CHSH 不等式の解説

Yuta MATSUMOTO

May 2022

1 Introduction

本記事では、CHSH 不等式と呼ばれる不等式について解説します。これは、物理学における状態の話に深く関わる不等式です。物理学の世界では、量子論が発展するに従って、(特に量子論において、) 状態は観測する前から全て決まっているのか、それとも観測時点において決まるのかという議論が続いてきました。前者を提唱したのが Einstein, Podolsky, Rosen の 3 人で、後者を提唱したのが Bohr らです。

2 局所実在論と EPR パラドックス

2.1 局所実在論

状態が確定しているのか、について議論するため、局所実在論について説明します。

局所実在論とは、「局所性」と「実在性」を仮定した理論です。局所性とは、2 つの測定を互いに離れた場所で行った場合、片方の測定 （という操作）が、もう片方の測定結果に（光速を超えて）影響しないという考えです。実在性とは、任意の測定結果は測定の前から決まっているという考え方です。この局所実在論は、古典論とは矛盾しません。

大事なので結論から述べると、実験によって、量子論においてはこの局所実在性が成り立たないことがある、ということが示されました。

これは、我々が生きるスケールでの身近な物理学における直感とは反するように見えます。しかし、量子論においては、観測するまで状態が確定していないことがあるのです。例えば、赤色と白色の球を 1 つずつ、別の箱に入れた場合を考えます。ここで、箱を離れた場所において、それぞれの箱にどちらの色の球が入っているか知らない観測者に同時に開けてもらいます。するとそれぞれの観測者は、片方の箱を開けた時点で、自分の開けた箱の球の色に加えてもう片方の箱に入った球の色も知ることになります。しかし、量子論ではそうではない、という事例をこれから解説していきます。

現在でこそ理論と実験結果が蓄積されていますが、20 世紀前半はこの局所実在論について論争が繰り広げられ、量子論の範囲でも測定結果は観測前から決まっているはずだと主張する物理学者も大勢いました。その代表格が、先ほど述べた Einstein, Podolsky, Rosen の 3 人です。

2.2　EPR パラドックス

上記の 3 人は、局所実在論が量子論の範囲でも成り立つと考え、それを論文で発表しました、原論文では波動関数を用いた抽象的な議論が行われているため、ここでは具体例を用いて説明します。

2.2.1　2 粒子のスピン

(こちらの具体例は [1] EMAN の物理学「ベルの不等式」を参考にさせていただきました。この記事も非常にわかりやすいのでぜひご一読ください。)

スピンが 0 の粒子 2 つが反応して、スピンをもつ粒子が 2 つ生成されたとします。この時、角運動量保存則から、片方のスピンが上向きなら、もう片方は下向きになるはずです。さらに、これを測定時間内に光速でさえ情報が伝わらないほど離れた距離で測定する状況を考えます。もし局所実在論がこの状況で成立するなら、片方のスピンを測定した場合、観測者はもう片方のスピンの状態を測定せずに知ることができます。しかし、これは光の速さより早く情報が伝わっているように見えてしまいます。言い換えれば、それぞれの場所でスピンの向きを観測した時、片方の観測者がスピンの向きを観測した時点で、もう片方の観測者がどの方向でスピンを観測したか、相手の測定結果を聞くことなく推定できてしまうのです。これにより予めスピンの向きは決まっているのではないかと、局所実在論では考えるわけです。(研究が進んだ現代では、このような方法を用いた超高速通信は不可能であると考えられています。その説明は末尾で行うので、興味がある方は読み進めていただけるとありがたいです。)

2.2.2　光子と偏光板

([2] 沙川先生の物理学汎論の講義 をベースに作りました。沙川先生は神様。)

スピンと言われてもピンとこない方向けに、さらに例をあげてみます。エンタングルメント状態にある 2 つの光子を用意し (エンタングルメント状態については、他の量子物理学班の樋口さんの記事や、入門記事を御覧ください)、偏光板に通すことを考えます。光子は電場の方向が偏光の方向なので、まずはこれを水平方向の光を通す偏光板に通します（これを通過するペアの光子を用意するということです)。その後、それぞれ水平方向から 45 度、互いに 90 度異なる 2 枚の偏光板に通します。以下に実験装置の図を示します。

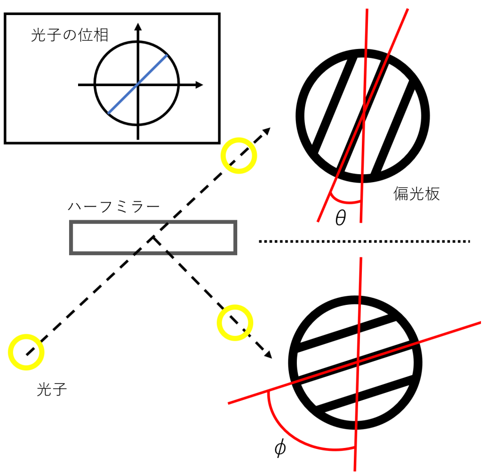

図 1　光子と偏光板による測定装置

この時、偏光板に通す前の光子はどちらも水平成分のみを持つので、どちらの偏光板も通過する確率はそれぞれ 1/2 です。これも上と同様、離れた場所でほぼ同時に観測する場合を考えます。量子力学の原理からは、偏光板を通過する確率はそれぞれ 1/2 なります。よって、局所実在論を仮定した場合上で考えると、例えば位相が同じはずの光子が通過できる偏光板が違う、という事態が起こりうるのではないかと考える人々がいました。

そして、上記のような局所実在論が量子論の範囲でも成り立つと考える人々は、その根拠となる理論を考案しました。それが、隠れた変数理論です。

2.3 隠れた変数理論

隠れた変数理論ではその名の通り、私たちが気づかない変数 λ の存在を考えます。これは物理量か関数なのか、パラメータがいくつなのかは分かりませんが、とにかく私たちが気づいていない何かです。この何かが量子論における確率で決まる要素を決定づけており、局所実在論の局所性の仮定から、隠れた変数が測定と独立であることも言えるという考え方です。では、これが正しいのか、それとも量子論の世界では事象が確率的に決まり、局所実在論が成立しないことがあるのでしょうか。これを検証するための不等式が、Bell の不等式です。今回は Bell の不等式の 1 つで、理論を見通しよく議論をできる、CHSH 方程式を持って検証していきます。(Bell の不等式という言葉が特定の式を示すこともあります。)

3 CHSH 不等式

CHSH 不等式は、John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony, Richard Holt の 4 人の頭文字を取った不等式です。ここからは、CHSH 不等式を説明した後、量子論の世界では CHSH 不等式が破れる、つまり局所実在論が破られることを説明していきます。

3.1 CHSH 不等式

まずは、局所実在論が成り立つという仮定の下で議論を進めていきます。これまで、エンタングルメント状態にある 2 粒子を、(測定の影響が光速で届くよりも早く測定が可能なほど) 遠距離において、数式を用いずに計測することを考えてきました。ここでは、それを数式に落とし込みたいと考えてみます。そこで、上の 2 つの例において、測定の際の角度をランダムにして、相手がどの角度で測定したかわからないようにしてみましょう。スピンの例でいえばスピンの方向の測定角度を、光子と偏光板の例では偏光板の角度を、測定者が測定直前にランダムに決めて、相手がどんな角度で測定したかわからなくします。そして、スピンなら上向きを $+1$、下向きを -1 とし、光子なら通過した場合を $+1$、通過しなかった場合を -1 としてみましょう。こう設定してあげると、たくさん測定したときの平均は 0 になり、2 つの粒子の測定結果の積を考えると、同じ結果の時 $+1$、違う結果の時 -1 となって見通しが良くなります。

ここで、いろいろな角度で測定を行うとややこしいので、状況を単純化します。2 人の測定者が、用意した 2 つの測定角度のうち 1 つをランダムに選んで測定する場合を考えましょう。それぞれの測定角度を $\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2$、測定結果を、$a_1, a_2, b_1, b_2$ としましょう。先ほど述べたように、各測定結果は $+1$ か -1 のいずれかとなります。

さらに、このような測定を繰り返した時の積の期待値を考えます。[*1]つまり、測定結果が同じか異なるかの期待値をとるということです。今回は局所実在論を仮定しているので、各測定での値は隠れた変数 λ によって決定されると仮定します。そのため、測定結果が $a_i = \pm 1$ となる確率は、条件付確率を用いて $P(a_i|\theta_i, \lambda)$ $(i = 1, 2)$ のように書けます。また、局所性から確率は隠れた変数と測定角度 θ により決まり、反対側の測定、つまり ϕ によらないと設定できます。

これらを用いて、測定結果の積の期待値を考えていきます。まずは代表して $a_1 b_1$ について考えましょう。a_1, b_1 がそれぞれ ± 1 の値をとる確率は、局所実在論の仮定より、

$$P(a_1, b_1|\theta, \phi) = \int d\lambda P(\lambda) P(a_1|\theta, \lambda) P(b_1|\phi, \lambda)$$

のように書けます。

これをもとに、期待値 $\langle a_1 b_1 \rangle$ は、a_1, b_1 が ± 1 の値をそれぞれとる場合の確率と、それぞれの値の積の総和をとればよいので、

$$\begin{aligned}
\langle a_1 b_1 \rangle &= \sum_{a_1, b_1 = \pm 1} a_1 b_1 P(a_1, b_1|\theta, \phi) \\
&= \int d\lambda P(\lambda) (\sum_{a_1 = \pm 1} P(a_1|\theta, \lambda)) (\sum_{b_1 = \pm 1} P(b_1|\phi, \lambda)) \\
&= \int d\lambda P(\lambda) a_{1\lambda} b_{1\lambda}
\end{aligned}$$

のように書けます。ここで、

$$a_{1\lambda} = \sum_{a_1 = \pm 1} P(a_1|\theta, \lambda), b_{1\lambda} = \sum_{b_1 = \pm 1} P(b_1|\phi, \lambda)$$

のように、(局所性の仮定から) 相手の測定方向に影響しない物理量を導入します。この変数は、絶対値が 1 より小さいことは、数式から読み取れると思います。これは、a_2, b_2 との積を考えても、添え字が変わるだけで同じ議論ができます。

では、これらを元に数式を組み立てていきます。更なる議論の為に少し高校数学を使いましょう。絶対値が 1 以下の実数 x_1, x_2, x_3, x_4 に対し、$|x_1 x_3 + x_2 x_3 - x_1 x_4 + x_2 x_4| \leq 2$ が成り立ちます。証明は式変形を繰り返して、

$$\begin{aligned}
&|x_1 x_3 + x_2 x_3 - x_1 x_4 + x_3 x_4| \\
=&|(x_1 + x_3) x_2 - (x_1 - x_3) x_4| \\
\leq&|(x_1 + x_3) x_2| + |(x_1 - x_3) x_4| \\
\leq&|(x_1 + x_3)| + |(x_1 - x_3)| \leq 2
\end{aligned}$$

[*1] 期待値について少し説明しておきます。期待値は、' 事象が起こる確率と、その確率変数の積の総和' で表されます。わかりやすくサイコロを例にして説明すると、確率変数とは' 特定の値をある確率でとる変数' のことで、サイコロで言えば出た目の数に対応します。よって、サイコロの出る目の数の期待値は、サイコロのそれぞれの目が出る確率と、サイコロの出た目の積を $1 - -6$ の場合について足し合わせたものなので、$1 * \frac{1}{6} + 2 * \frac{1}{6} + ... + 6 * \frac{1}{6} = 3.5$ となります。物理学においては、物理量 a の期待値を $\langle a \rangle$ のように書きます。

となります。

今回は、期待値を足し引きした値

$$C = \langle a_1 b_1 \rangle + \langle a_2 b_1 \rangle - \langle a_1 b_2 \rangle + \langle a_2 b_2 \rangle$$

について考えましょう。これは、先ほどの期待値の議論より、

$$C = \int d\lambda P(\lambda)(a_{1\lambda} b_{1\lambda} + a_{2\lambda} b_{1\lambda} - a_{1\lambda} b_{2\lambda} + a_{2\lambda} b_{2\lambda})$$

上の x_1 から x_4 に、$a_{1\lambda}, b_{1\lambda}, a_{2\lambda}, b_{2\lambda}$ を代入してあげると、中身の絶対値が 2 以下になります。また, $\int d\lambda P(\lambda)$ は全体で積分すると 1 となるので、$|C| \leq 2$ が言えます。

3.2 最も大事なお話

長きにわたる旅もここで一段落です。ここまでの議論より、局所実在論を仮定した場合、

$$C = \int d\lambda P(\lambda)(a_{1\lambda} b_{1\lambda} + a_{2\lambda} b_{1\lambda} - a_{1\lambda} b_{2\lambda} + a_{2\lambda} b_{2\lambda})$$

について、$|C| \leq 2$ が成り立つはずです。しかし、実験を行うと、$|C| > 2$ となるような結果が得られることが分かったのです。つまり、局所実在論が量子論においても成り立つという仮定が間違っている、量子論においては状態が観測によって決まるという結論が得られました。(状態が観測の前から決まっているなら局所実在論が成り立つはずだが、局所実在論を仮定した理論は実験結果と矛盾するためです) これが本資料での結論ですが、ではどこがまずかったのか、量子論においてはこの不等式はどこまでの値が許されるのか、気になる方もいらっしゃるでしょう。ここからはそんなお話です。

3.3 CHSH 不等式の破れ

ここからは局所実在論を仮定せず、状態は観測によって決まるという立場をとります。状況設定は先ほどと同様、相関のあるスピンをもつ粒子や、光子と偏光板の装置について考えます。これを議論するため、状態ベクトル $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を導入します。

これは、スピンで言えば上向きと下向き、光子で言えば水平方向と垂直方向をイメージするとわかりやすいです。量子力学において、波動関数 (や今回の状態ベクトル) は、対象となる粒子の確率の波を表しています。そして、その振幅が確率振幅であり、その 2 乗が存在確率になります。(物理学における波とは、何らかの物理量が空間を伝播することをさします。つまり、今回は粒子の存在確率が空間を伝播することを表しています。) では、これらを基底として、一般的な表現を考えましょう。スピンや光子が角度 θ だけ傾いた時を表す状態ベクトルは、

$$|\theta\rangle = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle$$

のように表せます。

(ブラケット記法を採用しています。こちらの解説は別記事で行っていますので、是非ご一読ください。)

また、状態ベクトル同士の内積をとると,

$$\langle 0|0\rangle = 1, \langle 1|1\rangle = 1, \langle 0|1\rangle = 0$$

となるので、

$$\langle 0|\theta\rangle = \cos\theta, \langle 1|\theta\rangle = \sin\theta$$

のように対応します。この内積をとる操作は (上の式では $|0\rangle$ と $|1\rangle$ を選んでいるので)、スピンの観測や偏光板の観測をこの方向 (水平、垂直方向) で行うことを表しています。つまり、ここでは観測する操作を、⟨(観測方向=出力)|(入力の状態ベクトル)⟩ のように表します。

また、先ほど述べたように、確率振幅は 2 乗するとその確率が出てきます。よって、ブラケットの内積をとったものを 2 乗すると、その観測結果になる確率が出てくるのです。(ボルンの確率規則と言います) 電場が角度 θ の光子を水平な偏光板に通した時に通過する確率は、$|\langle 0|\theta\rangle|^2 = \cos^2\theta$ となります。

では、複数の粒子を考えるときはどう記述すればよいでしょうか。

まずは、より理解しやすい、2 粒子が独立な状態から考えましょう。2 つの粒子の状態が $|\theta\rangle$ と $|\theta'\rangle$ である時、$|\theta\rangle|\theta'\rangle$ のように書く事にします。

まずは基底に分解して、普通の掛け算のように計算してみます。

$$\begin{aligned}|\theta\rangle|\theta'\rangle =&(\cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle)(\cos\theta'|0\rangle + \sin\theta'|1\rangle)\\ =&\cos\theta\cos\theta'|0\rangle|0\rangle + \sin\theta\sin\theta'|1\rangle|1\rangle + \cos\theta\sin\theta'|0\rangle|1\rangle + \sin\theta\cos\theta'|0\rangle|1\rangle\end{aligned}$$

となります。

先ほどと同じように観測する操作を行ってみます。$|0\rangle, |1\rangle$ が同じもの同士の内積が 1、異なるものとの内積が 0 になることを思い出しましょう。2 つとも水平方向 $|0\rangle$ で観測してみると、$\langle 0|\langle 0|\theta\rangle|\theta'\rangle$ で、これの 2 乗が $\cos^2\theta\cos^2\theta'$ になると、確率振幅の 2 乗が確率になるという先程の考え方と整合性が取れます。実際、このような結果になるように演算を定義することは可能で、テンソル積と呼ばれるものを用います。(こちらも詳しい解説は量子物理班の他の記事にありますので、そちらをご覧ください。) これを用いて、

$$|\theta\rangle|\theta'\rangle = \begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\cos\theta'\\ \sin\theta'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta\cos\theta'\\ \cos\theta\sin\theta'\\ \sin\theta\cos\theta'\\ \sin\theta\sin\theta'\end{bmatrix}$$

のように定義すれば、 $|\langle 0|\langle 0|\theta\rangle|\theta'\rangle|^2 = \cos^2\theta\cos^2\theta'$ が成り立ちます。

ここで、

$$|0\rangle|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

となるので、一番上の行が $|0\rangle|0\rangle$ に対応し、同様に計算すると、2 行目が $|1\rangle|0\rangle$、3 行目が $|0\rangle|1\rangle$、4 行目が $|1\rangle|1\rangle$ に対応することが分かります。

では、ここからは 2 粒子が量子エンタングルメント状態にある (独立でない) 場合を考えましょう量子エンタングルメント状態とは、例えば、

$$|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle)$$

のような状態です。これは、光子と偏光板の例で言えば、光子の電場がどちらも水平かどちらも垂直な状態が重ね合わさっていると捉えられます。スピンなら上向きのスピンと下向きのスピンが重ね合わさった状態のイメージです。前の係数は規格化のための係数です。(量子エンタングルメント状態の一般的な説明は本筋から離れるのでここでは省略します)

他にも、

$$
\begin{aligned}
|\Phi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle) \\
|\Phi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle) \\
|\Phi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle)
\end{aligned}
$$

のような状態が考えられます。もちろん他にも無数にあります。このような、相関を持つ状態のことをエンタングル状態と呼び、特にこれらの 4 つの例は、最大限にエンタングルした状態と呼ばれます。(相関がめっちゃでかいということです。)

いよいよ終わりが見えてきました。ここからは、2 つの粒子を偏光板やスピン測定にかけて測定した時の確率について扱い、それを元に CHSH 不等式と同じ形の不等式を解いていきます。

局所実在論を仮定した時と同じく、2 人の測定者が、用意した 2 つの測定角度のうち 1 つをランダムに選んで測定する場合を考えましょう。それぞれの測定角度を $\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2$、測定結果を、$a_1, a_2, b_1, b_2$ とし、測定した値は $+1$ か -1 のいずれかとします。

今回は、入力を $|\Phi_4\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle)$ とします。(最大限エンタングルした状態を考えるため、1 つを代表として取り上げました)

まずは角度 θ_1, ϕ_1 としましょう。局所実在論を仮定した時との最大の違いは、隠れた変数が存在しないので、通過するかどうかはそれぞれの観測を行う時点で確率的に決まることです。そのため、局所実在論を仮定した場合と確率が異なります。

観測する操作はこれまでと同様、$\Big\langle$(観測方向=出力)|(入力の状態ベクトル)$\Big\rangle$ で表され、これを 2 乗したものがその測定結果が得られる確率になります。

今回の事例で計算していきます。まずは 2 つとも通過する場合の内積は、

$$
\begin{aligned}
\langle\theta_1|\langle\phi_1|\Phi_4\rangle =& \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle\theta_1|\langle\phi_1|0\rangle|1\rangle - \langle\theta_1|\langle\phi_1|1\rangle|0\rangle) \\
=& \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle\theta_1|0\rangle\langle\phi_1|1\rangle - \langle\theta_1|1\rangle\langle\phi_1|0\rangle) \\
=& \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta_1\sin\phi_1 - \sin\theta_1\cos\phi_1) \\
=& -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta_1 - \phi_1)
\end{aligned}
$$

なので、2 粒子を角度 θ, ϕ で測定した時に両方とも 1 を観測する確率は、内積の 2 乗なので、$= \dfrac{1}{2}\sin^2(\theta_1 - \phi_1)$ となります。では、少なくとも 1 つの粒子が通過しない確率はどうでしょうか。これは、通過しなかった粒子に対して、測定角度を 90 度傾けると通過することを意味しています。よって、粒子 1,2 を観測した後の出力の確率について、$P(a_1, b_1)$ のように書くと、先ほどの議論より

$$
P(+1,+1) = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_1 - \phi_1)
$$

で、少なくとも一つが通過しなかった場合は、

$$
\begin{aligned}
P(+1,-1) =& |\langle\theta_1+\frac{\pi}{2}|\langle\phi_1|\Phi\rangle|^2 \\
=& |\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle\theta_1+\frac{\pi}{2}|0\rangle\langle\phi_1|1\rangle-\langle\theta_1+\frac{\pi}{2}|1\rangle\langle\phi_1|0\rangle)|^2 \\
=& |\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\theta_1+\frac{\pi}{2})\sin\phi_1-\sin(\theta_1+\frac{\pi}{2})\cos\phi_1)|^2 \\
=& \frac{1}{2}\cos^2(\theta_1-\phi_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(-1,+1) =& \frac{1}{2}\cos^2(\theta_1-\phi_1) \\
P(-1,-1) =& \frac{1}{2}\sin^2(\theta_1-\phi_1)
\end{aligned}
$$

となります。これらから期待値について、

$$
\begin{aligned}
\langle a_1b_1\rangle =& \sum_{a_1,b_1=\pm1} a_1b_1P(a_1,b_1) \\
=& \frac{1}{2}\sin^2(\theta_1-\phi_1)-\frac{1}{2}\cos^2(\theta_1-\phi_1)-\frac{1}{2}\cos^2(\theta_1-\phi_1)+\frac{1}{2}\sin^2(\theta_1-\phi_1) \\
=& -\cos 2(\theta_1-\phi_1)
\end{aligned}
$$

同様にして、

$$
\begin{aligned}
\langle a_2b_1\rangle =& -\cos 2(\theta_2-\phi_1) \\
\langle a_1b_2\rangle =& -\cos 2(\theta_1-\phi_2) \\
\langle a_2b_2\rangle =& -\cos 2(\theta_2-\phi_2)
\end{aligned}
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
C =& \langle a_1b_1\rangle+\langle a_2b_1\rangle-\langle a_1b_2\rangle+\langle a_2b_2\rangle \\
=& -(\cos 2(\theta_1-\phi_1)+\cos 2(\theta_2-\phi_1)-\cos 2(\theta_1-\phi_2)+\cos 2(\theta_2-\phi_2))
\end{aligned}
$$

ここで、例えば $\theta_1=\frac{3}{8}\pi$, $\theta_2=\frac{1}{8}\pi$, $\phi_1=\frac{1}{4}\pi$, $\phi_2=0$ を代入してみると、$C=-2\sqrt{2}<-2$ となり、CHSH 不等式が破られていることが分かります。量子論の範囲では、この不等式は

$$
-2\sqrt{2}\le C\le 2\sqrt{2}
$$

となります。これは Tsirelson の不等式と呼ばれます。この不等式は量子論の範囲においても成立していることが実験的にも確かめられています。

4 超光速通信が不可能な理由

本記事の最後に、おまけとして、2.2.1 節で述べた超光速通信が不可能なであることを説明していきます。本章は、小芦雅斗先生の、東大学術俯瞰会議の資料 [3] 微かな光の世界 を参考にさせていただきました。これまで考えてきた、光子と偏光板を用いた実験系を使用します。(本当はあり得ないのですが、) 片方の観測者 A

が、光子の偏光の方向を、偏光板ではない何らかの装置を用いて 2 次元的に確定させられると仮定しましょう。すると、もし偏光板を用いている測定者 B が角度 $\theta = 0$ で偏光を測定したならば、観測者 A は偏光の方向を角度 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ のどちらかとして観測するはずです。同じように、測定者 B が角度 $\theta = \frac{\pi}{4}$ で偏光を測定したならば、観測者 A は偏光の方向を角度 $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ のどちらかとして観測するはずです。このような測定を十分離れた所で行った場合、観測者 A は、観測者 B の測定方向と言う情報を、光速を超えて取得できることになります。

しかし、実際はこのようなことは不可能です。なぜなら、今回仮定した、観測者 A が用いる、偏光の方向を 2 次元的に確定させるような装置は存在し得ないからです。こちらも数学的な証明が可能ですが、これを直接証明するには場の量子論を導入する必要があり、とても長くなるのでここでは立ち入りません。興味のある方は no-communication-theorem と調べてみてください。

この話は、局所実在論の破れにも関わってきます。今回は局所実在論が量子論において破れていることが確認できましたが、これは局所性または実在性が破れているということを意味しています。つまり、局所性のみが破れている、実在性のみが破れている、局所性と実在性の両方が破れていることのどれかであるということがわかったのです。そのうち、局所性が破れていると仮定した場合、上記の超光速通信が可能になってしまいます。これは一般的に上記の理論や、実験によっても否定されています。よって、局所実在論が破れていることとくみ合わせると、実在論が破れていると考えられるのです。

参考文献

[1] EMAN (広江克彦),'CHSH 不等式','EMAN の物理学, 量子力学'
https://eman-physics.net/quantum/chsh.html

[2] 沙川貴大,2020S 物理学汎論

[3] ' 微かな光の世界,' 東京大学 Todai OCW 学術俯瞰講義 Copyright 2013, 小芦 雅斗