■ 量子色力学への応用

経路積分と Wick 回転

Schrödinger 方程式の他に，Feynman の**経路積分**を用いて系を量子論的に扱えます．経路積分は，系は可能なすべての経路を通り，その経路が重なり合いますが，停留作用近くの経路の確率が最大となり，それ以外は打ち消し合うという考え方です．

重なり具合を表す**分配関数** $Z(\beta)$ に，系のすべての情報が入っています．

$$Z(\beta) = \sum_n \exp(-\beta\mathcal{E}_n) = \operatorname{tr}\exp(-\beta H) \tag{1}$$

時間 t の周期的経路の分配関数は $Z(it)$ ですが，経路積分の式でも表現できます．

$$Z(it) = \int \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t)\ \exp(iS[\boldsymbol{x}]/\hbar) \tag{2}$$

あらゆる経路 $\boldsymbol{x}(t)$ に対して，作用 $S[\boldsymbol{x}]$ を計算して $\exp(iS[\boldsymbol{x}(t)])$ を足し合わせろ，という意味です．巨視的には ($\hbar \to 0$) 停留作用経路の寄与が支配的ですが，小さいスケールでは停留作用経路からずれた経路の影響も無視できず，量子効果が現れます．

ところで経路積分は特異点を通ったり，発散しがちですが，虚数時間 $\tau = it$ にして扱うことで解析的に有意味な解が得られます．そのとき

$$Z(\tau) = \int \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t)\ \exp(-S[\boldsymbol{x}]/\hbar) \tag{3}$$

になり，τ を実数範囲で考え，求まった $Z(\tau)$ に $\tau = it$ を最後に代入すると解析的に正しい分配関数が計算できます．この手法を **Wick 回転**と言います．

相対論の計量は $-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ ですが，Wick 回転で $\mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ となりますので，符号を気にせず普通の 4 次元空間で楽に計算できることも利点です．

4 次元空間の扱い

4 次元空間のトポロジーを議論するために，コンパクト構造を与えます．最も簡単な方法として，無限遠を一つの点にまとめるように包んで球面にする方法があります．
(内在的曲率には影響しないので，「曲がった時空にする」わけではありません．)

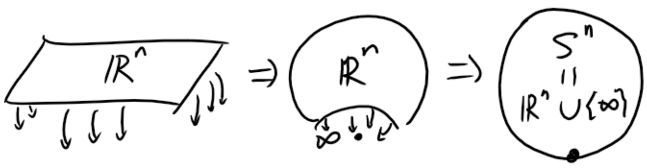

Figure 1. n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ に無限遠を加えて n 次元球面 S^n と見なせる．(図は $n = 2$)

空間上にゲージ場が (最小作用の配置で) あれば，無限遠 ∞ 周りでねじれる場合があります．また，適切にゲージ変換すると無限遠ではなく $\mathbb{R}^4$ 空間上でねじれが起こるようになります．そのねじれ度合は巻き付き数で決まり，同じ巻き付き数の解は互いにホモトピー同値で小さいゲージ変換で対応します．この 4 次元空間解を**インスタントン**と呼びます．インスタントンは，Yang-Mills 理論に自己/反自己双対性 $\star F = \pm iF$ を仮定して得られる Chern-Simons 理論から簡単に構成できます (BPST 解)．

真空と θ 真空

場の量子論によると，粒子とは量子場の摂動的励起です．真空状態も場の量子状態の一つで，すべての量子場の基底状態です．特に量子色力学における真空は，$A_0 = 0$ ゲージを取った 3 次元空間上のゲージ場配置の量子状態で，ゲージ場の巻き付きによって離散的に区別されます．巻き付き数 n の真空を $|n\rangle$ で表します．

巻き付き数 k のインスタントンは，異なる 2 つの量子状態 $|n\rangle$ から $|n+k\rangle$ へのトンネル効果に寄与するゲージ場の経路となります．

巻き付き数で区別した固有状態 $|n\rangle$ は，巻き付きを生成するインスタントン演算子により離散対称性を持ちます．Bloch 定理の考え方から，真空状態はエネルギー固有状態として「**θ 真空**」$|\theta\rangle = \sum_n e^{in\theta}|n\rangle$ の形でなければなりません．

ここで真空状態の θ はざっくり言うと，巻き付き 1 個あたりにどれだけ位相がねじれるかを表す，我々の宇宙における定数です．そのとき，量子論的に以下の Chern-Simons 項が有効 Lagrangian 項として追加されます．

$$L_\theta = \frac{\theta}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}(F \wedge F) \tag{4}$$

この項は CP 対称性という対称性を破る項で，θ は CP 対称性を破る尺度として捉えられていますが，中性子の電気双極子の観測から得られた θ はゼロです．($|\theta| < 10^{-10}$)

強い相互作用に関して CP 対称性が守れているように見える現象は，**強い CP 問題**と言われ，まとまった定説はまだない状態です．

カイラル量子異常

Lagrangian に対称性があれば，古典的には Noether 定理により対応する保存量がありますが，量子的には作用 $S[\phi]$ が対称的でも経路積分の測度が変わるためその対称性を失う場合があります．これを**量子異常**と呼びます．

$$\int \mathcal{D}\phi\ \exp(iS[\phi]) = \int \mathcal{D}\phi'\ J\exp(iS[\phi']) \neq \int \mathcal{D}\phi'\ \exp(iS[\phi']), \quad J \neq 1 \tag{5}$$

質量のないスピノル場のカイラル対称性異常が代表例です．左手と右手のカイラル成分をそれぞれの方向に沿って回しても Lagrangian は不変，保存量 $j^\mu_\star$ です．

$$\psi(x) \to \psi(x) + i\alpha(x)\gamma_\star\psi(x),\ \mathrm{h.c.} \implies j^\mu_\star = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_\star\psi(x) \tag{6}$$

ところで，測度の変化まで考慮して $\partial_\mu j^\mu_\star$ を評価すると，**指数定理**という定理から

$$\partial_\mu j^\mu_\star(x) = -2i\,\mathrm{tr}_{\gamma^\mu\partial_\mu\psi=0}(\gamma_\star) = -\frac{1}{16\pi^2}\,\mathrm{tr}(F \wedge F) \neq 0 \tag{7}$$

および，その全空間積分である巻き付き数がちょうど Dirac 演算子 $\gamma^\mu\partial_\mu$ に関する核の数の差 $\nu_+ - \nu_-$ と一致することが分かります．

参考文献

[1] M Nakahara. Geometry, topology and physics (2018). CRC press.
[2] A Smilga. Lectures on quantum chromodynamics (2001). World Scientific.