相対論

特殊相対論

音は空気の振動の波が伝わるものですよね．そして追い風が吹くとその分速く進み，向かい風では遅く進みます．このように互いに相手に対して等速直線運動する観測者の間で視点が変わるときに速度は単純に足し算（**ガリレイ変換**）されるという考え方を**ニュートン力学**と呼びます．一方で光ではこれが成り立ちません．光が電磁波であることは 1864 年にマクスウェルによって示唆されました．しかし，ニュートン力学の下，光が何らかの物理的実体（**エーテル**）を媒質とした波動であるという仮説は，1887 年のマイケルソン・モーリーの実験によって否定されました．

一方でアインシュタインは

1. **特殊相対性原理**：慣性系によって物理法則は変わらない．
2. **光速度不変の原理**：真空中の光速度は任意の慣性系で同じ値を取る．

という 2 つの原理から，**ローレンツ変換**によって**慣性系**の変換が記述されることを導き，**特殊相対論**を築き上げたのです．

ローレンツ変換

4 次元時空（**Minkowski 時空**）内での点（**世界点**）は (t, x, y, z) という 4 つの成分で指定されます．2 つの世界点間の距離（**世界間隔**）は

$$\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \tag{1}$$

によって測られます．空間成分 (x, y, z) は中学で習う三平方の定理ですが，時間成分 t の部分だけ負になっているのが特徴で，空間方向の距離の方が大きいと $\Delta s^2 > 0$（**spacelike**）ですが，時間方向の距離の方が大きいと $\Delta s^2 < 0$（**timelike**）となります．光線に沿っては $\Delta s^2 = 0$（**null**）となります．このような距離の測り方は **Minkowski 計量**で与えられます．Δs^2 を変えないような座標変換が**ローレンツ変換**と呼ばれるものです．c は光速で，光速度不変の原理からどんな座標系でも同じ値を持つことに注意しましょう．計算の煩雑さを避けるために $c = 1$ とおいて，長さと時間を同じ単位だとして考えることもあります（**自然単位系**）．以下では $c = 1$ とします．

リー群とリー代数

平面内で何かを 30° 回転させた後 60° 回転させる変換は，90° 回転させる変換と同じことになります．また，30° 回転させた後 -30° 回転させると何も手を加えないのと同じことになります．何も手を加えないことも変換のうち（**恒等変換**）だと捉えると，回転変換は**群**をなしていると言えます．さらに変換が連続なパラメータ（回転変換では回転角）で表され，そのパラメータについて何度でも微分できる場合は**リー群**という枠組みで扱うことが出来ます．

ローレンツ変換も，**ラピディティ**と呼ばれるパラメータで表すことができ，リー群をなします（**ローレンツ群**）．**リー代数**は，多様体としてのリー群の単位元（恒等変換）における接空間です．リー群が有限の"幅"を持つ変換なら，リー代数はごくわずかな変換と捉えることもできます．単連結なリー群については，任意の元がリー代数の指数写像で表せることが知られています．

一般相対論

この慣性系に基づいて展開される特殊相対論は，空間的に一様でない重力場が存在する場合には破綻してしまいます．そこで

1. **一般相対性原理**：一般の座標の取り方によって物理法則は変わらない．
2. **等価原理**：重力場が局所的に消去された局所慣性系をつねに取れる．

という 2 つの原理から，**一般相対論**がやはりアインシュタインによって構築されました．たとえば，局所慣性系なら光は"まっすぐ"進みますが，一般座標変換で移ると空間の曲がり具合に沿って進むということが計算できます（**測地線方程式**）：

$$\frac{\mathrm{d}^2 X^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda} = 0. \tag{2}$$

測地線方程式は，作用

$$\int_C \mathrm{d}s = \int_C \sqrt{g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu} = \int_C \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda \tag{3}$$

を変分しても得られます．$\mathrm{d}s$ は先ほどの Δs^2 の平方根にあたる量で，一般座標変換でも不変です．また，一般相対論のある極限として，ニュートン力学での重力の式が導かれ，重力質量と慣性質量が一致することを説明できます．一般の曲がった時空間での計算には，時空間を多様体と捉えることで微分幾何の知見を使うことが出来ます．

Einstein 方程式

多様体上で空間の曲がり具合を表す**リッチテンソル** $\mathrm{Ric}_{\mu\nu}$ および**スカラー曲率** $\mathcal{R}$ が定義されていました．これらを用いて**アインシュタインテンソル**

$$G_{\mu\nu} = \mathrm{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} \tag{4}$$

という量が定義されます．これが**エネルギー運動量テンソル** $T_{\mu\nu}$ に比例する：

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{5}$$

という**アインシュタイン方程式**は，時空の幾何構造と物質場の関係を記述した重要な方程式です（**宇宙項**を加えるのが正しいという説もあります）．微分幾何の計算から，この方程式がエネルギー・運動量保存則を内包することが分かります．ニュートン力学との整合性から，$\kappa = 8\pi G$ と定めることができます．この方程式は**アインシュタイン-ヒルベルト作用**

$$S_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \int \mathcal{R} \sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4 x = \frac{1}{2\kappa} \int \mathcal{R} (\star 1) \tag{6}$$

と物質場の作用との和からも導かれます．$\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4 x$ の部分は具体的な座標 x が入っていて一見座標に依存しているようですが，座標変換に伴う $\sqrt{-g}$ の変換と上手く打ち消され，不変に保たれます．この部分を体積形式と捉えて $\star 1$ と書くこともできます．

物質場の作用に含まれるものは，質点系，複素スカラー場，電磁場，その他ゲージ場などが挙げられます．