# CHSH 不等式とその破れ

## CHSH 不等式とは？

現実世界において，事象は観測する前から確定しているように見えます．しかし，量子論の範囲では，状態が観測した時点で確率的に決定されるのです．これを説明するための数式が CHSH 不等式です．

量子エンタングル状態の 2 粒子を用意し，それを異なる方向で観測します．ここでは，相関のある光子を離れた場所で，2 人の観測者がそれぞれ別の偏光板に通すことを考えます．測定角度は $\theta_1$ と $\theta_2$，$\phi_1$ と $\phi_2$ のどちらかからランダムで選びます．光子が通過すれば $+1$，通過しなければ $-1$ を測定値とします．角度 $\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2$ に対応する測定値を $a_1, a_2, b_1, b_2$ とし，これらの積についての不等式を考えます．物理量 $a$ の期待値 は $\langle a \rangle$ と書けます．これを用いて，表式

$$C = \langle a_1 b_1 \rangle + \langle a_2 b_1 \rangle - \langle a_1 b_2 \rangle + \langle a_2 b_2 \rangle$$

を考えましょう．

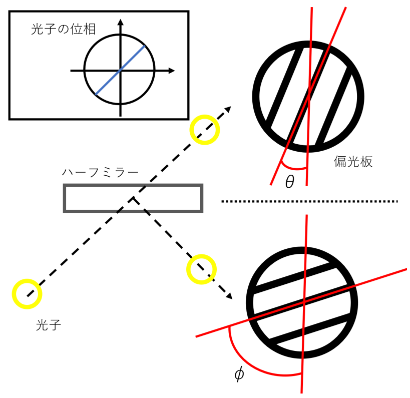


Figure 13. 偏光板で 2 光子を測定する場合．

## 実在論を仮定した場合

物理量が観測する前に決まっていると仮定した場合 (実在論といいます)，観測値はある物理的な変数 $\lambda$ によって説明できます．このとき，期待値をある変数 $a_{1\lambda}, b_{1\lambda}$ と確率 $P(\lambda)$ を用いて

$$\langle a_1 b_1 \rangle = \int d\lambda P(\lambda) a_{1\lambda} b_{1\lambda}$$

のように書けます．また，上記の仮定を置くと，$a_{1\lambda}, b_{1\lambda}$ それぞれが $-1$ または $1$ の値をとるので，期待値は $-1$ から $1$ の間の値となります．絶対値 1 以下の実数 $x_1, x_2, x_3, x_4$ に対し，

$$|x_1 x_3 + x_2 x_3 - x_1 x_4 + x_2 x_4| \leq 2$$

が成立し，ここ先ほどの変数を代入すると $|C| \leq 2$ となります．

## 確率的に決まる場合

一方，量子論では，積の期待値を期待値の積で書くことはできません．

測定値が観測の瞬間に確率的に決まると仮定し，角度 $\theta_1, \phi_1$ で測定したとき，$a_1 b_1$ の期待値は $\langle a_1 b_1 \rangle = -\cos 2(\theta_1 - \phi_1)$ となります. 同様の計算を行って, 観測角度を動かした場合に $C$ をプロットすると，図のマーカーの点において $C < -2$ となり，左の場合と範囲が異なります．

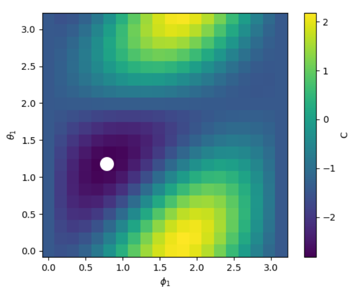


Figure 14. $C$ の値．

## 結論

実験によって，量子論の世界では $2 < |C| \leq 2\sqrt{2}$ となる場合があるとわかっており，量子論の世界では事象が観測の瞬間に確率的に決まることが示されました．