水星の近日点移動

東京大学理学部物理学科
河野匡

2022 年 5 月 12 日

問題編

　水星の近日点移動に関する文章を読み、以下の設問に答えよ。
水星の軌道をニュートン力学により太陽と水星の二体問題として解析すると、太陽を焦点の一つとする楕円運動になることが知られている。この軌道で太陽に最も近づく位置を近日点といい、もし水星の軌道が完全な楕円ならば水星が太陽の周りを何周してもこの近日点は移動しないはずである。しかし実際には様々な要因により近日点は少しずつずれていく。そのずれは 100 年で 574 秒角とわずかなものであるが、ニュートン力学の範囲内でも他の惑星からの重力を考慮するとその大部分は説明できる。ところが 574 秒角のうち 43 秒角の要因がどうしても説明できない謎として残っていた。その 43 秒角のずれを一般相対論の結果を用いて説明することを試みよう。
水星の軌道を二次元極座標表示し、m を水星の質量、M を太陽の質量とする。一般相対論によると今考えている系でのラグランジアン L という量は

$$L = \frac{1}{2}m(c^2 f(r)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{f(r)} - r^2\dot{\theta}^2)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2MG}{c^2 r}$$

と表されている。以下では $2MG/c^2$ を r_g と書くことにする。また、ここでのドットは以下に定める量 τ による微分である。

$$c^2 d\tau^2 = f(r)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2 d\theta^2$$

このラグランジアンは運動方程式と等価である以下のオイラー・ラグランジュ方程式を満たす量である。

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

ここで x には t, r および θ が入る[*1]
(1) 与えられたラグランジアンから以下に定義する量 ϵ, l を求めよ。

$$mc^2\epsilon = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}}$$

$$-mcr_g l = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$$

オイラー・ラグランジュ方程式より l, ϵ は保存量であることがわかるので[*2]
これらを用いて水星の動径の角度依存性を表す方程式を導こう。

(2)(1) と τ の定義式より $\dot{\theta}^2$ と $\dot{r}^2$ を r, ϵ, l, r_g を用いて表せ。ただし $f(r)$ には具体形を代入しなくてもよい。

(3)$dr/d\theta = \dot{r}/\dot{\theta}$ であることを用いて以下の式を導け。

$$(\frac{du}{d\theta})^2 = \frac{1}{l^2}(\epsilon^2 - 1) + \frac{1}{l^2}u - u^2 + u^3$$

ただし u は

$$u = \frac{r_g}{r}$$

として定義する。

(4)(3) の結果を用いて

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{2l^2} - u + \frac{3}{2}u^2$$

[*1] ∂ は偏微分 (考えている変数以外は定数とみなし微分すること) を表す。
[*2] ラグランジアンが変数 x を陽に含まない時オイラー・ラグランジュ方程式から $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$ より保存する

を導け。

ニュートン力学によると動径座標の角度による二階微分は

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{2l^2} - u$$

である。これを (4) の式と見比べると u^3 の項が一般相対論による効果を表していることがわかる。観測からも一般相対論による効果はあっても小さいことより、ニュートン力学における水星軌道の解

$$u = \frac{1}{2l^2}(1 + e\cos\theta)$$

の形を少しいじった

$$u = \frac{1}{2l^2}(1 + e\cos(\theta(1-\delta)))$$

という形を仮定しよう。ここで e は水星の離心率である。

(5) この u を (4) で求めた式に代入し、$\cos(\theta(1-\delta))$ の係数が等しくなる条件から δ を求めよ。ただし δ は十分小さいため δ^2 は無視してよい。

おまけ問題 (6) 水星の近日点が 100 年間で何秒角ずれるか有効数字二桁で求めよ。ただし必要ならば以下の関係式及び数値を用いてよい。
水星の長径 $a = 5.786 \times 10^{12}$cm、離心率 $e = 0.2056$、$1-e^2 = 0.9577$、公転周期 0.2409 年、$r_g = 2.95 \times 10^5$cm、1 ラジアン=2.06265×10^5 秒角

$$a = \frac{2l^2}{1-e^2} r_g$$

解答・解説編

物理学は自然を記述する学問である。ゆえにどんなに美しく立派な理論を立てようともその理論が自然を説明していなければ意味をなさないのである。一般相対性理論は現象論ではなく、一般相対性原理と等価原理を仮定に導かれた理論であり、実際の物理現象を説明できているかの検証により、その正しさを裏付けることが重要である。歴史的にはアーサー・エディントン卿による光の湾曲の検証が一般相対論の正しさを示したことでよく知られているが、本問で取り扱った水星の近日点移動が一般相対論によって説明できることもその正しさを裏付ける重要な事例である。

(1) 与えられたラグランジアンをただそのまま偏微分すればよい。

$$\epsilon = f(r)\dot{t}$$

$$l = \frac{r^2\dot{\theta}}{cr_g}$$

ここで求めた ϵ や l は (無次元化された) エネルギー及び角運動量である。
(2)$\dot{\theta}^2$ は l の表式から

$$\dot{\theta}^2 = \frac{c^2{r_g}^2l^2}{r^4}$$

$\dot{r}^2$ は τ の定義式より

$$c^2 = f(r)c^2\dot{t}^2 - \frac{1}{f(r)}\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2$$

ただしここでは dt などが微小量であることから

$$\frac{dt^2}{d\tau^2} = (\frac{dt}{d\tau})^2$$

などとした。これに (1) の結果を用いて $\dot{t}$ と $\dot{\theta}$ を消去すると

$$c^2 = \frac{c^2\epsilon^2}{f(r)} - \frac{\dot{r}^2}{f(r)} - \frac{c^2{r_g}^2l^2}{r^2}$$

これより

$$\dot{r}^2 = c^2(\epsilon^2 - f(r) - \frac{{r_g}^2l^2}{r^2}f(r))$$

(3) まず $dr^2/d\theta^2$ を求める。

$$\begin{aligned}(\frac{dr}{d\theta})^2 &= \frac{\dot{r}^2}{\dot{\theta}^2} \\ &= \frac{r^4}{{r_g}^2l^2}(\epsilon^2 - f(r) - \frac{{r_g}^2l^2}{r^2}f(r))\end{aligned}$$

これと

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dr}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r_g}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

より

$$\begin{aligned}(\frac{du}{d\theta})^2 &= \frac{1}{l^2}(\epsilon^2 - f(u) - u^2l^2f(u)) \\ &= \frac{1}{l^2}(\epsilon^2 - 1 + u - u^2l^2 + u^3l^2) \\ &= \frac{1}{l^2}(\epsilon^2 - 1) + \frac{1}{l^2}u - u^2 + u^3\end{aligned}$$

(4)(3) で求めた式をさらに θ で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}(\frac{du}{d\theta})^2 &= 2\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} \\ &= (\frac{1}{l^2} - 2u + 3u^2)\frac{du}{d\theta}\end{aligned}$$

となるので $2du/d\theta$ で割って

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{2l^2} - u + \frac{3}{2}u^2$$

を得る。
(5) 与えられた式を上で得られた式に代入すると左辺からは

$$-\frac{e}{2l^2}(1-\delta)^2\cos(\theta(1-\delta))$$

が出てくる一方、右辺からは

$$\frac{1}{2l^2}-\frac{1}{2l^2}-\frac{e}{2l^2}\cos(\theta(1-\delta))+\frac{3}{8l^4}(1+2e\cos\theta(1-\delta)+e^2\cos^2\theta(1-\delta))$$

両辺の $\cos(\theta(1-\delta))$ の係数の比較により、$(1-\delta)^2=1-2\delta$ という近似とあわせて

$$-\frac{1}{2l^2}(1-2\delta)=-\frac{1}{2l^2}+\frac{3}{4l^4}$$

よって

$$\delta=\frac{3}{4l^2}$$

(6)δ が存在することによって θ が 2π ラジアンだけ回っても cos の中身は 2π 回らない。θ がどれだけ回転すれば再び太陽に最も近づくかは

$$\theta(1-\delta)=2\pi$$

より求まり、δ^2 を無視できる時、$1/(1-\delta)=1+\delta$ より

$$\theta=2\pi+2\pi\delta$$

とわかる。このうち $2\pi\delta$ ラジアンが近日点の移動を表している。これを与えられた式を用いて既知の値による表式とすると

$$\frac{3\pi r_g}{a(1-e^2)}$$

よって、与えられた数値を代入すると一周期でずれる角度は 1.035×10^{-1} 秒角である。これに 100 年間の公転回数である 100/0.2409 をかけると求めたかった値が 43 秒角と得られる。以上を持ってニュートン力学では辿り着けなかった 43 秒角の謎が一般相対論によって解けることがわかった。

参考文献

[1] 佐藤勝彦「相対性理論」(岩波書店, 1996)