega + \Delta)] \\
&\quad + \frac{n_e}{2\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta^2 (1 + N(\omega)) \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} [\omega^2 N(\omega) R(\omega \rightarrow \omega + \Delta)] \\
&\quad - n_e N(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta \frac{\partial N(\omega)}{\partial \omega} R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) - \frac{n_e}{2} N(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta^2 \frac{\partial^2 N(\omega)}{\partial \omega^2} R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) \\
&= -\frac{n_e}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 N(\omega) R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) (1 + N(\omega))] + \frac{n_e}{2\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta^2 \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} [\omega^2 N(\omega) R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) (1 + N(\omega))] \\
&\quad - \frac{n_e}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\omega^2 N(\omega) R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) \frac{\partial N(\omega)}{\partial \omega} \right] \tag{50}
\end{aligned}$$

最後の行の変形は, Δ の次数に注意して右辺から計算するとわかりやすいです. (50) の微分積分を入れ替え, 積分に影響しない部分を外に出すと,

$$\begin{aligned}
\dot{N}(\omega) &= -\frac{n_e}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\omega^2 N(\omega) (1 + N(\omega)) \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) \right] + \frac{n_e}{2\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \left[\omega^2 N(\omega) (1 + N(\omega)) \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta^2 R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) \right] \\
&\quad - \frac{n_e}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\omega^2 N(\omega) \frac{\partial N(\omega)}{\partial \omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta^2 R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) \right] \tag{51}
\end{aligned}$$

(44)(45) 及び (41)(42) を代入すれば, ω の満たす方程式

$$\begin{aligned}
\dot{N}(\omega) &= -\frac{n_e \sigma_\tau}{\omega^2 m_e} \frac{\partial}{\partial \omega} [N(\omega) (1 + N(\omega)) \omega^3 (4k_B T_e - \omega)] + \frac{n_e \sigma_\tau k_B T_e}{\omega^2 m_e} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} [\omega^4 N(\omega) (1 + N(\omega))] \\
&\quad - \frac{2n_e \sigma_\tau k_B T_e}{\omega^2 m_e} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\omega^4 N(\omega) \frac{\partial N(\omega)}{\partial \omega} \right] \tag{52}
\end{aligned}$$

を得ます. ここで,

$$\begin{aligned}
(\text{第一項}) &= \frac{n_e \sigma_\tau}{\omega^2 m_e} \frac{\partial}{\partial \omega} [N(\omega) (1 + N(\omega)) \omega^4] - \frac{4k_B T_e n_e \sigma_\tau}{\omega^2 m_e} \frac{\partial}{\partial \omega} [N(\omega) (1 + N(\omega)) \omega^3] \\
(\text{第二項}) &= \frac{n_e \sigma_\tau k_B T_e}{\omega^2 m_e} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[4\omega^3 N(\omega) (1 + N(\omega)) + \omega^4 \frac{\partial}{\partial \omega} N(\omega) (1 + N(\omega)) \right] \\
&= \frac{4k_B T_e n_e \sigma_\tau}{\omega^2 m_e} \frac{\partial}{\partial \omega} [N(\omega) (1 + N(\omega)) \omega^3] + \frac{n_e \sigma_\tau k_B T_e}{\omega^2 m_e} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\omega^4 \frac{\partial N(\omega)}{\partial \omega} \right] + \frac{2n_e \sigma_\tau k_B T_e}{\omega^2 m_e} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\omega^4 N(\omega) \frac{\partial N(\omega)}{\partial \omega} \right]
\end{aligned}$$

ですから, いくつかの項は打ち消し合い,

$$\dot{N}(t, \omega) = \frac{n_e \sigma_\tau k_B T_e}{\omega^2 m_e} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\omega^4 \frac{\partial N}{\partial \omega} \right] + \frac{n_e \sigma_\tau}{\omega^2 m_e} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^4 N(1 + N)] \tag{53}$$

となります. 左辺について時間依存性を明示的に書いておきました. これが我々の目標であったカンパニエーツ方程式と呼ばれる方程式です. $x = \omega/k_B T (T \neq T_e)$ と変換し, 反応率 $K_C = \frac{n_e \sigma_\tau k_B T_e}{m_e}$ を導入すると,

$$\begin{aligned}
\dot{N}(t, x) &= \frac{K_C}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \frac{\partial N}{\partial x} \right] + \frac{K_C T}{x^2 T_e} \frac{\partial}{\partial x} [x^4 N(1 + N)] \\
\therefore \dot{N}(t, x) &= \frac{K_C}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{T}{T_e} (N + N^2) \right) \right] \tag{54}
\end{aligned}$$

とも書けます.

ここまでは, 計算の簡便さのために $c = 1$ としてきましたが, 次節以降では再び Si 単位系に戻ります. この下では, (54) 式自体は変わらず, 反応率について

$$K_C = \frac{n_e \sigma_\tau k_B T_e}{m_e c} \tag{55}$$

とすればよいことになります.

2.3 カンパニエーツ方程式の解

カンパニエーツ方程式を銀河団に適用する前に、いくつかその解について調べておきましょう。

2.3.1 定常解

光子と電子が頻繁に相互作用しており、定常状態にあるような系を考えましょう。このような場合、光子と電子の温度は等しい ($T = T_e$) と考えられます。よって (54) 式は、 $\dot{N} = 0$ として

$$\frac{\partial N}{\partial x} + N + N^2 = \frac{C}{x^4} \quad (C \text{ は定数}) \quad (56)$$

ここで、 $x = 0$ でまともな振る舞いをする解を期待すると、 $C = 0$ とできて

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x} = -N - N^2 & \therefore \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) = x + \mu \quad (\mu \text{ は定数}) \\ \therefore N(x) &= \frac{1}{\exp(x + \mu) - 1} \end{aligned} \quad (57)$$

と計算できます。 $x = \frac{h\nu}{k_B T}$ でしたから、この関数はボース・アインシュタイン分布になっています。この帰結は、ボソンである光子が熱平衡状態にあることを鑑みると至って自然なことです。これで、カンパニエーツ方程式がボース・アインシュタイン分布を内包していることを確認できました。

2.3.2 近似解

カンパニエーツ方程式の $\frac{T}{T_e}(N + N^2)$ の部分の寄与が無視できる場合には、解析解を求めることができます。例えば銀河団の場合には $\frac{T}{T_e} \sim 10^{-8}$ 程度であるため、この近似が正当化されます。

扱う方程式は次のようになります。

$$\dot{N}(t, x) = K_C(t) \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^4 \frac{\partial N}{\partial x} \right) \quad (58)$$

ここで、 t を $y = \int_0^t K_C(t) dt$ と変数変換すると、 $\frac{dy}{dt} = K_C(t)$ で

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^4 \frac{\partial N}{\partial x} \right) = 4x \frac{\partial N}{\partial x} + x^2 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \quad (59)$$

となります。ここで、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \ln x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \ln x} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial \ln x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial (\ln x)^2} \quad (60)$$

を用いると、(59) は

$$\frac{\partial N}{\partial y} = 3 \frac{\partial N}{\partial \ln x} + \frac{\partial^2 N}{\partial (\ln x)^2} \quad (61)$$

と書き直せます。更に、 $\xi = 3y + \ln x$ を導入して、変数の組を $(x, y) \rightarrow (\xi, y)$ に変更すると、chain rule から

$$\frac{\partial}{\partial \ln x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \Big|_x = 3 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \Big|_\xi \quad (62)$$

これを (61) に代入すれば、扱う方程式は結局

$$\frac{\partial N(y, \xi)}{\partial y} = \frac{\partial^2 N(y, \xi)}{\partial \xi^2} \quad (63)$$

という拡散方程式に帰着します。フーリエ変換

$$N(y, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{N}(y, k) e^{ik\xi} dk \quad (64)$$

を代入すれば

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial y} = -k^2 \tilde{N} \quad \therefore \tilde{N}(y, k) = A(k) e^{-k^2 y} \quad (65)$$

と分かります. (64)(65) より

$$\tilde{N}(0, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ik\xi} dk \xrightarrow{\text{フーリエ変換}} A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} N(0, \xi') e^{-ik\xi'} d\xi' \quad (66)$$

ですから, 求める解は

$$\begin{aligned} N(y, \xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N(0, \xi') e^{-k^2 y + ik(\xi - \xi')} dk d\xi' \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} N(0, \xi') e^{-\frac{(\xi - \xi')^2}{4y}} d\xi' \end{aligned} \quad (67)$$

となります. ここで, 積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + ibx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad (a: \text{正の実数}, b: \text{実数}) \quad (68)$$

を用いました.

(67) 式の解釈を行いましょ. $y = \int_0^t K_C(t) dt$ は, t に代わって導入された新たな時間的変数, ξ はエネルギーに相当する量ですから, $N(0, \xi')$ は初期のエネルギー分布を表しています. ここで,

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi - \xi')^2}{4y}} d\xi' \equiv \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi' \rightarrow \xi) d\xi' = 1 \quad (69)$$

ですから, $P(\xi' \rightarrow \xi)$ は $\xi' \rightarrow \xi$ という遷移が生じる確率密度の関数になっていると解釈できます. これを用いると

$$N(y, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} N(0, \xi') P(\xi' \rightarrow \xi) d\xi' \quad (70)$$

と書けます. $P(\xi' \rightarrow \xi)$ は $\xi' = \xi$ でピークとなりますが, y が増大するほどに, すなわち時間が経過するほどにそのピークはなだらかになっていきます. これは, 光子と電子の相互作用がそれほど進まない段階では初期時刻の分布が強く残っているが, 相互作用が十分に行われると初期の影響は薄れ, 他のエネルギーから遷移してきた光子数が効いてくるという, 直感によく合う結果を表しています.

3 tSZ 効果

3.1 tSZ 効果の理論的説明

それでは, カンパニエーツ方程式を銀河団に適用することで, 光子のエネルギー分布の振る舞いがプランク分布からどのようにズレるのかを調べていきましょう. 先述のように, 銀河団においては 2.3.2 節でのような近似が成り立ちますから, 考えるべき方程式は (58) 式となります. ここでも, 時間的変数を $t \rightarrow y$ と書き換え, 次の式を考えることにします ((59) 式と同じ).

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^4 \frac{\partial N}{\partial x} \right) \quad (71)$$

2.3.2 節の一般解を用いても良いのですが, ここでは別の計算方法を紹介します.

まず, 銀河団の典型的なサイズと平均自由行程を比較しましょう. ここで各パラメータは, 典型的な銀河団の直径 $R \sim 10^{23} \text{m}$, プラズマの電子数密度 $n_e \sim 10^6 \text{m}^{-3}$, プラズマの温度 $k_B T_e \sim 10 \text{eV}$, そしてトムソン散乱断面積 $\sigma_\tau = 7 \times 10^{-29} \text{m}^2$, 電子質量 $m_e c^2 = 511 \text{keV}$ とします. すると, 平均自由行程 l は

$$l = \frac{1}{n_e \sigma_\tau} \sim 10^{25} \text{m} \quad (72)$$

ですから、銀河団のサイズと比べて二桁程度大きいことがわかります。また、銀河団の通過にかかる時間を $t_{cross} = R/c$ と書けば、銀河団を抜けた段階の y について

$$y = \int_0^{t_{cross}} \frac{\sigma_\tau n_e k_B T_e}{m_e c} dt \sim \frac{R k_B T_e}{l m_e c^2} \sim 10^{-4} \quad (73)$$

となります。つまり、銀河団は光学的に薄いと言え、飛来してきた CMB 光子が銀河団に散乱される回数はそれほど多くなりません、ということになります。このことを踏まえ、CMB 光子の銀河団通過では、(71) 式による時間発展を一度だけ考慮すれば十分ということになります。

時刻 $y = 0$ で入射した CMB 光子が時間にして y だけ経過後に銀河団を抜け出すとしましょう。この時、銀河団通過後の分布関数を $N(x)$ 、通過前のプランク分布を N_p と書けば、以上の議論と (71) から、

$$\frac{N(x) - N_p}{y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^4 \frac{\partial N_p}{\partial x} \right) \quad \therefore N(x) = N_p + \frac{y}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^4 \frac{\partial N_p}{\partial x} \right) \quad (74)$$

が成立します。プランク分布

$$N_p = \frac{1}{e^x - 1} \quad (75)$$

を用いれば、分布関数の変化は

$$\Delta N = \frac{y}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^4 \frac{\partial N_p}{\partial x} \right) = \frac{y x e^x}{(e^x - 1)^2} \left[x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right] \quad (76)$$

と計算できます。この変化こそが tSZ 効果に他なりません。

ここまでの議論を、放射強度に焼き直しましょう。すると、

$$I_p(x) = \frac{2h\nu^3}{c^2} N_p = \frac{2(k_B T)^3}{h^2 c^2} \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{2k_B T \nu^2}{c^2} \frac{x}{e^x - 1} \quad (77)$$

$$\Delta I(x) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \Delta N = \frac{2(k_B T)^3}{h^2 c^2} \frac{y x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} \left[x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right] \quad (78)$$

となります。この変化の様子を下図に示しておきました。

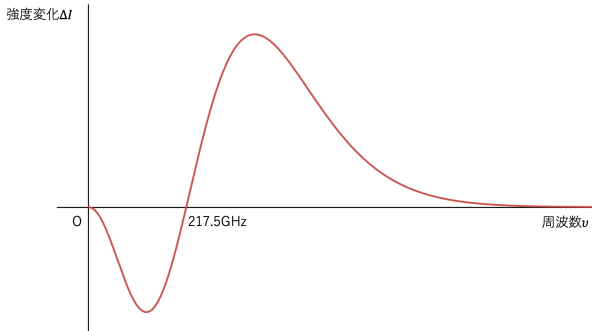


図4 tSZ 効果による強度変化と周波数の関係。

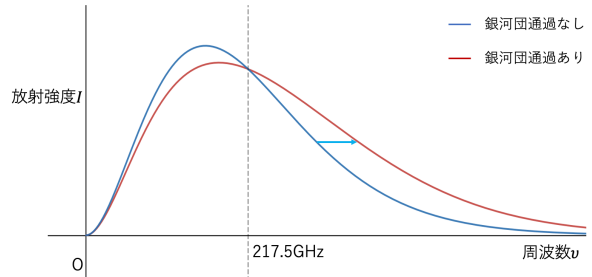


図5 tSZ 効果による強度分布の歪み (変化の度合いは実際よりも誇張してあります)。

すなわち、217.5GHz 以下の低エネルギー領域についてはその強度を弱め、一方で 217.5GHz 以上の高エネルギー領域では強度が強まるということです。全体として見れば光子の平均的なエネルギーは増加しているということになり、2.1 節での予測と一致しています。まとめると、tSZ 効果とは CMB 光子が銀河団を通過する際に高温プラズマ中の電子によって逆コンプトン散乱され、その放射強度分布が高エネルギー側に歪む現象である、ということです。

最後に、この変化が温度に換算してどれほどのものであるかを調べておきます。レイリー-ジーンズ極限 ($x \ll 1$) を考えると、この領域では $I_p \propto T$ ですから、

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta I}{I_p} = \frac{y x e^x}{e^x - 1} \left[x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right] \xrightarrow{x \rightarrow 0} -2y = -2 \int_0^{t_{cross}} \frac{\sigma_\tau n_e k_B T_e}{m_e c} dt \quad (79)$$

と書けます. 特に, (73) 式のような粗い評価を用いれば, 元の CMB の温度 2.7K を用いることで

$$\Delta T \sim -0.5\text{mK} \quad (80)$$

となり, 元の温度と比較するとこの影響が以下に小さいかがよくわかります.

3.2 実際の観測

実際の観測によっても tSZ 効果の存在は確認されています. 一例を下図に示します.

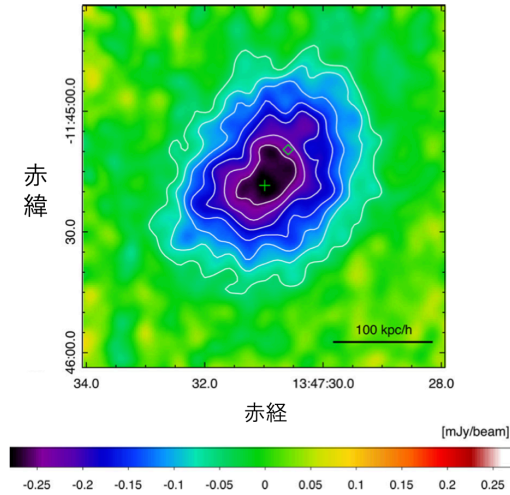


図6 銀河団 RX J1347.5 - 1145 についての tSZ 効果の輝度分布. 十字マーク部分が tSZ 効果の影響が最大になる位置を, 正方形マーク部分は X 線強度が最大となる位置を表しています. T. Kitayama et al.,(2016) より引用.

これは, 2016 年に ALMA 望遠鏡によって RX J1347.5 - 1145 という銀河団を 92GHz で観測した結果です. 理論の予測通り, この周波数での tSZ 効果は, 強度を減少させる方に働いていることが読み取れます. tSZ 効果を用いて銀河団を発見することもあります. それまでに未知であった銀河団を tSZ 効果によって 2009 年に初発見して以降, この方法による銀河団発見は今日ではもはや日常的な事柄になっています [16]. 銀河団を観測する方法としては, 後述のように電子の制動放射に伴う X 線を捉える方法も存在します. しかし, 後にも見るように, tSZ 効果による強度分布と X 線観測では電子密度や電子温度に対する依存性が全く異なっており, これらは異なる情報を示します. 実際図 6 において, tSZ 効果と X 線でのピークの位置が異なっていることがわかります. 一般に, X 線では電子の密集度合いに強く影響を受け一方で, tSZ 効果は高温ガスの発見に適しています [1],[17]. また, X 線の表面輝度が $(1+z)^{-4}$ (z :赤方偏移) に比例しており, 速く天体ほどに弱まる一方で, tSZ 効果にはそのような依存性はありません. このことから, tSZ 効果を用いる観測法は宇宙の広い範囲で適用することができる可能性があります. さらに, tSZ 効果のスペクトルの形状は特徴的であるため, 他の放射源の影響をあまり受けずに情報を引き出すことができるという強みもあります [17].

4 tSZ 効果を用いたハッブル定数の測定

ハッブル・ルメートルの法則から, 天体の後退速度は天体までの距離に比例することが知られています. この比例定数の現在の値のことをハッブル定数と呼びます. 本節では, tSZ 効果の応用例としてハッブル定数の測定について説明します. しかし, 実は tSZ 効果だけでは不十分で, 銀河団の X 線観測の結果と合わせることで初めてハッブル定数を求めることができます. そこで, この X 線観測に重要な物理過程である熱的制動放射についてまず説明し, その後ハッブル定数を計算する方法について述べます.

4.1 熱的制動放射

銀河団プラズマに存在する電子は、制動放射によって X 線を放出します。本節では、この熱的制動放射について見ていきます。尚、以下では cgs 単位系を使用することにします。

4.1.1 電荷の加速度運動

電子が非相対論的な加速度運動をする時、単位時間に放射するエネルギーは、ラーモアの公式

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2e^2 \mathbf{a}^2}{3c^3} \quad (81)$$

で与えられます。^{*1}この加速度のフーリエ変換を考えましょう。

$$\tilde{\mathbf{a}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (82)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{a}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (83)$$

ここで、フーリエ変換に関して

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \tilde{f}(\omega) \tilde{f}^*(\omega') e^{i(\omega-\omega')t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \tilde{f}(\omega) \tilde{f}^*(\omega') \delta(\omega - \omega') \quad \left(\because \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ikx} dk \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\tilde{f}(\omega)|^2 = \int_0^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega + \int_0^{\infty} |\tilde{f}(-\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (84)$$

また、 $f(t)$ が実数関数ならば

$$\tilde{f}^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \tilde{f}(-\omega) \quad (85)$$

ですから、(84) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2 \int_0^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (86)$$

となります。加速度ベクトルは実ベクトルですから、この議論を用いれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}^2(t) dt = 2 \int_0^{\infty} |\tilde{\mathbf{a}}(\omega)|^2 d\omega \quad (87)$$

となります。よって、(81) 式を積分すると、全放射エネルギー W について

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^2 \mathbf{a}^2}{3c^3} dt = \frac{4e^2}{3c^3} \int_0^{\infty} |\tilde{\mathbf{a}}(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \frac{dW}{d\omega} d\omega \quad (88)$$

よって、単位角周波数あたりの放射エネルギーは、

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{4e^2}{3c^3} |\tilde{\mathbf{a}}(\omega)|^2 \quad (89)$$

で与えられます。この $\tilde{\mathbf{a}}$ に具体的な加速度を適用することになります。

プラズマ中には電子の他に陽イオンが存在しますから、加速度の要因として電荷 Ze を持つ陽イオンによるクーロン散乱を考え、それによる単位時間・単位体積・単位角周波数あたりの放射エネルギーを計算します。古典的に扱うのであれば、この計算は厳密に行うことができますが、ハンケル関数の性質に関する知識が必要となります。そこで、まず粗い（がその分直観的な）評価で計算する方法を紹介し、その後古典的に厳密な方法について（ハンケル関数の性質の証明は抜きに）紹介します。

^{*1} この式の導出はここではしません。例えば、砂川重信『理論電磁気学』第9章 (3.51) 式などを参照してください。

4.1.2 粗い評価

今考えている散乱を下図に示しておきます。ここで衝突径数とは、入射電子の速度ベクトル方向と標的である陽イオンの距離のことです。

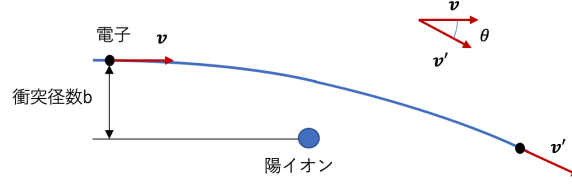


図7 クーロン散乱.

ラザフォード散乱の議論から、散乱角 θ と衝突径数の間には次のような関係が成立します。

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{Ze^2}{m_e v^2 b} \quad (90)$$

今、散乱角が微小であるような散乱を考えることにしましょう。この時、図7から、速度変化の大きさは

$$\Delta v = |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \sim v\theta \sim \frac{2Ze^2}{m_e v b} \quad (91)$$

と評価できます。加速度運動に伴う放射が最も強まるのは電子が陽イオンに最接近する時ですから、この強い放射が続く時間を $\Delta\tau \sim b/v$ 程度と評価すると、時間 $\Delta\tau$ の間に (91) 式の速度変化が起きることになります。これを踏まえて加速度のフーリエ変換 (82) について考えます。 $\omega\Delta\tau$ が1よりも十分大きい場合、 $e^{-i\omega t}$ が激しく振動するために積分は0になります。一方、 $\omega\Delta\tau$ が1よりも十分小さいなら、 $e^{-i\omega t} \sim 1$ とできて

$$\tilde{a}(\omega) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\Delta\tau}{2}}^{\frac{\Delta\tau}{2}} \frac{\Delta v}{\Delta\tau} e^{-i\omega t} dt \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Delta v \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2Ze^2}{m_e v b} \quad (92)$$

と計算できます。これを (89) に代入すれば、衝突径数が b であるような電子が単位角周波数あたりに放射するエネルギーとして

$$\frac{dW(b)}{d\omega} = \frac{8Z^2 e^6}{3\pi c^3 m_e^2 v^2 b^2} \quad (93)$$

を得ます。

ここまでは、一電子と一陽イオンの散乱を考えてきました。次に、複数の電子と複数の陽イオンの散乱について考えましょう。電子、陽イオンのそれぞれの数密度を n_e, n_i とします。陽イオン一つに対して、単位時間あたりに衝突径数が $b \sim b + db$ の位置に飛来してくる電子の数は $n_e v 2\pi b db$ 個存在します。従って、一つの陽イオンによる散乱で放射される単位時間・単位角周波数あたりのエネルギーは、 $\int n_e v 2\pi b db$ で与えられます。このような陽イオンが数密度 n_i で存在するので、単位時間・単位体積・単位角周波数あたりの放射エネルギーは

$$\begin{aligned} \frac{dW(v, \omega, Z)}{dV dt d\omega} &= n_i n_e v \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{dW(b)}{db} 2\pi b db \\ &= \frac{16Z^2 e^6}{3c^3 m_e^2 v} n_e n_i \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right) \end{aligned} \quad (94)$$

となります。

最後に、衝突径数の上限と下限を評価しておきましょう。まず、上限値については、(92) 式を求める際の条件から

$$\omega \frac{b}{v} < 1 \quad \therefore b < \frac{v}{\omega} = b_{max} \quad (95)$$

と与えられます. 続いて下限値については, 今散乱角が小さいことを仮定していたことから,

$$\theta = \frac{2Ze^2}{m_e v^2 b} < 1 \quad \therefore b > \frac{2Ze^2}{m_e v^2} \quad (96)$$

です. また, 不確定性原理も考慮すれば,

$$m_e v b > \hbar \quad \therefore b > \frac{\hbar}{m_e v} \quad (97)$$

なので, (96)(97) から

$$b_{min} \sim \max\left(\frac{2Ze^2}{m_e v^2}, \frac{\hbar}{m_e v}\right) \quad (98)$$

となります. すなわち, 低速度 ($\frac{v}{c} \lesssim \frac{Z}{100}$) においては (96) が, 高速度 ($\frac{v}{c} \gtrsim \frac{Z}{100}$) においては (97) が採用されることとなります.

4.1.3 古典的に厳密な扱い

陽イオンによってクーロン散乱される電子の軌道は, 媒介変数表示によって次のように与えられます.

$$x = a(\epsilon - \cosh \xi), \quad y = a\sqrt{\epsilon^2 - 1} \sinh \xi, \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{Ze^2}}(\epsilon \sinh \xi - \xi) \quad (99)$$

ここで,

$$a = \frac{Ze^2}{mv^2}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + b^2 \left(\frac{mv^2}{Ze^2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \quad (100)$$

です. また, ここで無次元量

$$\mu \equiv \frac{Ze^2 \omega}{mv^3} \quad (101)$$

を導入しておきます. すると, (99)(100) から

$$\omega t = \sqrt{\frac{ma^3 \omega^2}{Ze^2}}(\epsilon \sinh \xi - \xi) = \sqrt{\frac{Z^2 e^4 \omega^2}{m^2 v^6}}(\epsilon \sinh \xi - \xi) = \mu(\epsilon \sinh \xi - \xi) \quad (102)$$

と書けます. 今, 位置座標のフーリエ変換について,

$$\tilde{x}(\omega) \equiv \mathcal{F}(x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (103)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{x}(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (104)$$

と書くと, (104) 式に関する時間微分から,

$$\tilde{x}'(\omega) \equiv \mathcal{F}\left(\frac{dx}{dt}\right) = i\omega \tilde{x}(\omega) \quad (105)$$

となります. 尚, このような微分によって対応づけられる (すなわち, $\tilde{a}_x(\omega) = -\omega^2 \tilde{x}(\omega)$ などと書ける) ため, (82)(83) 式で示した加速度に登場する ω とここでの ω は同じものとみなすことができます. (105) 式より

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\omega) &= \frac{1}{i\omega \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t(\xi)} \frac{dx}{d\xi} d\xi \\ &= -\frac{a}{i\omega \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sinh \xi e^{i\mu\xi - i\mu\epsilon \sinh \xi} d\xi \quad (\because (99)(102)) \end{aligned} \quad (106)$$

ここで, ハンケル関数の性質

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{p\xi - ix \sinh \xi} d\xi = i\pi H_p^{(1)}(ix) \quad (107)$$

の両辺を x で微分すると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sinh \xi e^{p\xi - ix \sinh \xi} d\xi = -i\pi H_p^{(1)'}(ix) \quad (108)$$

となります. よって

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{a}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{2}} H_{i\mu}^{(1)'}(i\mu\epsilon) \quad (109)$$

となります. y についても全く同様に計算します.

$$\tilde{y}(\omega) = \frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t(\xi)} \frac{dy}{d\xi} d\xi = \frac{a\sqrt{\epsilon^2 - 1}}{i\omega\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cosh \xi e^{i\mu(\xi - \epsilon \sinh \xi)} d\xi \quad (110)$$

ここで, $z = \xi - \epsilon \sinh \xi$ と変数変換しましょう. すると, (100) 式より $\epsilon > 0$ であることから z は ξ についての単調減少関数であり, $\xi = -\infty \rightarrow z = \infty$, $\xi = \infty \rightarrow z = -\infty$ と変換されます. よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \epsilon \cosh \xi) e^{i\mu(\xi - \epsilon \sinh \xi)} d\xi = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu z} dz = 2\pi\delta(\mu) = 0 \quad (111)$$

です. ここで, (101) 式より $\mu > 0$ であることを用いました. (111) 式から

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cosh \xi e^{i\mu(\xi - \epsilon \sinh \xi)} d\xi = \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu(\xi - \epsilon \sinh \xi)} d\xi = \frac{i\pi}{\epsilon} H_{i\mu}^{(1)}(i\mu\epsilon) \quad (112)$$

が成立しますから, (110) 式は

$$\tilde{y}(\omega) = \frac{a\sqrt{\epsilon^2 - 1}}{\omega\epsilon} \sqrt{\frac{\pi}{2}} H_{i\mu}^{(1)}(i\mu\epsilon) \quad (113)$$

となります. (109)(113) を, $\tilde{a}_x(\omega) = -\omega^2 \tilde{x}(\omega)$, $\tilde{a}_y(\omega) = -\omega^2 \tilde{y}(\omega)$ を踏まえて (89) に代入すると,

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{2\pi a^2 e^2 \omega^2}{3c^3} \left(\left| H_{i\mu}^{(1)'}(i\mu\epsilon) \right|^2 + \left(1 - \frac{1}{\epsilon^2} \right) \left| H_{i\mu}^{(1)}(i\mu\epsilon) \right|^2 \right) \quad (114)$$

ここで, (114) のハンケル関数を導いた積分に再び注目しましょう. 奇関数部分を切り落とせば,

$$\begin{aligned} -i\pi H_{i\mu}^{(1)'}(i\mu\epsilon) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sinh \xi e^{i\mu(\xi - \epsilon \sinh \xi)} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sinh \xi \cos[\mu(\xi - \epsilon \sinh \xi)] d\xi + i \int_{-\infty}^{\infty} \sinh \xi \sin[\mu(\xi - \epsilon \sinh \xi)] d\xi \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} \sinh \xi \sin[\mu(\xi - \epsilon \sinh \xi)] d\xi \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} i\pi H_{i\mu}^{(1)}(i\mu\epsilon) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu(\xi - \epsilon \sinh \xi)} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos[\mu(\xi - \epsilon \sinh \xi)] d\xi + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin[\mu(\xi - \epsilon \sinh \xi)] d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos[\mu(\xi - \epsilon \sinh \xi)] d\xi \end{aligned} \quad (116)$$

とできます. すなわち, $H_{i\mu}^{(1)'}(i\mu\epsilon)$ は実数, $H_{i\mu}^{(1)}(i\mu\epsilon)$ は純虚数であったとわかります. このことから (114) は

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\omega} &= \frac{2\pi a^2 e^2 \omega^2}{3c^3} \left[\left(H_{i\mu}^{(1)'}(i\mu\epsilon) \right)^2 - \left(1 - \frac{1}{\epsilon^2} \right) \left(H_{i\mu}^{(1)}(i\mu\epsilon) \right)^2 \right] \\ &= \frac{2\pi Z^2 e^6 \omega^2}{3m^2 v^4 c^3} \left[\left(H_{i\mu}^{(1)'}(i\mu\epsilon) \right)^2 - \left(1 - \frac{1}{\epsilon^2} \right) \left(H_{i\mu}^{(1)}(i\mu\epsilon) \right)^2 \right] \quad (\because (100)) \end{aligned} \quad (117)$$

となります. ここで, ハンケル関数はベッセルの微分方程式を満たしていることを思い出しましょう. すなわち, $u = i\mu\epsilon$, $u_0 = i\mu$ とすれば,

$$u \frac{d^2 H_{u_0}^{(1)}}{du^2} + \frac{dH_{u_0}^{(1)}}{du} + u \left(1 - \frac{u_0^2}{u^2} \right) H_{u_0}^{(1)} = 0 \quad (118)$$

です。これを变形します。まず両辺に $H_{u_0}^{(1)}$ をかけて移項すると、

$$\begin{aligned}
& -u \left(1 - \frac{u_0^2}{u^2}\right) (H_{u_0}^{(1)})^2 = uH_{u_0}^{(1)} \frac{d^2 H_{u_0}^{(1)}}{du^2} + H_{u_0}^{(1)} \frac{dH_{u_0}^{(1)}}{du} \\
\therefore u \left[\left(\frac{dH_{u_0}^{(1)}}{du}\right)^2 - \left(1 - \frac{u_0^2}{u^2}\right) (H_{u_0}^{(1)})^2 \right] &= u \left(\frac{dH_{u_0}^{(1)}}{du}\right)^2 + uH_{u_0}^{(1)} \frac{d^2 H_{u_0}^{(1)}}{du^2} + H_{u_0}^{(1)} \frac{dH_{u_0}^{(1)}}{du} \\
&= \frac{d}{du} \left[uH_{u_0}^{(1)} \frac{dH_{u_0}^{(1)}}{du} \right] \\
\therefore \left(H_{i\mu}^{(1)'}(i\mu\epsilon)\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{\epsilon^2}\right) \left(H_{i\mu}^{(1)}(i\mu\epsilon)\right)^2 &= \frac{1}{u} \frac{d}{du} \left[uH_{u_0}^{(1)} \frac{dH_{u_0}^{(1)}}{du} \right] \tag{119}
\end{aligned}$$

よって、(117) は

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{2\pi Z^2 e^6 \omega^2}{3m^2 v^4 c^3} \frac{1}{u} \frac{d}{du} \left[uH_{u_0}^{(1)} \frac{dH_{u_0}^{(1)}}{du} \right] \tag{120}$$

となります。これが、一つの電子の単位角周波数の放射エネルギーです。これを (94) 式同様に積分することになります。(104) 式から $bdb = a^2 \epsilon d\epsilon$ ですから、

$$\begin{aligned}
\frac{dW(v, \omega, Z)}{dV dt d\omega} &= n_i n_e v \int_0^\infty \frac{dW(b)}{db} 2\pi b db \\
&= \frac{4\pi^2 Z^2 e^6 \omega^2 n_e n_i}{3m^2 v^3 c^3} \int_1^\infty \frac{1}{u} \frac{d}{du} \left[uH_{u_0}^{(1)} \frac{dH_{u_0}^{(1)}}{du} \right] a^2 \epsilon d\epsilon \\
&= -\frac{4\pi^2 Z^2 e^6 \omega^2 n_e n_i a^2}{3m^2 v^3 c^3 \mu} i \int_1^\infty \frac{d}{d\epsilon} \left[\epsilon H_{i\mu}^{(1)}(i\mu\epsilon) H_{i\mu}^{(1)'}(i\mu\epsilon) \right] d\epsilon \quad (\because u = i\mu\epsilon, u_0 = i\mu) \\
&= \frac{4\pi^2 Z^2 e^6 \omega^2 n_e n_i a^2}{3m^2 v^3 c^3 \mu} i H_{i\mu}^{(1)}(i\mu) H_{i\mu}^{(1)'}(i\mu) \\
&= \frac{4\pi^2 Z^3 e^8 \omega n_e n_i}{3m^3 v^4 c^3} \left| H_{i\mu}^{(1)}(i\mu) \right| \left| H_{i\mu}^{(1)'}(i\mu) \right| \tag{121}
\end{aligned}$$

となります。最後の变形では、 $H_{i\mu}^{(1)}(i\mu)$ が純虚数であることを使いました。これが単位時間・単位体積・単位角周波数あたりの放射エネルギーの厳密な表式です。

4.1.2 節での粗い評価とこの結果の比較についても軽く触れておきます。4.1.2 節の結果は、古典的に考えるなら (不確定性原理を考えないなら)、

$$\frac{dW(v, \omega, Z)}{dV dt d\omega} = \frac{16Z^2 e^6}{3c^3 m_e^2 v} n_e n_i \ln \left(\frac{m_e v^3}{2Ze^2 \omega} \right) \tag{122}$$

です。ここで、 $b_{max} > b_{min}$ であることから

$$\frac{m_e v^3}{2Ze^2 \omega} \sim \frac{1}{\mu} > 1 \quad \therefore \mu < 1 \tag{123}$$

であることに注意しましょう。今、厳密解について $\mu \ll 1$ とすると、(121) は

$$\frac{dW(v, \omega, Z)}{dV dt d\omega} \simeq \frac{16Z^2 e^6}{3c^3 m_e^2 v} n_e n_i \ln \left(\frac{1.1 m_e v^3}{Ze^2 \omega} \right) \tag{124}$$

となり、粗い評価による近似が厳密解にほとんど一致していることがわかります。

4.1.4 量子的な効果の考慮

ここまでは古典的な扱いをしてきましたが、実際には量子論的な効果も効いてくることになります。この補正を踏まえ、一般には単位時間・単位体積・単位角周波数あたりの放射エネルギーを

$$\frac{dW(v, \omega, Z)}{dV dt d\omega} = \frac{16\pi Z^2 e^6}{3\sqrt{3} c^3 m_e^2 v} n_e n_i g_{ff}(v, \omega) \tag{125}$$

と書きます。ここで登場した $g_{ff}(v, \omega)$ はゴント因子と呼ばれており、量子的な補正の影響を表しています。また、角周波数を振動数 $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ に書き換えると、

$$\frac{dW(v, \nu, Z)}{dV dt d\nu} = \frac{32\pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3}c^3 m_e^2 v} n_e n_i g_{ff}(v, \nu) \quad (126)$$

となります。

4.1.5 熱的制動放射のエネルギー放出率

続いて、(126) を電子速度について平均します。電子の運動はマクスウェル・ボルツマン分布に従います。ここで、電子が振動数 ν の電磁波を放射するためには、電子の運動エネルギーについて $\frac{1}{2}m_e v^2 > h\nu$ である必要があるため、積分の下限に注意すると、

$$\begin{aligned} \frac{dW_{brem}(v, \nu, Z)}{dV dt d\nu} &= \frac{32\pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3}c^3 m_e^2} n_e n_i \int_{\sqrt{\frac{2h\nu}{m_e}}}^{\infty} \frac{1}{v} g_{ff}(v, \nu) \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T_e}\right) 4\pi v^2 dv \\ &= \frac{32\pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3}c^3 m_e^2} n_e n_i \bar{g}_{ff}(T_e, \nu) \int_{\sqrt{\frac{2h\nu}{m_e}}}^{\infty} \frac{1}{v} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T_e}\right) 4\pi v^2 dv \\ &= \frac{32\pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3}c^3 m_e^2} n_e n_i \bar{g}_{ff}(T_e, \nu) \sqrt{\frac{2m_e}{\pi k_B T_e}} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_e}\right) \\ &= \frac{32\pi Z^2 e^6}{3m_e c^3} \sqrt{\frac{2\pi}{3k_B m_e}} n_e n_i T_e^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_e}\right) \bar{g}_{ff}(T_e, \nu) \end{aligned} \quad (127)$$

と計算できます。ここで $\bar{g}_{ff}(T_e, \nu)$ は

$$\bar{g}_{ff}(T_e, \nu) = \frac{\int_{\sqrt{\frac{2h\nu}{m_e}}}^{\infty} \frac{1}{v} g_{ff}(v, \nu) \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T_e}\right) 4\pi v^2 dv}{\int_{\sqrt{\frac{2h\nu}{m_e}}}^{\infty} \frac{1}{v} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T_e}\right) 4\pi v^2 dv} \quad (128)$$

で与えられる量で、Maxwell-averaged ゴント因子と呼ばれています。ゴント因子あるいは Maxwell-averaged ゴント因子の具体的な振る舞いについては、数多くの研究が成されています。その研究について知りたい方は、例えば Menzel and Pekeris(1935) や Kazas and Latter(1961) などを参照してください。

4.2 ハッブル定数の計算法

ここまでの熱的制動放射の議論及び前章の tSZ 効果を踏まえて、ハッブル定数が求められる過程について見ていきましょう。

4.2.1 宇宙論の準備

後の準備として、いくつかの宇宙論に関する物理量について記しておきます。

宇宙の計量は以下のロバートソン・ウォーカー計量で与えられます。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (129)$$

ここで、 t は時間、 r, θ, ϕ は空間内の位置を示す座標であり、 $a(t)$ はスケール因子と呼ばれ、宇宙の膨張に伴って大きくなる量です。そして、 k は宇宙の曲率を表す量です。ここで、 r の定数倍の変換は自由に行えるために、 k は符号のみが重要であることに注意します。よって、 $k = \pm 1, 0$ を考えれば十分です。 $k = -1$ は開いた宇宙、 $k = 0$ は平坦な宇宙、 $k = 1$ は閉じた宇宙に相当しており、観測可能な範囲では $k = 0$ としても無矛盾であることが実験的に知られています^[4]。今、位置 r にある天体が時刻 t_s に放った光が原点にいる観測者に時刻 t_{ob} に到来するとしましょう。光の経路に沿って $d\theta = d\phi = 0$ とすると、光線について $ds^2 = 0$ ですから、(129) より

$$\int_{t_s}^{t_{ob}} \frac{c}{a(t)} dt = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (130)$$

ここで、右辺は時間に依りません。よって、光源が時刻 $t_s + \Delta t_s$ に放った光が観測者の元に時刻 $t_{ob} + \Delta t_{ob}$ に到来するとすれば、 $\Delta t_s, \Delta t_{ob}$ を微小として

$$\int_{t_s}^{t_{ob}} \frac{c}{a(t)} dt = \int_{t_s + \Delta t_s}^{t_{ob} + \Delta t_{ob}} \frac{c}{a(t)} dt \quad \therefore \frac{\Delta t_s}{a(t_s)} = \frac{\Delta t_{ob}}{a(t_{ob})} \quad (131)$$

となります。 Δt として周波数 ν の逆数をとれば

$$\nu_{ob} = \nu_s \frac{a(t_s)}{a(t_{ob})} \quad (132)$$

となります。すなわち、天体から到来する光の周波数は、宇宙膨張の影響で放出した時よりも小さく観測されるのです。この現象は宇宙論的赤方偏移と呼ばれています。赤方偏移 z は

$$1 + z = \frac{a(t_{ob})}{a(t_s)} \quad (133)$$

で定義されます。 z が大きい天体ほど、上式右辺が大きくなるために距離が遠いということになります。この下で宇宙論的赤方偏移は

$$\nu_{ob} = \frac{\nu_s}{1 + z} \quad (134)$$

と書けます。

宇宙膨張が無視できるような空間においては、距離 d にある天体の光度 L （単位時間あたりの放射エネルギー）とフラックス F （単位時間に単位面積を通り抜けるエネルギー）の間には

$$L = 4\pi d^2 F \quad (135)$$

という関係が成り立ちます。これを宇宙膨張が存在する場合にも拡張することで定義される距離が光度距離です。天体から見て地球が r の位置にあるとしましょう。 t, r を一定とした時の面積要素は (129) の計量から

$$\sqrt{a^2(t)r^2 \cdot a^2(t)r^2 \sin^2 \theta} d\theta d\phi = a^2(t)r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (136)$$

で与えられますから、 r が一定であるような領域の面積は $4\pi a^2(t)r^2$ です。よって、天体から放たれた光は時刻 t_{ob} で面積 $S = 4\pi a^2(t_{ob})r^2$ だけ広がっているということになります。天体からの単位振動数あたりの光度を l_s と書くと、時間 Δt_s の間に放出される振動数 $\nu_s \sim \nu_s + \Delta \nu_s$ を持つ光子の数は

$$\frac{l_s \Delta \nu_s \Delta t_s}{h\nu_s} \quad (137)$$

と書けます。これらの光子が地球に時間 Δt_{ob} の間に到来し、観測された振動数が $\nu_{ob} \sim \nu_{ob} + \Delta \nu_{ob}$ であったとしましょう。地球での単位振動数あたりのフラックスを f_{ob} と書くと、天体から放出された光子数と広がった光子数が一致することから、

$$\frac{l_s \Delta \nu_s \Delta t_s}{h\nu_s} = \frac{S f_{ob} \Delta \nu_{ob} \Delta t_{ob}}{h\nu_{ob}} \quad (138)$$

ここで、宇宙論的赤方偏移により

$$\frac{\nu_s}{\nu_{ob}} = \frac{\Delta \nu_s}{\Delta \nu_{ob}} = \frac{\Delta t_{ob}}{\Delta t_s} = 1 + z \quad (139)$$

ですから、

$$f_{ob}(\nu_{ob}) = \frac{l_s(\nu_s)}{(1 + z)S} \quad (140)$$

となります。これを振動数 ν_{ob} について積分すれば、天体の光度を L 、観測するフラックスを F として

$$F = \int_0^\infty f_{ob}(\nu_{ob}) d\nu_{ob} = \frac{1}{(1 + z)S} \int_0^\infty l_s(\nu_s) d\nu_{ob} = \frac{1}{(1 + z)^2 S} \int_0^\infty l_s(\nu_s) d\nu_s = \frac{L}{4\pi(1 + z)^2 a^2(t_{ob})r^2} \quad (141)$$

と計算できます。従って、(135) の類推から光度距離は

$$d_L \equiv a(t_{ob})r(1+z) \quad (142)$$

と定義されます。

続いて、角径距離を定義します。宇宙膨張が無視できるような空間においては、距離 d にある天体の見かけの角度の広がり $\Delta\theta$ 、実際の $\Delta\theta$ 方向のサイズを l とすると、

$$l = d\Delta\theta \quad (143)$$

の関係があります。これを宇宙膨張が存在する場合にも拡張することで定義される距離が角径距離です。再び計量 (129) から、天体の大きさは

$$l = a(t_s)r\Delta\theta \quad (144)$$

と書けます。ここで、地球から観測される天体は、光の放射時刻 t_s での様子をしているため、時間として t_{ob} でなく t_s を用いています。従って、角径距離は次のように定義されます。

$$d_A \equiv a(t_s)r \quad (145)$$

以上の結果から、光度距離と角径距離の関係は次のようになります。

$$d_A = \frac{a(t_{ob})r}{1+z} = \frac{d_L}{(1+z)^2} \quad (146)$$

続いて、宇宙論パラメータを導入します。スケール因子 $a(t)$ の時間発展は、以下のフリードマン方程式*2によって記述されます。

$$3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{ca} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] - \Lambda = \frac{8\pi G\rho}{c^2} \quad (147)$$

G は万有引力定数、 Λ は宇宙項です。ここで、ハッブル係数 H 、臨界密度 ρ_c 、密度係数 Ω 、曲率係数 K 、無次元化した宇宙項 λ を次のように定義します [5]。

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad \Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad K = \frac{kc^2}{H^2a^2}, \quad \lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2} \quad (148)$$

これらを用いると、(147) は次のようになります。

$$\Omega + \lambda - K = 1 \quad (149)$$

ここで、ハッブルの法則を見ておきましょう。観測者の位置を原点に取り、天体の位置が座標 r だとします。この時、観測者と天体の距離は、(129) の計量から

$$R = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \quad (150)$$

と書けます。よって、両辺を時間微分すると、

$$V \equiv \dot{R} = \dot{a} \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{\dot{a}}{a} R = HR \quad (151)$$

と書けます。こうして、 H がハッブルの法則における比例係数になっていることがわかります。これ以降、下付添字 0 をもって現在時刻での物理量を表すことにします。特に、ハッブル係数の現在の値 H_0 のことをハッブル定数と呼びます。

ここで、フリードマン方程式をハッブル係数に関する式に変形します。まず (147) より

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \quad (152)$$

*2 アインシュタイン方程式に (129) の計量を代入することで得られます。

です。一般に、密度の元としては放射と物質が考えられます。しかし、現在の宇宙においては放射の影響は無視できる [1] ので、物質のみを考えることにしましょう。すると、宇宙膨張に伴って物質の数密度は a^{-3} に比例して減少しますから、

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 \quad (153)$$

と書けます。よって (152) は

$$\begin{aligned} H^2 &= H_0^2 \left[\frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 + \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} - \frac{kc^2}{H_0^2 a_0^2} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^2 \right] \\ &= H_0^2 [\Omega_0(1+z)^3 + \lambda_0 - K_0(1+z)^2] \\ &= H_0^2 [\Omega_0(1+z)^3 + (1 - \Omega_0 - \lambda_0)(1+z)^2 + \lambda_0] \end{aligned} \quad (154)$$

よって

$$H = H_0 \sqrt{F(z)} \quad (F(z) \equiv \Omega_0(1+z)^3 + (1 - \Omega_0 - \lambda_0)(1+z)^2 + \lambda_0) \quad (155)$$

です。

最後に、角径距離とハッブル定数の関係について述べておきます。(130) 式に戻りましょう。今、観測する時刻を現在として $t_{ob} = t_0$ とすれば

$$\int_{t_s}^{t_0} \frac{c}{a(t)} dt = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \equiv \chi \quad (156)$$

すると、 r について次のような式が成立します。

$$r = \sigma(\chi) \equiv \begin{cases} \sin \chi & (k = 1) \\ \chi & (k = 0) \\ \sinh \chi & (k = -1) \end{cases} \quad (157)$$

ところで、 χ について時間の積分を z についての積分に直すと

$$\chi = \int_{t_s}^{t_0} \frac{c}{a(t)} dt = \int_0^z \frac{c}{a_0 H} dz = \frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{F(z)}} \equiv \frac{c}{a_0 H_0} G \quad (158)$$

とできます。ここで、 $1+z = a_0/a$ より

$$\dot{a} dt = -\frac{a_0}{(1+z)^2} dz = -\frac{a^2}{a_0} dt \quad \therefore dt = -\frac{a}{a_0 H} dz \quad (159)$$

であることを用いました。(149) より

$$\Omega_0 + \lambda_0 - 1 = k \left(\frac{c}{H_0 a_0} \right)^2 \quad (160)$$

であることに注意すると、角径距離について

$$\begin{aligned} d_A &= \frac{a_0 \sigma(\xi)}{1+z} = \frac{a_0}{1+z} \times \begin{cases} \sin \chi & (k = 1) \\ \chi & (k = 0) \\ \sinh \chi & (k = -1) \end{cases} \\ &= \frac{c}{H_0(1+z)} \times \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 + \lambda_0 - 1}} \sin(G\sqrt{\Omega_0 + \lambda_0 - 1}) & (\Omega_0 + \lambda_0 > 1) \\ G & (\Omega_0 + \lambda_0 = 1) \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_0 - \lambda_0}} \sinh(G\sqrt{\Omega_0 + \lambda_0 - 1}) & (\Omega_0 + \lambda_0 < 1) \end{cases} \end{aligned} \quad (161)$$

$$\left(G = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_0(1+z)^3 + (1 - \Omega_0 - \lambda_0)(1+z)^2 + \lambda_0}} \right) \quad (162)$$

と書くことができます。すなわち、 z が既知であるような天体に対しては、適切に宇宙論パラメータ Ω_0, λ_0 を指定してやることで、角径距離とハッブル定数を結びつけることができるということです。

4.2.2 銀河団の放射

(127) は一種類の陽イオンに対する結果でした。銀河団プラズマ中には、主として ^1H と ^4He が含まれていると考えられますから、これらの陽イオンに伴う放射を足してあげます。今、プラズマ中に含まれる ^1H と ^4He の質量比を $X : 1 - X$ とします。 ^1H 一つ当たりの質量は陽子一つの質量、 ^4He 一つ当たりの質量は陽子2つと中性子2つの質量と考えられるので、 ^4He の質量は ^1H の質量の4倍です。そのため、 ^1H イオンと ^4He イオンの数の比は $X : (1 - X)/4$ と書けます。また、ヘリウム原子1つあたり電子が2つ存在することに注意すると、

$$(^1\text{H イオンの数}) : (^4\text{He イオンの数}) : (\text{電子の数}) = X : \frac{1 - X}{4} : \left(X + \frac{1 - X}{4} \times 2 \right) = X : \frac{1 - X}{4} : \frac{1 + X}{2} \quad (163)$$

となります。よって、水素イオンの数密度を n_H 、ヘリウムイオンの数密度を n_{He} とすると、

$$n_H = \frac{2}{1 + X} X n_e, \quad n_{He} = \frac{2}{1 + X} \frac{1 - X}{4} n_e \quad (164)$$

です。従って銀河団プラズマからのエネルギー放出率は、単位時間あたりの放射エネルギーを光度 L_X と書けば、

$$\begin{aligned} \frac{dL_X}{dV d\nu} &= \frac{32\pi e^6}{3m_e c^3} \sqrt{\frac{2\pi}{3k_B m_e}} n_e T_e^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_e}\right) \sum_i Z_i^2 n_i \bar{g}_{ff}(T_e, \nu, i) \\ &= \frac{2}{1 + X} \frac{32\pi e^6}{3m_e c^3} \sqrt{\frac{2\pi}{3k_B m_e}} T_e^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_e}\right) n_e^2 [X \bar{g}_{ff}(T_e, \nu, 1) + (1 - X) \bar{g}_{ff}(T_e, \nu, 2)] \end{aligned} \quad (165)$$

と書けます。ここで \bar{g} 中の1は水素を、2はヘリウムであることを示しています。尚、 X についてですが、プラズマ中であってもビッグバン元素合成での ^1H と ^4He の質量比に従っていると考えられますので、 $X = 0.75$ 程度とすることができます。

次に、(165) 式を周波数で積分して、単位体積あたりの光度を計算します。この積分範囲は、我々が観測しやすい波長帯であるべきです。例えば、可視光で見えることを考えましょう。すると、銀河団の表面輝度と銀河団以外の場所から到来する光の表面輝度は、ほとんど同程度になってしまいます。一方、X線の場合には、銀河団の表面輝度が周囲に比べて約1000倍も大きくなります。この見つけやすさのために、X線領域での観測が重要となります。^[7] これを踏まえて、X線を $\nu_1 \sim \nu_2$ の範囲で観測するとしましょう。宇宙論的赤方偏移により、天体が放出する段階での光の振動数の範囲は $\nu_1(1+z) \sim \nu_2(1+z)$ になっています。よって、この振動数帯での単位体積あたりの光度は、

$$\begin{aligned} \frac{dL_X}{dV} &= \frac{2}{1 + X} \frac{32\pi e^6}{3m_e c^3} \sqrt{\frac{2\pi}{3k_B m_e}} T_e^{-\frac{1}{2}} n_e^2 \int_{\nu_1(1+z)}^{\nu_2(1+z)} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_e}\right) [X \bar{g}_{ff}(T_e, \nu, 1) + (1 - X) \bar{g}_{ff}(T_e, \nu, 2)] d\nu \\ &= \alpha(T_e; \nu_1, \nu_2, z) n_e^2 \end{aligned} \quad (166)$$

ここで、

$$\alpha(T_e; \nu_1, \nu_2, z) \equiv \frac{2}{1 + X} \frac{16e^6}{3\hbar m_e c^3} \sqrt{\frac{2\pi}{3m_e}} \int_{\frac{h\nu_1}{k_B T_e}(1+z)}^{\frac{h\nu_2}{k_B T_e}(1+z)} (k_B T_e)^{\frac{1}{2}} e^{-u} [X \bar{g}_{ff}(T_e, u, 1) + (1 - X) \bar{g}_{ff}(T_e, u, 2)] du \quad (167)$$

です。

4.2.3 銀河団についての仮定

以降計算を進めるには、銀河団の電子密度分布や温度分布について仮定を置く必要が有ります。そこで、銀河団は球対称であり、等温 β モデルに従うものとします。このモデルでは、銀河団の温度は至る所一定であり、電子密度の分布が経験則として

$$n_e(r) = n_{e0} \left[1 + \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right]^{-\frac{3\beta}{2}} \quad (168)$$

という分布に従うものと仮定します。ここで r_c はコア半径と呼ばれる量です。典型的な銀河団では、各パラメータの値は $n_{e0} = 10^{-3} \sim 10^{-2} \text{cm}^{-3}$ 、 $r_c = 50 \sim 200 \text{kpc}$ 、 $\beta = 0.5 \sim 1$ 程度となります。^[2]

4.2.4 ハッブル定数の計算

これまでに見てきたことを用いて、ハッブル定数を計算する方法について見ていきます。

4.2.2 節で単位体積あたりの光度を求めましたが、これは直接観測できる量ではありません。そこで、直接観測できる量である表面輝度へと変換することにします。観測者から見て、天体の中心からの距離が r 、見込む角度が θ で与えられるような位置にある立体角 $d\Omega$ からの放射を考えましょう (図 8)。

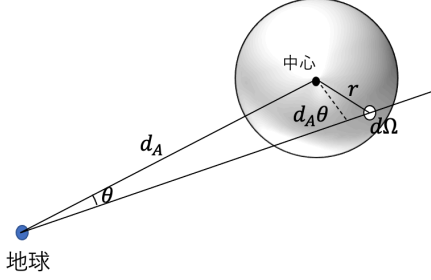


図 8 天体と観測者の模式図.

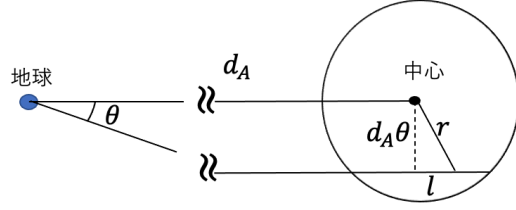


図 9 考えている立体角 $d\Omega$ の部分に関する量.

今考えているような $d\Omega$ の方向から到来する光度は、 l 方向について積分することで

$$dL_X(\theta) = \int_{-l_{max}}^{l_{max}} \frac{dL_X}{dV} d_A^2 d\Omega dl = \alpha(T_e; \nu_1, \nu_2, z) d_A^2 d\Omega \int_{-l_{max}}^{l_{max}} n_e^2 dl \quad (169)$$

と与えられます。よって、この $d\Omega$ の方向から到来するフラックスは

$$dF = \frac{dL_X}{4\pi d_L^2} = \frac{1}{4\pi(1+z)^4} \alpha(T_e; \nu_1, \nu_2, z) d\Omega \int_{-l_{max}}^{l_{max}} n_e^2 dl \quad (\because (146)) \quad (170)$$

となります。従って、単位立体角あたりのフラックス、すなわち表面輝度は

$$S_X(\theta) = \frac{1}{4\pi(1+z)^4} \alpha(T_e; \nu_1, \nu_2, z) \int_{-l_{max}}^{l_{max}} n_e^2 dl \quad (171)$$

となります。また、レイリージーンズ極限での tSZ 効果を観測するとすればその分布は、(79) 式より

$$\frac{\Delta T(\theta)}{T} = -2 \int_0^{t_{cross}} \frac{\sigma_\tau k_B T_e n_e}{m_e c^2} c dt = -2 \frac{\sigma_\tau k_B T_e}{m_e c^2} \int_{-l_{max}}^{l_{max}} n_e dl \quad (172)$$

です。

続いて、(171)(172) に (168) を代入します。図 9 より

$$r^2 = l^2 + d_A^2 \theta^2 \quad (173)$$

ですから、

$$\frac{\Delta T(\theta)}{T} = -2 \frac{\sigma_\tau k_B T_e}{m_e c^2} n_{e0} \int_{-l_{max}}^{l_{max}} \left[1 + \frac{l^2 + d_A^2 \theta^2}{r_c^2} \right]^{-\frac{3\beta}{2}} dl \quad (174)$$

$$S_X(\theta) = \frac{1}{4\pi(1+z)^4} \alpha(T_e; \nu_1, \nu_2, z) n_{e0}^2 \int_{-l_{max}}^{l_{max}} \left[1 + \frac{l^2 + d_A^2 \theta^2}{r_c^2} \right]^{-3\beta} dl \quad (175)$$

この積分はベータ関数を用いれば厳密に積分することができます [14] が、ここでは慣習的な方法として、 $l_{max} \rightarrow \infty$ とし

ます。

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta T(\theta)}{T} &= -4 \frac{\sigma_\tau k_B T_e}{m_e c^2} n_{e0} \left[1 + \frac{d_A^2 \theta^2}{r_c^2} \right]^{-\frac{3\beta}{2}} \int_0^\infty \frac{1}{\left(1 + \frac{l^2}{r^2 + d_A^2 \theta^2} \right)^{\frac{3\beta}{2}}} dl \\
&= -4 \frac{\sigma_\tau k_B T_e}{m_e c^2} n_{e0} r_c \left[1 + \frac{d_A^2 \theta^2}{r_c^2} \right]^{\frac{1}{2} - \frac{3\beta}{2}} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3\beta}{2}}} dx \\
&= -2 \frac{\sigma_\tau k_B T_e}{m_e c^2} n_{e0} r_c \left[1 + \frac{d_A^2 \theta^2}{r_c^2} \right]^{\frac{1}{2} - \frac{3\beta}{2}} \int_0^\infty \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{3\beta}{2}}} dz \\
&= \frac{-2\sqrt{\pi} \sigma_\tau k_B T_e}{m_e c^2} n_{e0} d_A \theta_c \frac{\Gamma(\frac{3\beta}{2} - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3\beta}{2})} \left[1 + \frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right]^{\frac{1}{2} - \frac{3\beta}{2}} \left(\theta_c \equiv \frac{r_c}{d_A} : \text{コア角半径} \right) \quad (176)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\int_0^\infty \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}} dz = B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (177)$$

を用いました. 同様にして

$$S_X(\theta) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}(1+z)^4} \alpha(T_e; \nu_1, \nu_2, z) n_{e0}^2 d_A \theta_c \frac{\Gamma(3\beta - \frac{1}{2})}{\Gamma(3\beta)} \left[1 + \frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right]^{\frac{1}{2} - 3\beta} \quad (178)$$

ここで β, θ_c は観測によって決定できる量です. しかし, 銀河団が等温 β モデルに厳密に従っているとは限りませんから, tSZ 効果によって決定される β, θ_c と X 線観測によるそれらは異なりえます. よって, tSZ 効果によるものを $\beta_{tSZ}, \theta_{c,tSZ}$, X 線によるものを $\beta_X, \theta_{c,X}$ と区別しておきます. これを踏まえ, (176)(178) で $\theta = 0$ とすると次のようになります.

$$\frac{\Delta T(0)}{T} = \frac{-2\sqrt{\pi} \sigma_\tau k_B T_e}{m_e c^2} n_{e0} d_A \theta_{c,tSZ} \frac{\Gamma(\frac{3\beta_{tSZ}}{2} - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3\beta_{tSZ}}{2})} \quad (179)$$

$$S_X(0) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}(1+z)^4} \alpha(T_e; \nu_1, \nu_2, z) n_{e0}^2 d_A \theta_{c,X} \frac{\Gamma(3\beta_X - \frac{1}{2})}{\Gamma(3\beta_X)} \quad (180)$$

(179)(180) のうち, 直接観測で求めることができない量は n_{e0} 及び d_A です. よって, これらの式から n_{e0} を消去すれば, 角径距離を観測から導く式

$$d_A = \frac{\alpha(T_e; \nu_1, \nu_2, z) m_e^2 c^4}{16\pi^{\frac{3}{2}} (1+z)^4 \sigma_\tau^2 k_B^2 T_e^2} \frac{\Gamma(3\beta_X - \frac{1}{2})}{\Gamma(3\beta_X)} \left(\frac{\Gamma(\frac{3\beta_{tSZ}}{2})}{\Gamma(\frac{3\beta_{tSZ}}{2} - \frac{1}{2})} \right)^2 \frac{\theta_{c,X}}{\theta_{c,tSZ}^2} \frac{1}{S_X(0)} \left(\frac{\Delta T(0)}{T} \right)^2 \quad (181)$$

が得られます. ひとたび角径距離が求まれば, (161) を用いてハッブル定数が計算できますから, これにてハッブル定数が tSZ 効果と X 線観測から計算できることがわかりました.

4.3 実際の測定

天体までの距離を測定する伝統的な方法としては, 「距離梯子」と呼ばれる手法があります. この方法は, まず近い天体までの距離を測定し, そのデータを元にさらに遠い天体までの距離を測定する, ということを繰り返すものになっています. それと比較して, tSZ 効果と X 線観測を用いて銀河団までの距離を知るここでの方法には, 単純な方法でありながら直接距離を決定できるという特徴があります. この方法を用いたハッブル定数の測定は, 2000 年代には既によく行われていました. 以下に, そのいくつかの例を示しておきます.

論文	サンプル数	z	Ω_0, λ_0	ハッブル定数	tSZ効果のデータ源	X線観測のデータ源
Reese et al. (2000)	2	0.55	0.3, 0.7	63^{+12+21}_{-9-21}	OVRO, BIMA	ROSAT
Patel et al. (2000)	1	0.322	0.3, 0.7	$52.2^{+11.4+18.5}_{-11.9-17.7}$	OVRO, BIMA, MMT	ROSAT, ASCA
Mason et al. (2001)	7	<0.1	0.3, 0.7	66^{+14+15}_{-11-15}	OVRO	ROSAT
Grainge et al. (2002)	1	0.143	1, 0	57^{+23}_{-16}	RT	ROSAT, ASCA
Reese et al. (2002)	18	0.14–0.78	0.3, 0.7	60^{+4+13}_{-4-13}	OVRO, BIMA	ROSAT
Saunders et al. (2003)	1	0.217	0.3, 0.7	85^{+20}_{-17}	RT	ROSAT, ASCA
Reese et al. (2004)	26	0–0.78	0.3, 0.7	$61 \pm 3 \pm 18$	RT, OVRO, BIMA	ROSAT
Battistelli et al. (2003)	1	0.0231	0.27, 0.73	84 ± 26	OVRO, WMAP, MITO	ROSAT
Udomprasert et al. (2004)	7	<0.1	0.3, 0.7	67^{+30+15}_{-18-6}	CBI	ROSAT, ASCA, <i>BeppoSAX</i>
Schmidt et al. (2004)	3	0.09–0.45	0.3, 0.7	69 ± 8	Various	<i>Chandra</i>
Jones et al. (2005)	5	0.14–0.3	0.3, 0.7	66^{+11+9}_{-10-8}	RT	ROSAT, ASCA
Bonamente et al. (2006)	38	0.14–0.89	0.3, 0.7		OVRO, BIMA	<i>Chandra</i>
				静水圧平衡の元でのダブル β モデル		
				等温 β モデル		
				中心のデータを除外しての等温 β モデル		

図 10 tSZ 効果と X 線観測を用いた H_0 の 2000 年代の測定例. A. Kozmanya et al.,(2019) より引用・一部改変.

これらの値では、誤差が相対的に大きくなっています。その要因の一つに、系統誤差があります。4.2.3 節で見たように、銀河団についていくつかの仮定を置くことでハッブル定数を計算していました。しかし、実際の銀河団は必ずしもそのモデルに従うわけではありません。実際の銀河では、例えば、ガス分布に偏りが生じて塊状になっている部分の存在、等温性の不成立、球形をしていないことなどが考えられます。こうした要因により、ハッブル定数の測定値が真値から外れてしまうのです。そのため、系統的なズレを正確に見積もることも重要であり、実際にそういった研究もなされています (例えば、Inagaki et al. (1995), Kawahara et al. (2008) など)。また、データの質の向上も大事だと考えられます。最近だと、それ以前の測定データよりも生じる誤差の小さい Planck 衛星^{*3}のデータを用いたこと、そして先述の系統的な不確かさの見積もりが改善されたことにより最終的な誤差が小さくなり、 $H_0 = 67 \pm 3 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ という結果を得たという研究もあります [18]。

ハッブル定数の測定は現在、大きな問題に直面しています。近年、二つの比較的高精度な測定が行われました。一つは Planck 衛星の CMB 異方性の観測を用いた結果で、 $H_0 = 67.66 \pm 0.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ が得られました [20]。もう一つはセファイド変光星を用いた観測の結果で、 $H_0 = 74.22 \pm 1.82 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ となりました [21]。これらの結果は、およそ 4.4σ [21] 分もズレています。この不整合はハッブルテンション (Hubble tension) 問題などと呼ばれています。この矛盾の原因解明のため、水メーザーやクエーサーを用いた新たなハッブル定数の測定法が考案されたり [18]、暗黒エネルギーやインフレーション、修正重力理論などの様々な観点から説明しようとする試みがなされています [22]。tSZ 効果と X 線を用いる方法に限らず、ハッブル定数に関する更なる進捗が期待されるばかりです。

*3 宇宙背景放射の観測のために 2009 年に打ち上げられた望遠鏡です。

5 参考文献

- [1] 小松英一郎. 『宇宙マイクロ波背景放射』. 日本評論社. 2019.
- [2] 北山哲. 『銀河団』. 日本評論社. 2020.
- [3] 小松英一郎訳. 『ワインバーグの宇宙論 (上)』. 日本評論社. 2013.
- [4] ワインバーグ. 『場の量子論 1 巻 粒子と量子場』. 吉岡書店. 1997.
- [5] 高原文郎. 『宇宙物理学』. 朝倉書店. 2015.
- [6] A. R. Choudhuri 著, 森正樹訳. 『天体物理学』. 森北出版. 2019.
- [7] 須藤靖先生の東京工業大学での講義資料『銀河団の多波長観測と宇宙論』. 2002.
- [8] I. H. Hutchinson. “Principles of Plasma Diagnostics”. Cambridge University. 2002.
- [9] T. Padmanabhan. “Theoretical Astrophysics Volume I: Astrophysical Processes”. Cambridge University. 2000.
- [10] I. P. Shkarofsky, T. W. Jhonston, M. P. Bachynski. “The Particle Kinetics of Plasmas”. Addison-Wesley Publishing Company. 1966.
- [11] G. F. Smoot and D. Scott. “Cosmic Background Radiation”. Eur. Phys. J. C 15,145. 2000.
- [12] W. J. Karzas and R. Latter. “ELECTRON RADIATIVE TRANSITIONS IN A COULOMB FIELD”. Astrophys. J, 6,167. 1961.
- [13] Donald H. Menzel and Chaim L. Pekeris. “ABSORPTION COEFFICIENTS AND HYDROGEN LINE INTENSITIES”. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 96,77. 1935.
- [14] Y. Inagaki, T. Sugihara and Y. Suto. “Reliability of the Hubble-Constant Measurement Based on the Sunyaev-Zel’dovich Effect”. PASJ, 47,411. 1995.
- [15] T. Kitayama, S. Ueda, S. Takakuwa, et al., “The Sunyaev-Zel’dovich effect at 5”:RX J1347.5 – 1145 imaged by ALMA”. Astron. Soc. Japan, 68,88. 2016.
- [16] L. E. Bleem, B. Stalder, T. de Haan, et al., “GALAXY CLUSTERS DISCOVERED VIA THE SUNYAEV-ZEL’DOVICH EFFECT IN THE 2500-SQUARE-DEGREE SPT-SZ SURVEY”. The Astrophysical Journal Supplement Series, 216,27. 2015.
- [17] Y. Chiang, R. Maakiya, B. Ménard and E. Komatsu. “The Cosmic Thermal History Probed by Sunyaev-Zeldovich Effect Tomography”. ApJ, 902,56. 2020.
- [18] A. Kozmanyan, H. Bourdin, P. Mazzotta, E. Rasia, and M Sereno. “Deriving the Hubble constant using Planck and XMM-Newton observations of galaxy clusters”. A&A 621, A34. 2019.
- [19] H. Kawahara, T. Kitayama, S. Sasaki, and Y. Suto. “SYSTEMATIC ERRORS IN THE HUBBLE CONSTANT MEASUREMENT FROM THE SUNYAEV-ZEL’DOVICH EFFECT”. Astrophysical Journal, 674,11. 2008.
- [20] Planck Collaboration: N. Aghanim et al., “Planck 2018 results VI. Cosmological parameters”. A&A 641, A6. 2020.
- [21] A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. M. Macri, and D. Scolnic. “Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond Λ CDM”. Astrophysical Journal, 876,85. 2019.
- [22] E. D. Valentino, O. Mena, S. Pan, L. Visinelli, W. Yang, A. Melchiorri, D. F. Mota, A. G. Riess, J. Silk. “In the Realm of the Hubble tension – a Review of Solutions”. Classical Quantum Gravity. 38, 15. 2021.