

生物物理班 力学系

目次

1	力学系とは	2
2	微分方程式, 差分方程式	2
3	相空間とヌルクライン	3
4	例: ロトカ・ヴォルテラの競争方程式	4
5	固定点の安定性解析	6
5.1	線形化	8
5.2	他の手法	10
6	リミットサイクル	11
7	終わりに	12

1 力学系とは

力学系 (dynamical system) とは状態が時間とともに決定論的に変化するシステムのことを指します.*1例えば、惑星の公転運動やバネの振動などが挙げられます。また、全く違う例として化学反応や、生物の個体変動についても時間と共に変化することから、適切なモデルを与えてやれば力学系の一種ということができます。このように力学系は力学だけにとどまらない概念で、物理学の分野というよりは数学の分野の話題です。今回の記事では力学系の議論の基礎的な部分 (2次元でのアトラクターの議論) と生物物理学の分野での使われ方について触れていこうと思います。

2 微分方程式, 差分方程式

力学系を式で記述する際には離散系なら差分方程式, 連続系なら微分方程式が用いられます。微分方程式とはある未知関数 $x(t)$ とその微分形との関係式です。色々例を挙げてみます。

- 漸化式

差分方程式とは高校で習った漸化式のことです。実際

$$x_{n+1} = ax_n + b \quad (1)$$

という漸化式が与えられた時, ある状態量 $x(t)$ があって, 時刻 $(n+1)\Delta t$ の x の値が時刻 $n\Delta t$ の x の値を使ってこのように表されると解釈することができます。これは系の時間変化を記述しているので力学系を表しています。

- 原子核の崩壊

放射性同位体は時間とともに一定の割合 λ で原子核が崩壊します。その時多数の原子核の集まりを考えると, 残っている不安定な原子核の数 N に, 崩壊する原子核の数は比例します。これを微分方程式で記述すると

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (2)$$

とかけます。このように未知関数 N の一階微分とそれ以下の未知関数の微分 (N は 0 階微分と扱います。) でかける微分方程式を一階の微分方程式と呼びます。そして未知関数 N とその微分系が一次で結ばれている時その微分方程式を線形と呼びます。よって今回の微分方程式は一階の線形微分方程式です。

この方程式を解くと解は始めの原子核の個数 N_0 を用いて

$$N = N_0 \exp(-\lambda t) \quad (3)$$

とかけます。

- ニュートンの運動方程式

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F \quad (4)$$

*1 確率論的なノイズを含めて考えるランダム力学系という分野も研究されています。

も質点の質量を m , 位置を x , 加わる力を F として上のようにかければ, 微分方程式です. 特にバネの運動を取り上げてみます. バネの運動ではバネ定数を k , おもりの質量を m とすると

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (5)$$

といった微分方程式がかけます. 今回は未知関数 x の二階微分が登場していて, x とその微分系は線形で結ばれているので二階の線形微分方程式です. この時は

$$v \equiv \frac{dx}{dt} \quad (6)$$

とおくと

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (7)$$

$$m \frac{dv}{dt} = -kx \quad (8)$$

と二つの微分方程式に書き直すことができます. これを解くと定数 A, α を用いて

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (9)$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \alpha) \quad (10)$$

とかけます.

- ロジスティック方程式

ロジスティック方程式は生物の個体数増加について考える際のモデルです. 生物の個体数 $N(t)$ が一定割合 r で増加するとすると個体数の時間変化は

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad (11)$$

とかけます. 一方でこのままだと限りなく生物の個体数は増え続けることになりませんが, 実際には食料などの資源に限りがあるため, 一定の個体数を上回ると死亡率が生存率よりも高くなると考えられます. この影響を考慮するために, Verhulst によって環境収容力 K を考慮したロジスティック方程式

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (12)$$

が考案されました. この微分方程式は 1 階の微分方程式で, N^2 に比例する項があるので非線形です. 今までの例では微分方程式を解くことができましたが, 実はこういった非線形の微分方程式では解くことができない例が多くあります*2.

今回の記事では微分方程式を用いて表される力学系について主に扱います.

3 相空間とヌルクライン

上で述べたように微分方程式は解析的に解を求められないことがよくあります. また, 上のロジスティック方程式を解くと, 解は

$$N = \frac{N_0 K \exp(rt)}{K - N_0 + N_0 \exp(rt)} \quad (13)$$

*2 たとえば, 互いに万有引力で引きつけ合う 3 つの天体の運動の軌道の解は一般的には求積法では求められないことが知られています. 一方で, 今回使用したロジスティック方程式は工夫すれば解くことができます.

となるのですが、この式を見てもこの系がどういう挙動をするのかよくわからないと思います。そうした時にいくつかの変数を軸にとった空間である相空間上での点の流れを見ると状態の変化がより理解しやすくなる場合があります。例として先ほど扱ったバネの運動を見てみます。微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (14)$$

$$m \frac{dv}{dt} = -kx \quad (15)$$

でしたので、変化の方向に矢印を書いていくと以下の図のようになります。この図からこの系は相平面上で回転をしていて、矢印を辿っていくと元の位置に戻ることがわかります。そのため、バネの運動には周期性があるといえます。式からもわかると思いますが、 x 軸上では v 方向への流れが 0、 v 軸上では x 方向の流れが 0 になっています。このようなどれかの変数の変化量が 0 になる地点を結んだものをヌルクラインと呼びます。(赤線で示しました。)*³そして、全てのヌルクラインが交わる点では、どの変数も流れが 0 なので、この点を固定点と呼びます。今回は原点が固定点となっています。

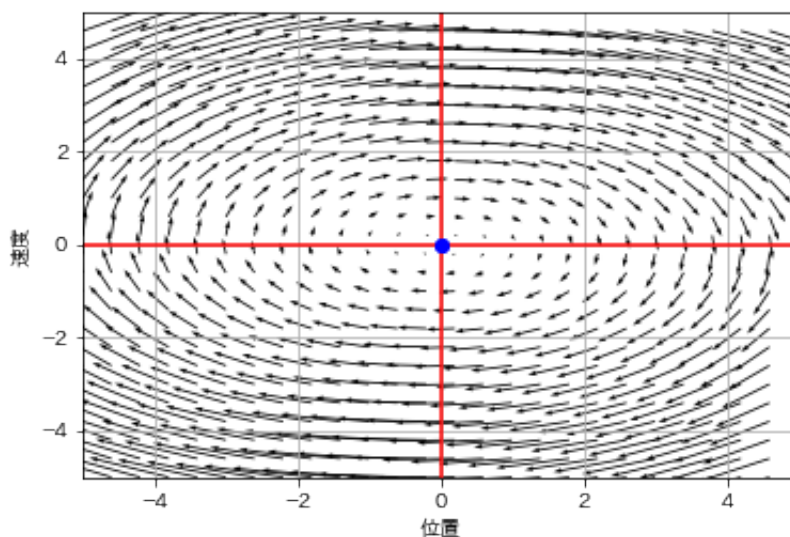


図 1: バネの振動の相平面

4 例：ロトカ・ヴォルテラの競争方程式

もう一つ相空間へのプロットの例を出してみようと思います。取り上げるのはロトカ・ヴォルテラの競争方程式と呼ばれるもので

$$\frac{dx}{dt} = x(r_1 - \beta_1 x - \gamma_{12} y) \quad (16)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(r_2 - \beta_2 y - \gamma_{21} x) \quad (17)$$

*³ 今回は 2 次元相平面だったので、ヌルクラインは線でしたが、3 次元以上だと面になることもあります。

という方程式で表されます. このモデルは2種類の動物が同一の食糧をめぐる争うときの個体数変化を表現しています. 今回はウサギ (個体数 x) と羊 (個体数 y) が草をめぐる争っているとします. r はそれぞれの種が自然に増加していく際の係数, β は増えすぎると同じ種間で食料の取り合いが起こるとした係数 (種内競争係数), γ は違う種間での食料の取り合いを表現した係数 (種間競争係数) です. 今回は具体的にそれぞれの係数に適当な値を与えて

$$\frac{dx}{dt} = x(3 - x - 2y) \quad (18)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(2 - y - x) \quad (19)$$

という方程式を扱います.*⁴(この微分方程式を解くことなく, 相空間にプロットすることで大体の挙動を理解することができます. 流れをプロットすると図2のようになります.*⁵

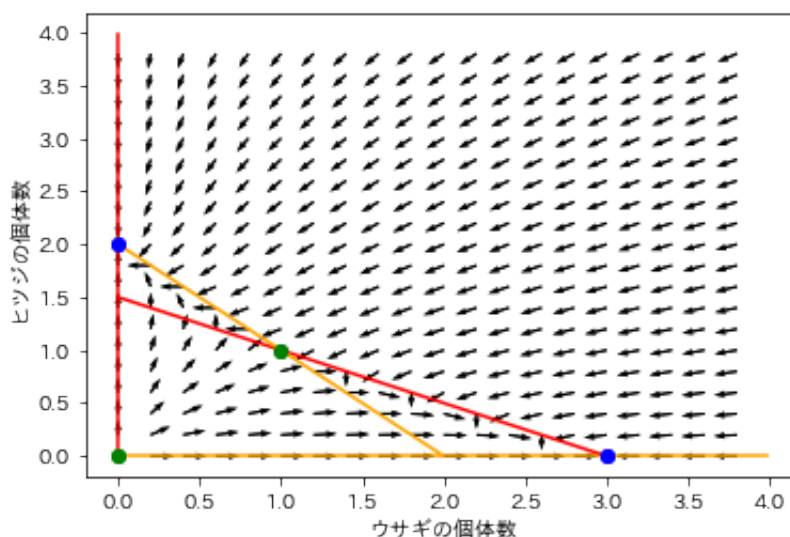


図2: ロトカヴォルテラの競争方程式の流れ

赤線で示したのは $dx/dt = 0$ のヌルクラインで, 橙線で示したのは $dy/dt = 0$ のヌルクラインです. 赤線をまたぐと x 方向に移動する向きが反対になり, 橙線をまたぐと y 方向に移動する向きが反対になっていることがわかると思います.(ちょっと見づらいかもしれませんが...) 二色の線の交点では, 流れが x, y 共に0なので固定点が表れています. また矢印を辿っていくことで今回の固定点には二種類あることがわかると思います. 一つ目は青で示した点で矢印がこの固定点に向かっていくような固定点, もう一つは緑で示した矢印がこの固定点から離れていくような固定点です. それぞれを安定固定点, 不安定固定点と呼びます. 実際, いくつかの解軌道についてもプロットしてみると, 図3の青線ようになります. ある領域にあれば固定点 $(0, 2)$ にいき, また, ある領域にあれば固定点 $(3, 0)$ に向かっていくことがわかると思います. それぞれの領域のことを固定点の吸引領域 (ベイスン) と呼びます.

*⁴ 参考文献 [2] の p.171 からの例を借りました.

*⁵ 図がめっちゃくちゃ見づらくなったので, 矢印の大きさは規格化してあります. 向きの雰囲気を見てください.

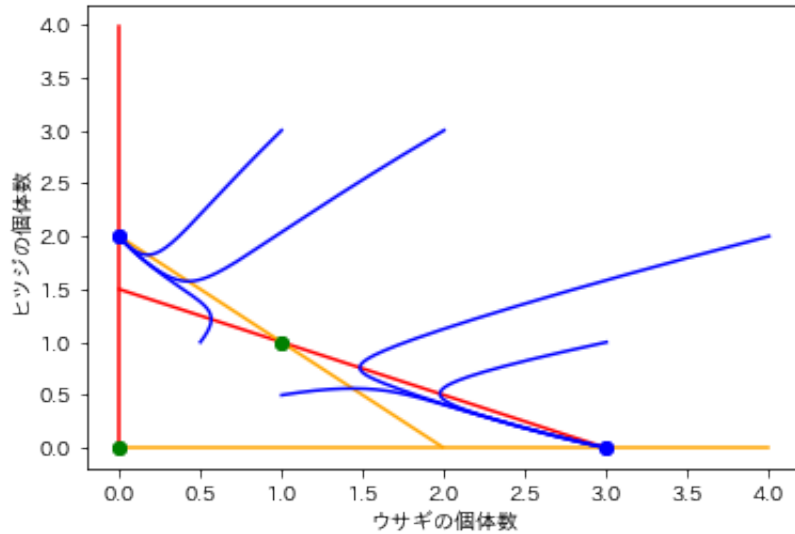


図 3: いくつかの解軌道 (青線) をプロット

このように相空間を眺めることで解の挙動がいろいろとわかります. 今回の微分方程式の結論としては, 長時間経過した後は, $(3, 0)$ もしくは $(2, 0)$ の固定点へと収束する. つまり, ウサギとヒツジの共存はできなかったということになります.*6

5 固定点の安定性解析

先ほどバネの例を出したときに固定点という用語を用いました. 固定点とは変数を (x_1, x_2, \dots, x_n) としたときに全ての x_i で

$$\frac{dx_i}{dt} = 0 \quad (20)$$

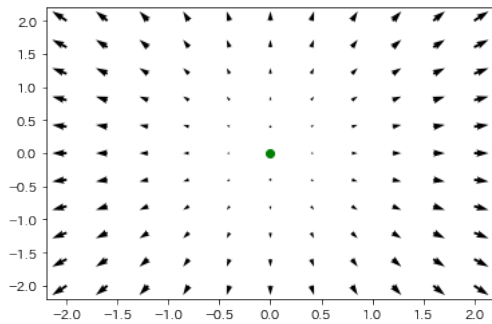
となるような点のことです. 変数を固定点におけばもちろん状態はその点にとどまり続けます. 一方で, 固定点から僅かにずらした点に変数を設定すると, 状態はどう変化するでしょうか. 例として

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad (21)$$

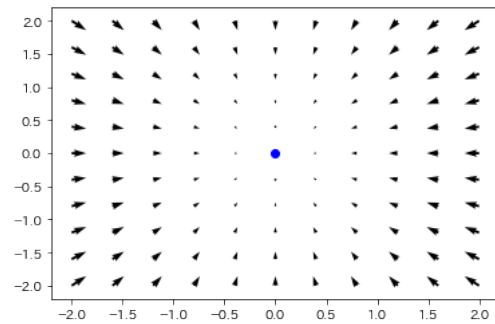
$$\frac{dy}{dt} = ay \quad (22)$$

という連立微分方程式を考えます. この式から固定点は $a \neq 0$ の時 $(x, y) = (0, 0)$, $a = 0$ の時相平面上の任意の点となるのがわかります. この流れを a の値ごとに場合分けしてプロットしてみると以下ようになります. $a = 0$ の時は相平面全体に流れがなくてつまらないので省きます. 原点付近の矢印をみると, $a < 0$ の時は $(0, 0)$ 近傍に点を置いても固定点 $(0, 0)$ に流れていくことがわかります. このような固定点を安定固定点と呼びます.

*6 今回の初期条件ではどちらかがいなくなってしまうましたが, 他の初期条件で試してみると, 違った結果が得られます. ロトカボルテラの競争方程式の wikipedia(参考文献 [4]) にのっています.



(a) $a=0.5$ のとき



(b) $a=-0.5$ のとき

またこの微分方程式の解は簡単に導けて

$$x = x_0 \exp(at) \quad (23)$$

$$y = y_0 \exp(at) \quad (24)$$

とかけます。 a が負の数の時は $\exp(at)$ は時間が経つにつれて 0 に近づくので固定点 $(0, 0)$ に引き込まれ、 a が正の時は $\exp(at)$ は時間が経つと無限に大きくなっていくので、固定点から離れていくと理解することができます。

次に

$$\frac{dx}{dt} = 3x + y \quad (25)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + 3y \quad (26)$$

という例を考えます。固定点は $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ がともに 0 になる点 $(0, 0)$ です。以下では習ってない方向けの説明をします。線形代数を習った方は冗長な説明になりますがご容赦ください。この連立微分方程式は変数が分離されていないので複雑に見えますが、連立漸化式を解く際に

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = \beta(a_n - \alpha b_n) \quad (27)$$

を満たす α, β を探し出したのと同じように (25) 式 + (26) 式と (25) 式 - (26) 式を行ってみます。そうすると、

$$\frac{d(x+y)}{dt} = 4(x+y) \quad (28)$$

$$\frac{d(x-y)}{dt} = 2(x-y) \quad (29)$$

となって、これは先ほどの微分方程式と同じような手法で解けて

$$x + y = (x_0 + y_0) \exp(4t) \quad (30)$$

$$x - y = (x_0 - y_0) \exp(2t) \quad (31)$$

と書けます。つまり解は

$$x = \frac{1}{2}((x_0 + y_0) \exp(4t) + (x_0 - y_0) \exp(2t)) \quad (32)$$

$$y = \frac{1}{2}((x_0 + y_0) \exp(4t) - (x_0 - y_0) \exp(2t)) \quad (33)$$

と求められます. このように線形な連立微分方程式は一次結合をとることで簡単に解くことができます. そして得られた解は式 28, 式 29 の係数を a とした $\exp\{at\}$ の線型結合になることがわかります.*7この系の時間発展を考えると, 結局 $\exp(4t)$ や $\exp(2t)$ が無限大に発散してしまうので固定点からは離れていき, 不安定固定点だったことがわかります. 発散の原因になっているのは (28) 式や (29) 式でのそれぞれ $x + y, x - y$ の係数だったことがわかると思います. そのため, この係数を a, b とおいて同様に解を求めてみるとそれぞれ

$$x = \frac{1}{2}((x_0 + y_0) \exp(at) + (x_0 - y_0) \exp(bt)) \quad (34)$$

$$y = \frac{1}{2}((x_0 + y_0) \exp(at) - (x_0 - y_0) \exp(bt)) \quad (35)$$

となります. a, b の正負で場合わけしてみると, a も b も正だった時は先ほどと同じように不安定固定点となります. a が正で b が負だった時は $\exp(at)$ の項が発散してしまい, これも不安定固定点になります. b のみが正だった時も同様の結果となり, 結局安定固定点であるのは a も b も負である時のみになります. ちなみに今は実数の範囲で考えましたが, 複素数の範囲でも似たようなことが言えます. 指数部分に虚数が来ると指数法則とオイラーの公式より

$$\exp(a + bi) = \exp(a) \exp(bi) = \exp(a)(\cos b + i \sin b) \quad (36)$$

と書き換えられます. 後ろの項は絶対値が常に 1 になっていることからわかるように回転を表すだけです. よって, 不安定固定点か安定固定点かを見極めるには実部の符号だけを見ればよいことがわかります.

5.1 線形化

上では線形の微分方程式を扱いましたが, 非線形の微分方程式の場合にはどうしたら良いでしょうか. 非線形の場合には (28) 式や (29) 式のような書き換えはできません. この時には線形化という操作を行います. 非線形の方程式もある点の近辺だけで見たら線形の方程式のように見えます. 具体的には x が a の近辺にある時一次近似

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a) \quad (37)$$

が成り立ちます. 今回は平面上の話なのでこれを拡張したヤコビ行列

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (38)$$

を使います. ここで出てくる $\partial/\partial x$ の記号は他の変数を定数と見做して微分を行う偏微分の記号です. これを用いれば固定点 (x_0, y_0) 周りの流れを

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

*7 今回は独立な式 28, 29 が取れましたが, そうでない時があります. (固有値が縮退していて対角化ができない時です.) この時は変数が分離できず, 解は $\exp(at)$ と $t \exp(at)$ の線型結合となります. (今回は扱いません.)

と近似することができます。これによってある固定点 (x_0, y_0) 周りの線形化を行うことができ、後は先ほどと同じような手順で解くことができます。これによって先ほど扱ったロトカ・ヴォルテラの競争方程式の固定点周りの安定性を矢印からではなく、数式から分析することができるようになりました。やってみましょう。まずヤコビ行列を求めます。偏微分はそれぞれ $f(x, y) = x(3 - x - 2y)$, $g(x, y) = y(2 - x - y)$ とすると

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - 2x - 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x \quad (40)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -y, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2 - x - 2y \quad (41)$$

となります。固定点 $(0, 0)$ の安定性を調べるときはこの偏微分に $x = y = 0$ を代入すればいいのでこの近傍でのヤコビ行列は

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (42)$$

となります。よって解くべき微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = 3x \quad (43)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2y \quad (44)$$

となります。どちらも正なので $(0, 0)$ は不安定固定点であることが確かめられます。次に固定点 $(3, 0)$ の周りの安定性を調べます。ヤコビ行列は

$$J = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (45)$$

になります。微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = -x - 2y \quad (46)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - y \quad (47)$$

これはちょっと変形がきついですから、

$$\frac{d(\sqrt{2}x - y)}{dt} = (-1 + \sqrt{2})(\sqrt{2}x - y) \quad (48)$$

$$\frac{d(\sqrt{2}x + y)}{dt} = (-1 - \sqrt{2})(\sqrt{2}x + y) \quad (49)$$

と直せば変数分離ができます。この時の係数は $-1 + \sqrt{2}$ は正で $-1 - \sqrt{2}$ は負なのでこの点も不安定であることがわかります。同様にして他の二点 $(0, 2)$, $(3, 0)$ が安定であることも示せるので是非やってみてください。

上ではあまり触れませんでした。ここには線形代数が深く関わっています。(まだ習ってない方は一年の A セメで習うと思います。) この記事では微分方程式の書き換えを変数を分離するために何度か行いましたが、対角化という手法を使えば簡単に行うことができます。また途中で出てきた a, b は固有値と呼ばれるものです。つまり、今回の章で述べたことは固有値の実部の符号によって固定点の安定性を判別できると言い換えられます。

5.2 他の手法

前の章で扱った線形化は実は完璧ではありません。^{*8}一つ目は線形近似をしているため、十分固定点から離れた点には適用できないという点です。もう一つが深刻な問題でごく近傍だとしても線形化の結果と実際の挙動が異なる場合があるということです。例として

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2) \quad (50)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2) \quad (51)$$

を考えてみます。固定点 $(0, 0)$ の周りで線形化するとヤコビ行列は

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

なので固有値は $\pm i$ になります。よって状態は原点を中心に回転する原点に近づきもせず、原点から離れもせずといった安定な状態になるだろうと予測できます。一方で実際の流れは以下ようになります。

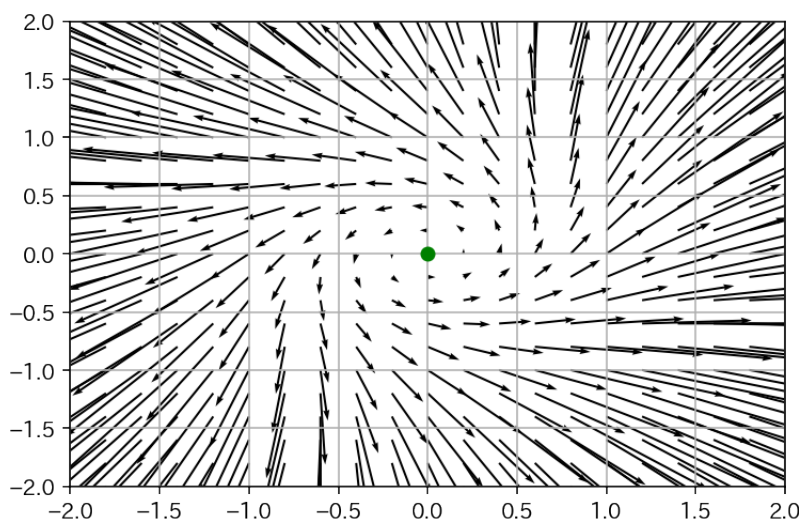


図 5: 線形化がダメな例

このように僅かながらではありますが、原点から離れていく方向に矢印が向いています。そのため、線形化から推測した結論とは異なってこの固定点は不安定固定点です。

これを示すためにこの微分方程式を極座標で表してみます。 $x^2 + y^2 = r^2$ なので両辺 t で微分して少し変形すると

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \quad (53)$$

となります。これに上の微分方程式を代入していくと結果は

$$\frac{dr}{dt} = r^3 \quad (54)$$

^{*8} さっき扱ったロトカボルテラの競争方程式は大丈夫です。

となります。よって時間が経つにつれて、原点付近ではとてもゆっくりですが、それでも原点から離れていき、いつかは無限遠に達することがわかります。

このように線形化では僅かな挙動を見落としてしまうことがあります。一般的に言うと、今回のようにどれかの固有値の実部が0の時、線形化から示した結果が間違っていることがあります。こうしたこともあるので力学系の挙動を求める手法は他にも色々あり、その一つがリアプノフ関数を用いるという手法です。リアプノフ関数 $V(\mathbf{x})$ の候補は (i) ある固定点 \mathbf{x}^* で0をとり、その近傍の領域では正の値をもつ関数です。その関数の候補のうち、(ii) 時間で微分すると固定点を除いた任意の点で0以下になるものがあつたとします。その時、その関数をリアプノフ関数と呼び、解が固定点近傍にとどまり続けることが示せます。リアプノフ関数がこれだけでは何のことかわからないと思うので例をあげます。

微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -x - y \quad (55)$$

$$\frac{dy}{dt} = x^3 - y^3 \quad (56)$$

が与えられたとしましょう。固定点は $(0,0)$ でリアプノフ関数 $V(\mathbf{x})$ として $x^4/4 + y^2/2$ を閃いたとします。この時確かに原点以外でこの関数は正の値をとり、二つ目の条件についても

$$\frac{dV}{dt} = x^3 \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \quad (57)$$

$$= -x^4 - x^3y + x^3y - y^4 \quad (58)$$

$$= -x^4 - y^4 \quad (59)$$

となり常に負であることが示せます。特にこのリアプノフ関数は原点以外で0をとることがないのでこの系は固定点に近づき続けることを示せます(漸近安定)。このようにして固定点周りの安定性を考えることもできます。一方でこの方法にも問題点があります。実はリアプノフ関数をどうやって見つければいいのかという方法が未だに確立されていないことです。

力学系の固有値の安定性を探る方法は他にも色々ありますが、どの手法も完璧というわけではなく、今なお研究が行われています。

6 リミットサイクル

先ほどは固定点に落ち込むか離れていくかを考えましたが、それ以外にもパターンがあります。その例がリミットサイクルです。どういうものかという、しばらくしたら固定点に落ち込むわけではなく、ある特定の周期運動を繰り返すといった軌道のことで、^{*9}例えば、メトロノームは針に力を加えて、少しリズムをずらしたとしてもしばらくすれば、元の一定のリズムを刻むようになります。生物の例でいくと心臓の拍動のリズムは運動した後は乱れますが、しばらくすればいつものリズムに戻ります。生体内では恒常性が重要になるのでこうしたリミットサイクルがよく現れます。

リミットサイクルの例としてファンデルポール振動子の相平面を見てみます。これは真空管を使用した電気回

^{*9} 紛らわしいですが、バネの運動はリミットサイクルではありません。バネの運動は少し位置や速度を外力によって変化させれば、少しだけ違う振幅の周期運動になり、特定の周期運動に戻ることにはならないからです。

路内に現れる振動です. 微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = y \quad (60)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\mu(x^2 - 1)y - x \quad (61)$$

で表されます. これを計算して軌道を書くと図6のようになります. 赤と緑の点を初期値として微分方程式の数値計算を行うと, どちらもある一定の軌道に向かっていくことがわかります. 固定点やリミットサイクルのように相空間上で十分時間が経った時に通るある一定の軌道のことをアトラクターと呼びます. 2次元の相平面上では軌道が有限の範囲にとどまっているならば, そのアトラクターは安定固定点かリミットサイクルに限られるというポアンカレ・ディクソンの定理が成り立っています.

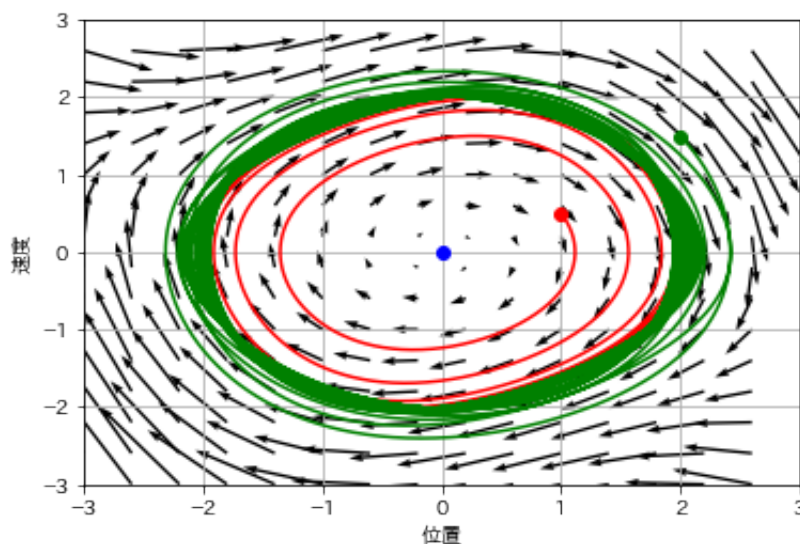


図6: ファンデルポール振動子の相平面 ($\mu = 0.2$)

7 終わりに

今回は変数が2種類である相平面しか扱ってきませんでしたが, 3種類以上の変数を扱っていくことができます. その時はポアンカレ・ディクソンの定理が成り立たず, 新たな他の性質を持つアトラクターも現れるようになります. その一つがカオスです. 決定論的な力学系の考え方ですが, カオスが現れるストレンジアトラクターというアトラクターでは初期値の僅かなずれにより, 結果が大きく異なってしまうという初期値鋭敏性を持っています. その結果, みなさんがよく知っているような予測不可能性をもつカオスが現れます. 今回は安定性の解析のみを扱いましたが, 定数の変化に応じて, アトラクターの現れ方が変化するという分岐も力学系の大きな特徴です. 例えば, 遺伝子の発現において, コードされるタンパク質とされないタンパク質があらわれますが, それは細胞が何らかのパラメータを操作して固定点の安定性を変化させ分岐を起こしていると考えられます.

今回扱えた分野は力学系の中のほんの僅かな分野だけでした. もしこの pdf を見て興味を持った方がいれば, ぜひ色々勉強してみてください. ここまで読んでいただきありがとうございました.

参考文献

- [1] 金子邦彦, 澤井哲, 高木拓明, 古澤力 『細胞の理論生物学 ダイナミクスの視点から』 東京大学出版会
- [2] Steven H. Strogatz 『ストロガッツ 非線形ダイナミクスとカオス』 (田中久陽, 中尾裕也, 千葉逸人訳) 丸善出版
- [3] 群宏, 森田善久 『生物リズムと力学系』 共立出版
- [4] Wikipedia 『ロトカ・ヴォルテラの競争方程式』 <https://w.wiki/54Eu> 2022年4月16日閲覧