特性類

不変多項式

ある対称性を満たす多項式を**不変多項式**と呼びます．不変多項式に**曲率 2 形式** F を与えた $P(F)$ は，閉形式であり，さらに異なる接続での曲率の差が完全形式で表せることが示せます．つまり $P(F)$ はゲージポテンシャルに依らないコホモロジーとなります．

また，$2j$ 形式の部分を取り出した $P_j(F)$ も閉形式であることから，局所的には完全形式として表すことができます：

$$P_j(F) = \mathrm{d}Q_{2j-1}(A, F) \tag{1}$$

この $Q_{2j-1}(A, F)$ は $P_j(F)$ の **Chern-Simons 形式**と呼ばれます．

Chern 類

不変多項式として行列式を採用して，

$$c(F) = \det\left(\mathbf{1} + \frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\right) = 1 + c_1(F) + c_2(F) + \cdots \tag{2}$$

としたものを **Chern 類**と呼びます．曲率 2 形式 F は成分として行列を取る微分形式で，行列式の積の部分は微分形式の外積で取ります．また $c_j(F)$ は $2j$ 形式の項で，j **次 Chern 類**と呼ばれます．行列の対角化を経て計算すると

$$c_0(F) = 1, \quad c_1(F) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\operatorname{tr} F, \quad c_2(F) = \frac{1}{2}(\mathrm{i}/2\pi)^2(\operatorname{tr} F \wedge \operatorname{tr} F - \operatorname{tr}(F \wedge F)) \tag{3}$$

などと計算できます．

Chern 指標

不変多項式として行列のトレースと指数関数を組み合わせたものを採用して，

$$\mathrm{ch}(F) = \operatorname{tr}\exp\frac{\mathrm{i}F}{2\pi} = \mathrm{ch}_0(F) + \mathrm{ch}_1(F) + \mathrm{ch}_2(F) + \cdots \tag{4}$$

としたものを **Chern 指標**と呼びます．j **次 Chern 指標**は

$$\mathrm{ch}_j(F) = \frac{1}{j!}\operatorname{tr}\left(\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\right)^j \tag{5}$$

と表せます．また，Chern 類で表すこともできて

$$\mathrm{ch}_0(F) = k, \quad \mathrm{ch}_1(F) = c_1(F), \quad \mathrm{ch}_2(F) = \frac{c_1(F)^2 - 2c_2(F)}{2} \tag{6}$$

などとなります（k は行列の次元）．特に $\mathrm{ch}_2(F) \propto \operatorname{tr}(F \wedge F)$ はゲージ理論において重要です．$\operatorname{tr}(F \wedge F)$ の Chern-Simons 形式は $A \wedge \mathrm{d}A + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A$ となります。