

解析力学

解析力学とは何か？

解析力学は高校物理でおなじみのニュートン力学を含んだ理論であり、曲がったものを含むあらゆる座標の取り方に対して運動方程式が同じ形となります。

ニュートン力学において、おなじみの(直交)座標 (x_1, x_2, x_3) を用いて運動方程式は

$$F_i = m\ddot{x}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

という形で表せます。ただし文字の上についた点一つにつき一階分の時間の微分を取っています。ところが、 (x_1, x_2) の代わりに平面内の原点からの距離 r と x_1 軸からのなす角 θ (極座標) を用いると、運動方程式の距離方向に関するものは

$$F_r = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2$$

となり、遠心力と呼ばれる項が現れて方程式の見た目が変わります。一方、解析力学ではこのようなことは起こらず、曲線座標をとっても方程式の形は変わらないのです。

解析力学の出発点——「変分原理」

解析力学は、次の出発点(「変分原理」などと呼びます)に基づく理論として捉えられます：

「質点が描く経路に対しては経路をわずかに変えても『作用』という量が変わらない」

質点とは大きさが無視できるモノのことを指します。ここで「わずかに」や「変わらない」と言っているのは、最小値をとる場所の周囲にわずかに動いても関数の値は変わらない(微分が0である)と言っているのと同じような意味だと捉えてください。また、経路のスタートとゴールは固定した上で経路を変えることにします。

「作用」とは経路を一つ決めると定まる量です。ニュートン力学を再現するには、直交座標 (x_1, x_2, x_3) を用いて作用が

$$\int_{\text{スタート時刻}}^{\text{ゴール時刻}} dt \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - V(x_1, x_2, x_3) \right] \quad (1)$$

と表されます。時間 t について積分されている関数は「ラグランジアン」と呼ばれます。

質点の描く経路ではなく、何らかの「場」を考える場合がしばしばあります。場とは時間の他に空間をパラメタに持つものです。場を扱う場合、変分原理の「経路」は「場」に置き換え、作用を時空 (t, x_1, x_2, x_3) についての積分に置き換えます。この場合の積分される関数は「ラグランジアン密度」とも呼ばれます。例えば空間を一次元とした次のような作用を考えることができます。

$$\int dt dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} m (\phi(t, x))^2 \right] \quad (2)$$

ϕ が場で、 c, m は定数としています。

変分原理から導かれる運動方程式

変分原理から式変形を経て、質点の経路を決める次の方程式が得られます:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

L はラグランジアンです。質点を追跡するための座標 (q_1, q_2, \dots) をどのようにとっても変分原理からは同じ形の上の方程式が導かれる、というのが初めにも述べた解析力学の特徴を与えます。この方程式はオイラー・ラグランジュ方程式と呼ばれ、場に対しても類似したオイラー・ラグランジュ方程式が導けます。

座標 (q_1, q_2, q_3) として直交座標を選び、 L に式 (1) のラグランジアンを代入してみましょう。ニュートンの運動方程式が得られましたね!

ネーターの定理

「保存量」(時間変化しない量) の例として 運動量やエネルギーがあります。ネーターの定理とは、作用の「不変性」から保存量が導かれる、という定理です。

微小な変換 $q_i(t) \rightarrow q_i(t) + \Delta q_i(t)$ を考えます。変換を特徴づける微小パラメタ (例えば回転における角度) を θ で表せば、変換に対応する微小でない量 (変化率) $\frac{\Delta q_i(t)}{\theta}$ が得られます。この変換で作用が不変である、あるいは経路によらない定数しか変化しないとしましょう。このとき変換によるラグランジアンの変化 ΔL は、0 であるか、あるいはある関数 $K(q_1, \dots, \dot{q}_1, \dots)$ を用いて $\theta \frac{d}{dt} K$ と表せます。(後者は、時間積分して得られる作用への寄与が経路によらない定数になっています。) この設定の下で、運動方程式などを用いつつ計算すると

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\Delta q_i}{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - K \right) = 0$$

が成り立っており、保存量 $\sum_i \frac{\Delta q_i}{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - K$ が得られます。

変換として、空間と時間の原点の移動や回転を選べば、それぞれに保存量として運動量、エネルギー、角運動量が対応します。

場を考える場合でも、同様の手続きによってネーターの定理が得られます。しかし、作用の積分が (t, x_1, x_2, x_3) に関するものとなることで、上でラグランジアンに許した変化率 $\frac{d}{dt} K$ の代わりに $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} K_0 + \frac{\partial}{\partial x_1} K_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} K_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} K_3$ を考えることになり「保存量密度と保存量の流れ」の四成分の量が得られます。(電荷密度と電流がその例です。)

解析力学の別の形式

ここで紹介した解析力学は「ラグランジュ形式」と呼ばれるものですが、「ハミルトン形式」と呼ばれる別の形式もあります。ハミルトン形式においても、運動を決める方程式はやはり座標の取り方によらないものになっています。