

ベクトルとテンソル

「ベクトル」とは何？

ベクトルとは、大雑把には「矢印」のような量です。これでは正体が曖昧なので、通常の数組で表してみましょう。例として「東西南北が定まった平面」を考えます。

この平面の中でのまっすぐの移動は「東に ♠ 歩、北に ♣ 歩」と二つの数の組で表せますね。これらの数は「成分」と呼ばれます。

ただし、ベクトルとはただの数組そのものではありません。「東に ♠ 歩、北に ♣ 歩」の移動は、「北東に ♥ 歩、北西に ♦ 歩」と別の数の組 (♥, ♦) を使って表せます。(図)

これらは数の組としては異なりますが、ベクトルとしては同じ量であってほしいです。つまり、ベクトルとは「基準とする方角を選ぶ (=成分で表す) 前から決まっている矢印」のことで

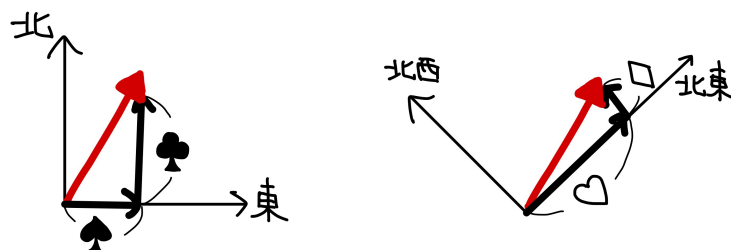


Figure 1. ベクトルとその成分

よりはっきりとしたベクトルの定義

ある抽象的な構造を持った集合である「線形空間」の要素として、成分を使わずにベクトルを定義することができますが、ここでは抽象的になりすぎないようにします。より具体的な形で、ベクトルは成分を用いて次のように定まります:

「ベクトルとは、(基準となる方角を変える操作のもとで) 特定の変換を受けるような数の組のことである」

特定の変換というのは、基準となる方角を変えても矢印としては不変であるように具体的に決まっています。ちなみに、(東に一步、北に一步) といった基準となる大きさと方角を持つ量の組を「基底」と呼びます。

テンソルとは何？

「テンソル」は成分を用いて次のように定まります:

「テンソルとは、(基準となる方角を変える操作のもとで) 『複数のベクトル間の成分の(全通りの)積』と同じ変換を受けるような数の組のことである」

「全通りの」というのは次の意味です: たとえば平面の例だと、 (a_1, a_2) と (b_1, b_2) の間の成分の全通りの積とは $a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2$ の 2×2 個です。

「何個のベクトル間の積を考えているか」にあたる数をテンソルの階数と呼びます。平面の例では2階のテンソルは 2×2 個、3階のテンソルは $2 \times 2 \times 2$ 個の数の組です。

以上の説明ではテンソルを考える動機が分かりませんね。次に例を見てみましょう。

なぜテンソルという量を考えるのか？

水の流れを想像しましょう。「砂粒を入れるとどの方角にどれくらいの速さで動くか」という流れを表すベクトル量が各点に定まります。(これをベクトル場と呼びます。)

「東に少し進むと流れのベクトルの北向き成分はどれだけ増えるか？」という量を考えてみましょう。たとえば図の右上では東に行くほど北向き成分が増えています。

太字で表した二つの方角の選び方は、(東, 北)の組の他に(北, 北), (北, 東), (東, 東)の合計 2×2 個があります。(南や西はそれぞれ北と東の負の方向と考えましょう。)

実は、これら 2×2 個の量の組がテンソルになっています。この例で方角を2つ指定しているのと同様に、方角 N 個を指定して決まる量の組のうち、ある意味でまともな変換性を持つものが N 階のテンソルなのです。

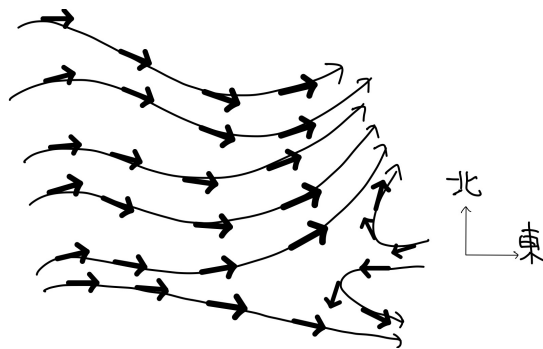


Figure 2. 流れの図

双対性と計量

「ベクトルに対して数を対応させる関数」のうち、ベクトルの成分の一次関数として表せるものを考えます。このような関数 f は

$$f((x^1, x^2) \text{で表されるベクトル}) = a_1 x^1 + a_2 x^2$$

と表せて、関数 f は数の組 (a_1, a_2) で表せます。実はこの関数たちがベクトルになっていて、元の(移動の)ベクトルに対する「双対ベクトル」と呼ばれます。(双対ベクトルの成分の添え字は、元のベクトルと上下を逆にして記すのが一般的です。)

上で考えた関数 f は

$$f = a_1 \cdot (\text{東方向の成分を取り出す関数}) + a_2 \cdot (\text{北方向の成分を取り出す関数})$$

と表せ、成分を取り出す関数二つが基底となっています。重要なこととして、双対ベクトルにはもとのベクトルの基底と一対一に対応した基底が自然と定まっているのです。その結果、双対ベクトルの基底である「成分を取り出す関数」は、元のベクトルの成分と同じ変換を受けるので、双対ベクトルと元のベクトルでは基底と成分の変換則が入れ替わります。

2つのベクトル v, w から数 $g(v, w)$ を作る「計量」と呼ばれる概念があります。計量 g には、 $(v \text{ の成分}) \times (w \text{ の成分})$ の定数倍の和の形で表されることなどの条件が課されます。これは高校で習う内積の一般化で、ベクトルの長さや角度を定めてくれます。

計量を使い、ベクトルに対する関数 f_v を $f_v(w) = g(v, w)$ で定めることで、ベクトル v に対応した双対ベクトル f_v を作れます。この意味で、「計量」は「ベクトルと双対ベクトルとの対応規則」であるとも考えることもできます。物理ではこれを「計量による添え字の上げ下げ」と呼ぶことが多いです。すでに述べたように、元のベクトルと双対ベクトルの成分では、添え字の上下を逆にして表すためです。