

■ ランダムウォーク

ブラウン運動

ブラウン運動は1827年にイギリスの植物学者 Robert Brown が発見した現象です。植物の花粉を水に浮かべると、中から微粒子が出てきます。この微粒子を観察すると、前後左右に完全にランダムな運動をしていることがわかります。この運動がブラウン運動で、当初は生命の力によるものと考えられました。後に、ブラウン運動は熱ゆらぎする溶媒分子の衝突によって生じるもので、十分微細な粒子は全てブラウン運動をしていることがわかりました。

ランダムウォーク

ランダムウォークはブラウン運動をモデル化したものです。ここでは簡単のため一次元の対称ランダムウォークを考えます。 x 軸上を動く粒子が、時刻 $t=0$ で $x=0$ にいるとし、 $\Delta t=1$ 経過するごとに確率 $1/2$ で $+1$ 、確率 $1/2$ で -1 だけ変位するとします。これが一次元対称ランダムウォークモデルです。この粒子が時刻 t に x 軸のどの位置にいるかの確率分布を考えます。粒子が時刻 t に x にいる確率は、組み合わせ記号を用いて

$$p(x, t) = {}_t C_{\frac{t+x}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

と表せます。これは二項分布ですが、 t が十分大きい時にはスターリングの近似式を用いて、正規分布で表すことができます。正規分布の性質から、粒子の変位の平均は 0 になり、標準偏差は \sqrt{t} に比例することがわかります。

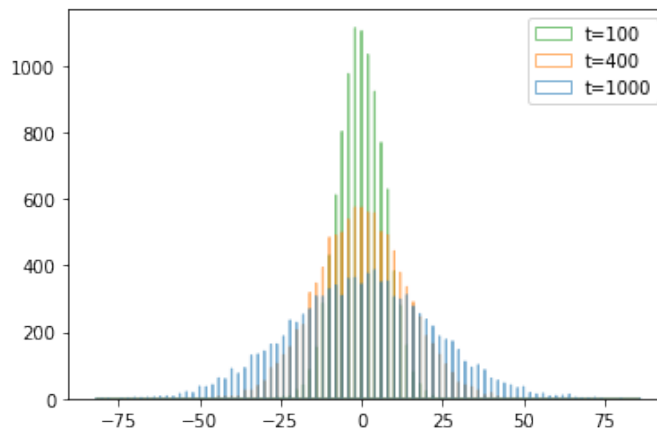


Figure 5. 一次元ランダムウォークのシミュレーション

ランダムウォークの再帰性

一次元ランダムウォークでは、 $t=0$ で原点を出発した粒子が、無限時間が経過するまでにまた原点に戻ってくることが知られています。これを**ランダムウォークの再帰性**といいます。二次元ランダムウォークにも再帰性がありますが、三次元以上になると再帰性がありません。このように、単純なモデルながらも興味深い性質を持っているのがランダムウォークなのです。