# 質量限界の物理

水野裕介

2022 年 5 月 14 日，15 日

主系列後の星や白色矮星などの天体には質量に上限が存在し，その質量を超えると重力的に不安定になると考えられています．これらの天体の質量限界の物理について解説します．

読者は大学 1，2 年生程度を想定し，高校の力学や熱力学の知識を前提とします．また，フェルミ統計などの統計力学の知識も必要となりますが，知らなくても 2 章までは読むことができます．3 章も大まかな流れはわかるようになっています．

## 目次



## 1 質量限界の物理

### 1.1 限界質量

内側から外に押し返すような圧力がなければ，星は重力によって潰れてしまいます．

重たい星では重力が大きく，内側からの圧力で支えるには限度があります．こうした限界質量を超えた星は今までの姿を保つことができず赤色巨星や超新星爆発などそれぞれに応じた変化をすることになります．質量限界の例を表 1 に挙げました．

| 天体 | 名前 | 質量 |
|---|---|---|
| 赤色巨星になる前の星の等温コア | シェーンベルグ-チャンドラセカール限界 | 全質量の 10% |
| 白色矮星 | チャンドラセカール限界 | 1.46 $M_\odot$ *1 |
| 中性子星 | トルマン-オッペンハイマー-ヴォルコフ限界 | 2.0 $M_\odot$ *2 |

表 1　質量の上限

この記事では 2 章でシェーンベルグ-チャンドラセカール限界，3 章でチャンドラセカール限界を扱います．限界質量の値はもちろん導出方法も異なりますが，基本的には力の釣り合い (静水圧平衡) によって説明することができます．

## 1.2 静水圧平衡

球対称な天体を考えます．中心からの半径 $r$ から $r+\varDelta r$ のあいだにある密度 $\rho$ の物質で力の釣り合いを考えると，

$$p(r) = p(r+\varDelta r) + \frac{GM_r \rho \varDelta r}{r^2} \tag{1.1}$$

となります．$p(r)$ は半径 $r$ での圧力，$M_r$ は半径 $r$ 以下にある物質の質量です．よって，

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} \tag{1.2}$$

この式が成り立っている状態を静水圧平衡といいます．星の圧力が重力と釣り合って星を安定に保っている状態です．

## 1.3 ビリアル定理

半径 $R$ の星で静水圧平衡を考えます．外から圧力 $p_{\mathrm{e}}$ を受けているとします*3．

静水圧平衡の (1.2) 式に $4\pi r^3$ をかけて積分すると，

$$\int_0^R 4\pi r^3 \frac{dp}{dr} dr = \int_0^R 4\pi r^3 \left(-\frac{GM_r\rho}{r^2}\right) dr \tag{1.3}$$

左辺は部分積分します．星の表面 $r=R$ で圧力 $p=p_{\mathrm{e}}$ なので，

$$(\text{左辺}) = \Big[4\pi r^3 p(r)\Big]_0^R - 3\int_0^R 4\pi r^2 p\ dr \tag{1.4}$$

$$= 4\pi R^3 p_{\mathrm{e}} - 3\int_V p\ dV \tag{1.5}$$

内部エネルギー密度を $\rho u$ とすると，$p=(\gamma-1)\rho u$ から (導出は補足 4.1)，

$$-3\int_V p\ dV = -3\int_V (\gamma-1)\rho u\ dV = -3(\gamma-1)U \tag{1.6}$$

$U$ は星の持つ内部エネルギーです．一方で右辺は，

$$(\text{右辺}) = \int_0^R 4\pi r^2 \rho \left(-\frac{GM_r}{r}\right) dr =: \Omega \tag{1.7}$$

括弧の中身が重力ポテンシャルなので，被積分関数は無限遠にある物質を半径 $r$ の位置に持っていったとき解放されるエネルギーと言えます．これを積分した $\Omega$ という量は，星に物質を放り込んで半径 $R$ の星を作ったときに解放されるエネルギーを表します．逆に，星を重力に逆らってバラバラにするために必要なエネルギーが $-\Omega$ であると考えることもできます．$\Omega$ を重力エネルギーといいます．$\Omega$ は負であることに注意してください．

以上から，ビリアル定理

$$4\pi R^3 p_{\mathrm{e}} - 3(\gamma-1)U = \Omega \tag{1.8}$$

を得ることができました*4．

ビリアル定理は，静水圧平衡を積分形で表したものに相当します．

---

*1 $M_\odot$ は太陽の質量を表しています．

*2 モデルによって値が変わってしまうので，限界質量の値ははっきりと分かっていません．これを超える質量のものも発見されています．

*3 外圧を考慮しなければならない状況はそこまで多くない印象です．今回扱う主系列後の星のヘリウムコアか，星間ガス雲の収縮 (ボナー-エバート質量) くらいだと思います．通常は星の表面で圧力はゼロとします．

*4 断熱指数 $\gamma$ で星の安定性を議論することもできます．外圧なし ($p_{\mathrm{e}}=0$) の状況を考えてみます．ビリアル定理は

$$3(\gamma-1)U + \Omega = 0 \tag{1.9}$$

# 2　シェーンベルグ-チャンドラセカール限界

## 2.1　主系列後の星

太陽などの主系列星は，水素の核融合 (水素燃焼) でエネルギーを生み出し輝いています．星が年老いて燃料となる水素が減っていくと，どのようなことが起こるのでしょう．

水素燃焼が進むと，星内部でヘリウムの割合が増えます．ヘリウムは重いので星の中心部に溜まります．つまり，年老いた星はヘリウムの多い内部コアと水素の多い外層という 2 層構造を形成します．ヘリウムの核融合を起こせるほど高温でないと，内部コアのすぐ外側で水素の核融合が起きることになります．これを水素殻燃焼といいます．

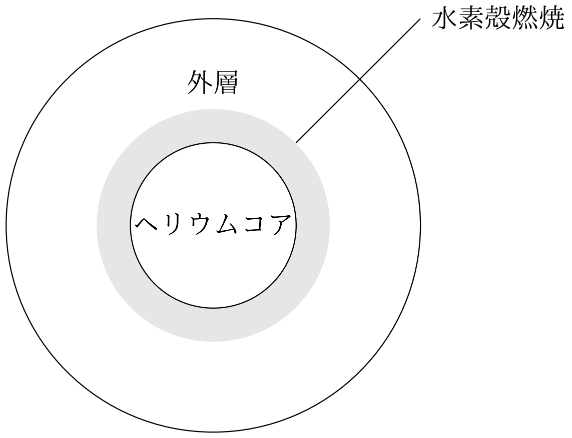


図 1　主系列後の星の構造

一般の球対称な星の内部について，半径 $r$ の球面を単位時間に通過するエネルギー $L_r$ は

$$L_r = -4\pi r^2 \frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr} \tag{2.1}$$

と書くことができます．式の詳細には触れないことにして[*5]，この式の意味を考えてみます．式を見ると，温度 $T$ を半径 $r$ で微分した量に $L_r$ が比例していることがわかります．場所による温度の違い，温度勾配がエネルギーの輸送を生んでいると捉えることができます．核融合の起きていないヘリウムコアにエネルギーの移動があるとあっという間に不安定になってしまうので，ここではエネルギーの移動がない，すなわちコアの温度は一定であると仮定しましょう．

こうした等温なコアが外圧と重力に抗えなくなるときの質量が，シェーンベルグ-チャンドラセカール限界質量となります．

## 2.2　シェーンベルグ-チャンドラセカール限界

等温なヘリウムコアの存在条件を考えます．ここでは簡単に単原子分子 ($\gamma = 5/3$) を考えます．外圧のあるビリアル定理は

$$4\pi R_{\mathrm{c}}^3 p_{\mathrm{e}} - 3(\gamma - 1)U = \Omega \tag{2.2}$$

---

です。星の持つエネルギーは内部エネルギーと重力エネルギーなので，

$$E = U + \Omega \tag{1.10}$$

$-\Omega$ は星を重力に逆らってバラバラにするために必要なエネルギーを表しているのでした．内部エネルギー $U$ が $-\Omega$ より大きければ，星はバラバラになれるだけのエネルギーを持っていることになり，不安定です．つまり $-\Omega$ と $U$ のどちらが大きいか，言い換えれば $E$ の正負が重要になります．$E > 0$ のとき星は不安定，$E < 0$ のとき重力的に束縛されて安定です．ビリアル定理を使えば，

$$E = U + \Omega = (4 - 3\gamma)U \tag{1.11}$$

となるので，$\gamma > 4/3$ のとき安定，$\gamma < 4/3$ のとき不安定となります．

*5 [1] の 2 章や [4] の 5 章に説明があります．

でした．コアの質量を $M_{\mathrm{c}}$，コアの平均分子量を $\mu_{\mathrm{c}}$，水素原子の質量を $m_{\mathrm{H}}$ とすると，内部エネルギーは

$$U = \frac{3}{2}\frac{M_{\mathrm{c}}}{\mu_{\mathrm{c}} m_{\mathrm{H}}} kT \tag{2.3}$$

です (平均分子量 $\mu_{\mathrm{c}}$ については補足 4.2)．重力エネルギーは，係数は気にしないことにして，

$$\Omega = -C\frac{GM_{\mathrm{H}}^2}{R_{\mathrm{c}}} \tag{2.4}$$

と書きます．実際の $C$ は数値計算で求めることになりますが，今回は質量に上限があることを見たいので値は気にしません．このとき外圧は，

$$p_{\mathrm{e}} = \frac{3M_{\mathrm{c}}kT}{4\pi\mu_{\mathrm{c}} m_{\mathrm{H}}}\frac{1}{R_{\mathrm{c}}^3} - \frac{CGM_{\mathrm{c}}^2}{4\pi}\frac{1}{R_{\mathrm{c}}^4} \tag{2.5}$$

となります．これをグラフに書くと図 2 のようになります．

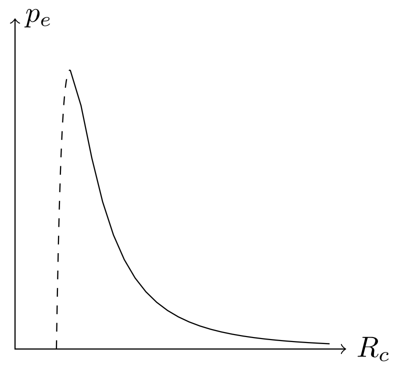


図 2　外圧とコアの半径の関係

ある圧力を超えると対応する $R_{\mathrm{c}}$ がないことが読み取れます．ビリアル定理，ひいては静水圧平衡の解が存在しないということは，力の釣り合いは成り立たず膨張または収縮すると言えます．

コアの質量 $M_{\mathrm{c}}$ に対してとりうる最大の圧力 $p_{\mathrm{e,max}}$ があって，その圧力を与える外層の質量が決まります．こうしてコアの質量と全質量の比について，上限

$$\frac{M_{\mathrm{c}}}{M} \leq 0.37\left(\frac{\mu_{\mathrm{e}}}{\mu_{\mathrm{c}}}\right)^2 \tag{2.6}$$

がわかりました．実際の計算はシェーンベルグとチャンドラセカールによって行われました [6]．

平均分子量はコアで $\mu_{\mathrm{c}} = 4/3$，外層で $\mu_{\mathrm{e}} \simeq 0.62$ なので，

$$q_{\mathrm{SC}} \coloneqq \frac{M_{\mathrm{c,max}}}{M} \simeq 0.1 \tag{2.7}$$

となります．

圧力の最大値は，

$$p_{\mathrm{e,max}} = \frac{1}{12\pi}\frac{1}{C^3G^3M_{\mathrm{c}}^2}\left(\frac{9kT}{4\mu_{\mathrm{c}} m_{\mathrm{H}}}\right)^4 \tag{2.8}$$

です．コアの質量 $M_{\mathrm{c}}$ が大きくなるほど，圧力の最大値は小さくなっていきます．つまり，水素燃焼が進んでヘリウムコアが成長してしまうと，どんどん耐えられる圧力が小さくなってしまいます．

## 2.3　赤色巨星

ヘリウムの等温コアが成長し，シェーンベルグ-チャンドラセカール限界を超えると，コアは重力収縮を始めます．この収縮によって解放されたエネルギーは星を加熱し，外層部は膨張することになります．こうして星は赤色巨星に進化します[*6]．

[*6] 正確には星の質量によって赤色巨星になる前の振る舞いが異なります．軽い星では電子の縮退圧が効いてくることがあり，重い星は重力収縮の加熱によってヘリウムの核融合が始まることがあります．

# 3　チャンドラセカール限界

## 3.1　ポリトロープ

静水圧平衡の (1.2) 式は

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} \tag{3.1}$$

でした．半径 $r$ 以内にある質量 $M_r$ は

$$M_r = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr \tag{3.2}$$

と書けるので，静水圧平衡の (1.2) 式は $\rho(r)$ と $p(r)$ という 2 つの未知関数を含みます．$\rho$ と $p$ の関係を与える式がもう 1 つあれば，連立させて星の構造を決定することができるはずです．

状態方程式の形を

$$p = K\rho^{1+\frac{1}{N}} \tag{3.3}$$

と仮定します．これをポリトロープ関係式といいます．$K$ は何かの定数で，$N$ をポリトロープ指数といいます．

静水圧平衡の式と状態方程式 (ポリトロープ関係式) を連立させ，文字を少し変えて整理したものをレイン-エムデン方程式と言います．具体的な形は，

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^N \tag{3.4}$$

です*7．境界条件は中心で密度が有限 $\rho(0) = \rho_{\mathrm{c}}$，圧力勾配がない $p'(0) = 0$ ことを課します．

この方程式はいくつかの N について解が知られているので，状態方程式の形が決定できれば，星の圧力や質量がわかるということになります．

## 3.2　温度 0 理想フェルミ気体の状態方程式

白色矮星の内部は高密度で，電子の縮退圧で星を支えています．この状態は温度 0 の理想フェルミ気体で近似できます*8．

温度 0 の理想フェルミ気体の状態方程式は，数密度が小さい非相対論的なとき，

$$p = \frac{1}{5}(3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{m_e}n_e^{5/3} \tag{3.5}$$

となります．一方で，数密度が大きい超相対論的なとき，

$$p = \frac{1}{4}(3\pi^2)^{1/3}\hbar c n_e^{4/3} \tag{3.6}$$

となります．

## 3.3　チャンドラセカール限界

$n \propto \rho$ より，密度が小さいときの状態方程式は $p \propto \rho^{5/3}$ となっています。これにより $N = 3/2$ ポリトロープ球で記述されることがわかります．このとき

$$M = 2.73\mu_{\mathrm{e}}^{-2}\left(\frac{\rho_{\mathrm{c}}}{\rho_{\mathrm{cr}}}\right)^{1/2} M_\odot \tag{3.7}$$

となります．密度が大きいときの状態方程式は $p \propto \rho^{4/3}$ となっているので $N = 3$ のポリトロープ球で記述されます．このとき

$$M = 5.83\mu_{\mathrm{e}}^{-2} M_\odot \tag{3.8}$$

*7 導出は [1] や [4] を参照してください．

*8 詳しくは [1] や [4] を参照してください．

となります．中心密度が増加すると全質量も増加しますが，やがて質量の増加は止まり一定の値になることがわかります．これを図に描けば，

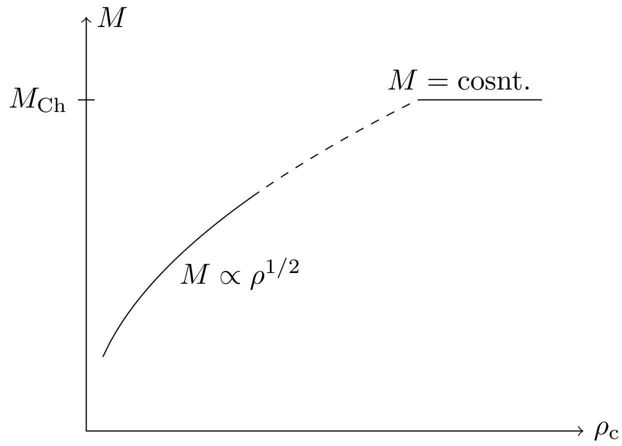


図 3　中心密度と全質量の関係

のようになります．質量 $M_{\mathrm{Ch}}$ を超える質量では対応する $\rho_{\mathrm{c}}$ がないので，電子の縮退圧ではその質量を支えることができず不安定になることがわかります．

この上限質量をチャンドラセカール限界質量といい，白色矮星では $\mu_e = 2$ なので，

$$M_{\mathrm{Ch}} = 1.46 M_{\odot} \tag{3.9}$$

となります．

### 3.4　トルマン-オッペンハイマー-ヴォルコフ限界

チャンドラセカール限界は白色矮星を考えていましたが，中性子の縮退圧で重力に抗っている天体の中性子星でも同じような議論ができます．ただし，中性子星は非常に高密度で核力の効果が大きく効くため，状態方程式を考えることはとても困難です．中性子星の上限質量としてトルマン-オッペンハイマー-ヴォルコフ限界 (TOV 限界) というものが考えられていますが，まだはっきりとわかってはいません．

## 4　補足

### 4.1　圧力と内部エネルギーの関係: $p = (\gamma - 1)\rho u$

理想気体の状態方程式は

$$p = \frac{\rho}{M} RT \tag{4.1}$$

という形をしています．$M = \mu m_{\mathrm{H}} N_{\mathrm{A}}$ はモル質量 (1 mol あたりの質量) です．ここでマイヤーの関係 $c_p - c_v = R/M$ を用いると，

$$p = (c_p - c_v)\rho T \tag{4.2}$$

を得ます．$c_p$ と $c_v$ はそれぞれ定圧比熱と定積比熱です．断熱指数は $\gamma = c_p/c_v$ と書けるので，単位質量あたりの内部エネルギー $u = c_v T$ を用いて

$$p = (\gamma - 1)\rho c_v T = (\gamma - 1)\rho u \tag{4.3}$$

を得ることができました[*9]．

[*9] 熱力学第 1 法則から導く方法もあります．[5] など (日本語の文献もどこかにあると思います)．

### 4.2 平均分子量 $\mu$

平均分子量 $\mu$ は，ガス分子[*10]の数密度 $n$ とガスの密度 $\rho$ に対して，

$$n = \frac{\rho}{\mu m_{\mathrm{H}}} \tag{4.4}$$

を満たす量です．$m_{\mathrm{H}}$ は水素原子の質量です．

平均分子量はガスによって異なります．2 種類の物質が混ざっている場合，

$$n = n_1 + n_2 = \frac{\rho}{\mu_1 m_{\mathrm{H}}} + \frac{\rho}{\mu_2 m_{\mathrm{H}}} = \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)\frac{\rho}{m_{\mathrm{H}}} \tag{4.5}$$

となるので，平均分子量は

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \tag{4.6}$$

となります．

例えば，水素が電離したガスは $\mu_i = 1$ の水素イオンと $\mu_e = 1$ の電子からなるので，平均分子量は $\mu = 0.5$ です．ヘリウムが電離したガスは $\mu_i = 4$，$\mu_e = 2$，$\mu = 4/3$ となります．

## 参考文献


[1] 高原文郎. 宇宙物理学 星・銀河・宇宙論. 朝倉書店, 2015

[2] 野本憲一, 定金晃三, 佐藤勝彦. 恒星. 日本評論社, 2009,(シリーズ現代の天文学, 7 巻)

[3] 田崎晴明. 統計力学 II. 培風館, 2008

[4] R. Kippenhahn, A. Weigert, A. Weiss. Stellar Structure and Evolution Second Edition. Springer, 2012

[5] S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky. Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars. Wiley, 1983

[6] M. Schönberg, S. Chandrasekhar. On the Evolution of the Main-Sequence Stars. The Astrophysical Journal 96, 161 (1942)


[*10] 一般に分子というと複数の原子が共有結合したものを言いますが，ここでは電離した陽イオンや電子も 1 つの分子と読んでしまっています．