微分形式

微小変化

関数 $y = f(x)$ の導関数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ は，変数 x と y の微小変化 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ の比です．

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \tag{1}$$

$w = f(x, y, z)$ のように従属変数が複数の変数に依存する場合，他の変数 y, z を固定して $\mathrm{d}x$ だけ変化させたとき $\mathrm{d}w$ との比を考え，偏微分 $\frac{\partial w}{\partial x}$ と書きます．
x, y, z を同時に動かしたときの $\mathrm{d}w$ は，各変数の微小変化の寄与分の総和です．

$$\mathrm{d}w = \frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{2}$$

微小量は余接ベクトル

多様体の点 p 上の接ベクトルを微分演算子 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ と，余接ベクトルを微小量 dx^i と同一視できることをみました．例えば $\mathrm{d}x$ は $\frac{\partial}{\partial x}$ をもらうと 1 を返し，(2) の $\mathrm{d}w$ は $\frac{\partial}{\partial x}$ をもらうと $\frac{\partial w}{\partial x}$ を返します．
幾何学的解釈として，$\frac{\partial}{\partial x}$ のような接ベクトルは微小変化の方向と変化 (速度) の大きさを指定します．一方で，微小変化はいわゆる「無限小」など決まった量ではなく，入力変数の変化に値がどれだけ反応するかを表す尺度と言えます．よって，微小量は変化を受け取って対応する変化率 (数) を返すもの，と捉えることが自然です．

高次元の微小変化: p 形式

一つの変数の微小変化 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \ldots$ や関数の微小変化 $\mathrm{d}w$ は 1 次元的なもの，微小長さと言えます．2 次元の微小面積，3 次元の微小体積，... にも拡張してみましょう．
微小面積は微小長さ 2 つからなる平行四辺形として記述します．微小長さの間に**外積**という特殊な積演算を導入し，$\mathrm{d}x$ と $\mathrm{d}y$ から定まる微小面積を $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ と書きます．

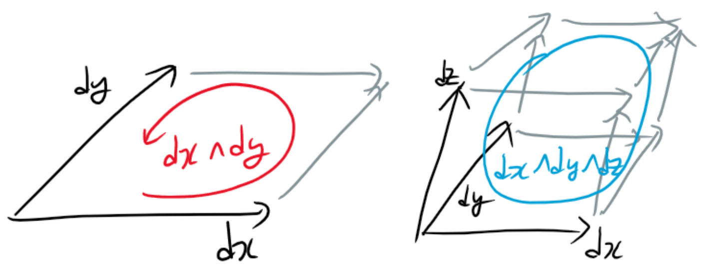

Figure 1. 微小面積を表す微分 2 形式，微小体積を表す微分 3 形式

このように微小面積を微小長さの外積で表現したものを**微分 2 形式**または **2 形式**と言います．外積は $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ のように，順番によって符号が変わります．この符号は，$\mathrm{d}x$ と $\mathrm{d}y$ を二辺として定まる面の向きに対応します．
同様に，微小長さ p 個の外積で表した微小 p 次元量が **(微分)p 形式**です．

体積形式と Hodge 双対

n 次元多様体の最高階 n 形式を**体積形式**と言います．密度などが体積形式です．

また，体積形式が定まっていれば p 形式 α を $n-p$ 形式 $\star\alpha$ と対応できます．これを **Hodge 双対**と言います．3 次元において，微小面積をしばしば面の法線方向のベクトルとして表しますが，2 形式を双対となる 1 形式で記述しているわけです．

$\star\star\alpha = \pm(-1)^{p(n-p)}\alpha$ が成り立ちます．空間上では $+$，時空間上では $-$ です．

外微分

関数 (0 形式) w の微小変化として $\mathrm{d}w$ を定義しました．p 形式 α の微小変化として $(p+1)$ 形式 $\mathrm{d}\alpha$ を定義することもできます．この演算 d を**外微分**と言います．

$$\alpha = \sum_{\{i_1,\cdots,i_p\}} A_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p} \overset{\mathrm{d}}{\Longrightarrow} \mathrm{d}\alpha = \sum_{\{i_1,\cdots,i_p\}} \frac{\partial A_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p} \tag{3}$$

外微分は，3 次元ベクトル解析における勾配，回転，発散すべてに対応します．

重積分と Stokes 定理

積分の式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ は「微小量」1 形式 $f(x)\mathrm{d}x$ を 1 次元領域 $[a,b]$ において足し合わせて数を出す演算と考えることができます．

p 次元領域の上では p 次元微小量を積分できます．p 次元領域 C と p 形式 α を用いて $\int_C \alpha$ と書きます．例えば，このようなものです．

$$\int_C \alpha = \int_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \tag{4}$$

積分式では $\wedge$ を省略し，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ と書くこともあります．

Stokes 定理とは，p 次元領域 C 上で $\mathrm{d}\omega$ を積分した値が C の $p-1$ 次元境界 ∂C 上で ω を積分した値と一致する，という定理です．これは微積分学の基本定理や，ベクトル解析に出てくる Gauss 発散定理と (狭義)Stokes 定理の一般化です．

$$\int_C \mathrm{d}\omega = \int_{\partial C}\omega \tag{5}$$

コホモロジー

d を二回続けて施した結果は必ずゼロです．($\mathrm{d}^2=0$) つまり，微分形式 α が $\alpha=\mathrm{d}\beta$ の形 (完全形式) ならば $\mathrm{d}\alpha=0$ (閉形式) です．

一方その逆は成り立たず，$\mathrm{d}\alpha=0$ でも α が $\mathrm{d}\beta$ の形とは限りません．閉形式の中で完全形式として表せないものを集めたものを de Rham コホモロジーと言います．

de Rham コホモロジーは空間の形 (トポロジー) を表します．例えばドーナツ面と球面は異なる de Rham コホモロジーを持ちます．

Clifford 代数と Fermi 粒子

1 形式 ξ と p 形式 α に対し，外積 $\xi\wedge\alpha$ ($(p+1)$ 形式) と内積 $\iota_\xi\alpha$ ($(p-1)$ 形式) が構成できます．さらに，異なる次数の微分形式の和を許すと，**Clifford 積**という積演算を定義できます．Clifford 積も外積と同様に，掛ける順番に依存します．

$$\xi\alpha = \xi\wedge\alpha + \iota_\xi\alpha \tag{6}$$

外積の代わりに Clifford 積を使って表すこともできます．

$$\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_k = \frac{1}{k!}\sum_\sigma \xi_{\sigma(1)}\cdots\xi_{\sigma(k)} \quad \text{例えば} \quad \xi\wedge\eta\wedge\zeta = \frac{1}{6}(\xi\eta\zeta+\eta\zeta\xi+\zeta\xi\eta-\xi\zeta\eta-\eta\xi\zeta-\zeta\eta\xi) \tag{7}$$

Clifford 積により，ベクトル ξ に対して $\xi\xi^{-1}=1$ となる逆ベクトル ξ^{-1} を取ったり，ベクトル ξ の反転・回転を $(\phi_r\cdots\phi_1)\xi(\phi_r\cdots\phi_1)^{-1}$ の形で表すことができます．

このように，ベクトル ξ に関しては変換を表す $R=\phi_r\cdots\phi_1$ が ξ 両側に付いて $R\xi R^{-1}$ となります．一方で，空間上に**スピノル** Ψ というものを定義できて，変換時には $R\Psi$ のように変換が左側にのみつきます．

この見慣れない掛け算は，例えば Minkowski 時空においては行列として表せます．具体的に $\mathrm{d}x^0, \mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3$ を以下の行列に見なせばいいです．

$$i\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad i\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},\quad i\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{pmatrix},\quad i\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \tag{8}$$

これらの行列はまとめて γ^k と書き，**Dirac 行列**と言います．
さらに，スピノル Ψ は 4×1 行列として表現できます．

場の量子論によると，物質を構成する Fermi 粒子はスピノル場の励起として考えることができます．空間に他の場がないとき，質量 m の粒子に対応するスピノル場 Ψ がみたす方程式 (Dirac 方程式) は以下のようになります．

$$(\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0 \tag{9}$$

つまり，Ψ が微分演算子 $\gamma^\mu\partial_\mu - m$ の核になることが解の条件となります．ちなみにこの方程式は，以下のラグランジアン密度から得られます．

$$\mathcal{L} = \overline{\Psi}(\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi \tag{10}$$

カイラル性

スピノル場に作用する Clifford 形式として，体積形式 $\gamma_\star = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ が重要です．微分形式 α への左作用は $\gamma_\star\alpha = \pm\star\alpha$ で，符号を除いて Hodge 双対と一致します．さらに $(\gamma_\star)^2=-1$ から，固有値分解してスピノル Ψ を $\gamma_\star$ の固有値 $\mp i$ の固有空間に分解でき，それぞれ左手と右手の**カイラル性**を持つ**カイラルスピノル**と言います．

なお，奇数次元 (時) 空間上では $\gamma_\star$ の固有値が一通りで，カイラル性は現れません．