■ Yang-Mills のゲージ理論

電磁ポテンシャルと Aharonov-Bohm 効果

古典電磁気学を記述する Maxwell 方程式は, 電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ によって表されますが, $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ に先立つスカラー場 ϕ とベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を導入することで記述できます.

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \tag{1}$$

ϕ は磁場の時間変化がないときの**静電ポテンシャル (電位)** に相当します. また, $\boldsymbol{A}$ は**ベクトルポテンシャル**と言います. 2 つのポテンシャルを組み合わせると 4 次元ベクトルの**電磁ポテンシャル**を構成でき, 電磁場を統合して微分形式で記述できます.

$$A = -\phi \mathrm{d}t + A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z, \quad F = \mathrm{d}A = E_x \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}t + \cdots + B_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \cdots \tag{2}$$

実は, 電位 ϕ の基準点を任意に設定できたように, ϕ と $\boldsymbol{A}$ をセットにしてさらに自由度が高い変換ができます.

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\Lambda, \quad \phi \to \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (\Longleftrightarrow A \to A + d\Lambda) \tag{3}$$

この変換により A は変わりますが, 観測可能量である電磁場 F は変わりません.

電磁ポテンシャル A は, 1950 年代までは物理的実態 F を記述するための数学的道具にすぎませんでした. しかし電磁場のない領域でも A の影響がおよぶ **Aharonov-Bohm 効果**が発見され, A が電磁場に先立つ実態として認められています.

Figure 1. Aharonov-Bohm 効果は電子の二重スリット実験で観測されます. コイルの外は $A \neq 0, F = 0$ で, コイルの電流により干渉縞が変わります.

量子力学によると, 各点の波動関数 $\psi(x)$ は複素数値を持ちますが, その位相は自由に決まり, 波動関数を $\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x)$ に置き換えても物理的状態は変わりません. では各点が違う位相変換を受けて,$\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ になったらどうでしょうか？

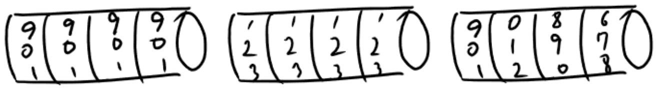

Figure 2. ダイヤルロックに例えた $\mathrm{U}(1)$ ゲージ変換. 基準 (左) からの大域変換 (中) と局所変換 (右).

Schrödinger 方程式などでは $\psi(x)$ の微分も入りますが, $e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ に入れ替わるとその微分から $\alpha(x)$ の微分が現れ, 方程式が成り立たなくなります.

ところで, 各点の位相を補正する**接続場** A があり, (3) の変換を $\alpha(x) = q\Lambda(x)$ で受けるとすると, d を $\mathrm{d} - iqA$ に入れ替えることで方程式の形が保たれます.

物理系には位相をはじめとする, **ゲージ**と呼ばれる様々な局所自由度があります. 電磁ポテンシャル A の正体は位相 ($\mathrm{U}(1)$) ゲージの接続場で, F は位相の曲率, 定数 q は粒子の電荷に対応します. つまり電磁気学は $\mathrm{U}(1)$ ゲージ理論です.

他に, 強い相互作用を記述する量子色力学が $\mathrm{SU}(3)_C$ ゲージ理論で, 電弱相互作用は $\mathrm{U}(1)_Y \times \mathrm{SU}(2)_L$ ゲージ, そしてこれらをまとめた標準模型は $\mathrm{U}(1)_Y \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(3)_C$ ゲージ理論になっているなど, 3 つの基本相互作用がゲージ理論として記述されます.

ゲージ理論の Lagrange 力学的記述

質量 m の粒子を表すスカラー場 ϕ の Lagrangian 密度は以下の通りです.

$$L_{\mathrm{KG}} = -d\phi \wedge \star d\phi^* - m\phi\phi^* \tag{4}$$

スカラー場は (ざっくり言うと) 先ほどの波動関数の相対論版で, 同様に位相変換ができます. 局所変換に関して対称性を保つためには $\mathrm{U}(1)$ ゲージ場 A を導入し, 微分 d と結合させて $D = \mathrm{d} - iqA$ の形にします.

ゲージ場が入った系の Lagrangian 密度形式は, ゲージ場のない系の項をゲージ場 A と結合させたものと, ゲージ場のみの Lagrangian 密度形式の項で記述されます.

$$L_{\mathrm{KG}_{\mathrm{U}(1)}} + L_{\mathrm{U}(1)} = -D\phi \wedge \star D\phi^* - m\phi\phi^* - \frac{1}{2}F \wedge \star F \tag{5}$$

他にスピノル場なども, $\mathrm{U}(1)$ ゲージ場と結合させることができます. いずれの場合も, Maxwell 方程式 $\mathrm{d}F = 0$, $\mathrm{d} \star F = J$ が得られます.

Yang-Mills 理論

Yang-Mills 理論もしくは**色力学**は, 場 N 個の「混合」対称性 $\mathrm{SU}(N)$ に関するゲージ理論です. ゲージ場 A が $N \times N$ 行列値の 1 形式となることが一番の相異点です. また, 曲率 $F = dA + A \wedge A$ で, ゲージ変換に対して対角成分和 $\mathrm{tr}(F)$ が不変です. ゲージ場の Lagrangian 密度形式も, 電磁気学の形に tr を取ったものと与えられます.

$$L_{\mathrm{YM}} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(F \wedge \star F) \tag{6}$$

古典論として扱う場合, Maxwell 方程式と似た運動方程式が得られます.

$$DF = dF + A \wedge F - F \wedge A = 0, \quad D \star F = d \star F + A \wedge \star F - \star F \wedge A = J \tag{7}$$

しかし, 電磁気学と違って色力学は古典論だけでは正確な記述ができません. 色力学を扱うには**量子異常**と呼ばれる、純粋な量子論的効果を考える必要があります.

Chern-Simons 理論

Yang-Mills 項の他に, 4 次元 Lagrangian 密度として **Chern-Simons** 項が可能です.

$$L_{\mathrm{CS}} = C\,\mathrm{tr}(F \wedge F) = C\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\left(A \wedge \mathrm{d}A + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right) \tag{8}$$

この項は閉形式ですが, 接続場 A は大域的な関数ではなくねじれたトポロジーが可能なため, 完全形式ではありません. よって, この項による作用は 4 次元空間の 3 次元境界上で $C\,\mathrm{tr}\big(A \wedge \mathrm{d}A + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\big)$ の Lagrangian 密度項がある場合と同様です.

実際その 3 次元境界上の積分は接続 A のねじれ度合を表す整数 (の C 倍) となり, その整数を (第 2) **巻き付き数**と呼びます. ちなみに第 1 巻き付き数は F の 2 次元面での積分で, $\mathrm{U}(1)$ ゲージで巻き付き数がある場合が磁気単極子に対応します.