多様体上に現れるさまざまな構造

多様体とは何か？

「多様体」とは大雑把には，各点のまわりに座標を貼り付けて (数の組と対応させて) 取り扱えるような集合のことです．このとき全体を一枚の座標で覆えていなくても構いません．

「球面」を例にとります．高校数学での線分上の (すなわち実数を変数とする) 関数の微分と同様に，平面上の (すなわち実数の二変数の) 関数の微分などの計算ができます．では球面上ではどうでしょう？

平面をぐにゃぐにゃと変形しても，(貼り付けるような作業なしでは) 球面にはなりませんね．ところが球面のうち一部だけを見れば，平面の一部をぐにゃりと折り曲げただけのものなので実数のペアで表せます．すなわち座標を貼り付けることができます．結果的に，球面を多様体として扱うことで平面での計算を持ち込めます．

接ベクトルと余接ベクトル

2 次元多様体上での移動を考えてみましょう．移動を小さくとって狭い範囲を考えるほど曲面が平らに見え，移動は「まっすぐなもの」に近づきそうです．そこで多様体の各点に「小さな移動」と対応するようなベクトルを考えるために，各点に平面 (n 次元多様体なら平面の n 次元版) を取りつけます．(次のポスターの Figure 1 をご覧ください．)

実は各点に定まる「微分演算子の集合」が今望んでいる平面の構造を持っています．一つの微分演算子を一つのベクトルとみなして接ベクトルと呼び，その集合を接空間といいます．微分演算子は，関数に対して「ある方向への小さな移動に対して関数がどれだけ増えるか」という量を対応させるもので，平面内での移動と対応しています

多様体 (曲面) の座標 $(x^1,\ x^2)$ を決めると，接ベクトル v は

$$v = a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$$

と表せます．各座標に沿った微分 $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}$ が基底をなし，成分は (a^1, a^2) です．

「余接ベクトル」とは接ベクトルに対する双対ベクトルのことであり，次のように表せます．

$$b_1 \cdot \left(\text{接ベクトルの第一成分を取り出す関数}\right) + b_2 \cdot \left(\text{接ベクトルの第二成分を取り出す関数}\right)$$

「余接空間」(余接ベクトルの集合) の基底をなす，成分を取り出す二つの関数は dx^1, dx^2 で表され，したがって余接ベクトルは次のように表されます．

$$b_1 \cdot dx^1 + b_2 \cdot dx^2$$

余接ベクトルは「微小量」に対応するものです．詳しくは「微分形式」のポスターをご覧ください．

共変微分 (接続)

曲面上での流れの空間的な変化，すなわちベクトル場の微分を考えましょう．
関数の微分とは，大雑把にはすぐ近くの二点で関数の値の差を考えることです．ではベクトル場の微分において，異なる二点の接ベクトルをどのように比較すればよいでしょうか？
曲面上での異なる二点の接空間同士は「向きの異なる平面」とみなせそうなので，接ベクトル同士を比較する方法は明らかではなさそうですね・・・

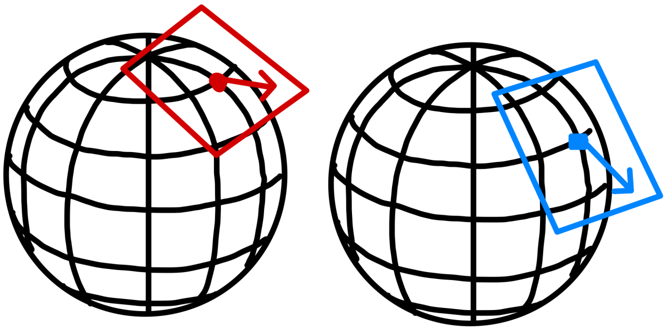

Figure 1. 異なる二点の接ベクトルをどう比較すればよいだろう？

実は，ベクトル場の微分とみなせるための条件を満たすような演算子は一つの多様体上に無数にあります．これらの演算子を「共変微分」と呼びます．共変微分を一つ選ぶと，異なる点に付属する接ベクトル間の比較ができるようになるので，異なる点の接空間を結びつけるという意味で共変微分は「接続」とも呼ばれます．

共変微分は計量の概念と対応させることができます．(計量については「ベクトルとテンソル」のポスター参照．) ある方向に共変微分が 0 であることを，ベクトルがその方向に「平行移動」されていると呼びます．一方で，各点の接空間にそれぞれ計量を定めることで，多様体上に長さや角度を定めることができます．
詳しくは述べませんが，ある条件を満たす多様体と計量に話を限ります．そして，二つのベクトルを平行移動する前後で，計量が保たれる，すなわち長さや角度が変わらないと仮定します．すると共変微分はただ一つに決まってしまいます！ このとき，ベクトルを自身に沿って平行移動させて得られる曲線は，十分狭い範囲[a] では長さが最小となります．このような曲線は「測地線」と呼ばれます．

[a] 赤道上の二点間の最短・最長ルートは，俯瞰しないと区別できませんね．局所的に最短でも，大局的に最短とは限りません．

曲率

滑らかな関数に対する方向微分は，平面上で可換です．ところが共変微分は曲面上で可換とは限りません．「曲率」は共変微分の非可換さとして表せるテンソルで，接ベクトル v の成分と，座標 x^μ 方向の共変微分 ∇_μ を用いて次のように定まります．

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) v^\rho = -R^\rho_{\sigma\mu\nu} v^\sigma$$

この四階テンソル $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ から，二階テンソル $(\mathrm{Ric})_{\mu\nu}$ とスカラー (単一の数で表され座標変換の下で不変な量)$\mathcal{R}$ を作ることができ，これらもまた曲率と呼ばれます．