Black-Scholes-Mertonモデル

を導いて友達に自慢したい！というあなたへ

愛敬公太(Physics Lab. 2023 経済物理班)

Black-Scholes-Mertonモデルとは？年収は？恋人はいる？

- Black, Scholes, Mertonの3人がつくりあげた，デリバティブの価格評価に用いられるモデル
- 株価の時間変動をMarkov過程として捉える
- 効率的市場仮説にもとづく(ここが問題だったりもする)

Black-Scholes-Merton方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} rS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rf$$

(出典:いらすとや，とくに断りのない限り以下同様)

デリバティブ－フォワード契約とオプション

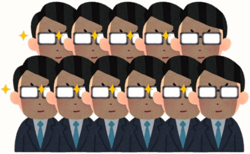
デリバティブ…他のより基本的な資産や商品の価値に連動して価値が決まる金融商品

代表例

・フォワード契約…未来のある定められた時点で，ある定められた価格でモノを売る/買うという**義務を負う約束**(それぞれショート/ロング・ポジションとよぶ)
モノの価格は無リスク金利(債券などの収益率)と関係

・オプション…未来のある定められた時点で，ある定められた価格でモノを売る/買うという**権利**(それぞれプット/コール・オプションとよぶ)
オプション自体に価格がある

効率的市場仮説と無裁定原理



効率的市場仮説…市場は情報に対して瞬時に&合理的に反応する
↓
無裁定原理…無リスクで儲けられる"ウマい話"は存在しない

より正確には,裁定機会(アービトラージ)があっても即座に消費される,というイメージ
熱力学における"準静的過程"みたいなものだと思ってもいいかもしれない

→任意の無リスクのポートフォリオ(資産の組み合わせ)の収益率は債券に等しい
→時間Tをかけて収益率xを達成できる無リスクのポートフォリオがあるとき,必ず

$$x = \exp(rT)$$

が成り立つ(rは無リスク金利)
➡これを用いて,デリバティブの価格評価ができる!

※もちろん,近似的な取り扱い(いい線はいっているらしいが…)

フォワード価格

現在価格S_0の商品を，時間Tののちに受渡価格Kで買うというロングのフォワード契約を考える

いま，このフォワード契約を売り，商品を買うとする

必要な元手はS_0で,時間Tののちの資産はKとなるから，無裁定原理より

$$\frac{K}{S_0} = \exp(rT)$$

$$\therefore K = \exp(rT)S_0$$

➡つまり，フォワード契約の受渡価格は現在価格よりも高くなる！

※債券の存在により，貨幣価値が自動的に下がっていくと考えてもよい

フォワード契約の価値

時刻0に前ページのフォワード契約を買ったとする(満期は時刻T)

→時刻tにおけるこのフォワード契約の価値(ペイオフ)fはいくらか？

時刻tでの商品の価格をSとすると，受渡価格が$\exp\big(r(T-t)\big)S$であるようなフォワード契約が売れる

すると，時刻Tにおいて$\exp\big(r(T-t)\big)S-K$の利益が無リスクで得られる

↓

時刻tでのこれらフォワード契約の価値は，無リスク金利で割引いて

$$\exp\big(-r(T-t)\big)\Big(\exp\big(r(T-t)\big)S-K\Big)=S-\exp\big(-r(T-t)\big)K$$

$t=0$とすると価値は0となるので，締結直後のフォワード契約には価値がないとしよう

すると上式の価値はすべて最初に結んでいたフォワード契約に由来することになるから

$$f=S-\exp\big(-r(T-t)\big)K$$

オプションの価値

オプションには2種類がある

・アメリカン・オプション…満期日まで**<u>いつでも</u>**行使できる
・ヨーロピアン・オプション…満期日に**<u>のみ</u>**行使できる←単純なのでこっちを考える

株価S_0の株を, 時間Tののちに価格Kで買うコール・オプションがある
株価は次のように確率的に変動するとする(ただし, $dS_0 < K < uS_0$)

$$S_0 \to \begin{cases} uS_0 & (\text{上昇}) \\ dS_0 & (\text{下落}) \end{cases}$$

満期日でのオプションの価値は
・上昇したなら行使するので$uS_0 - K$
・下落したなら行使しないので0
→より一般に, それぞれf_u, f_dとしよう

オプションの価格

コール・オプションの価格fは, 無裁定原理から求められる

この株をΔ単位買い, コール・オプションを1単位売って無リスクのポートフォリオを組む

・上昇したなら最終価値は$\Delta u S_0 - f_u$
・下落したなら最終価値は$\Delta d S_0 - f_d$

→無リスクになるときこれらは等しく $\Delta = \dfrac{f_u - f_d}{(u-d)S_0}$

このポートフォリオの収益率([最終価値]÷[現在価値])は確実に

$$\frac{df_u - uf_d}{u-d} \div (\Delta S_0 - f) = \frac{df_u - uf_d}{f_u - f_d - (u-d)f}$$

オプションの価格

無裁定原理より，無リスクなポートフォリオの収益率は無リスク金利と等しい

ゆえに

$$\frac{df_u - uf_d}{f_u - f_d - (u-d)f} = \exp(rT)$$

$$\therefore f = \frac{\bigl(1 - d\exp(-rT)\bigr)f_u - \bigl(1 - u\exp(-rT)\bigr)f_d}{u-d} = \exp(-rT)(pf_u - (1-p)f_d)$$

$$\text{ただし } p = \frac{\exp(rT) - d}{u-d}$$

➡fが，株価の**上昇/下落確率を用いることなく**求まった！

効率的市場仮説再考

Q. オプションの価格fの決定に, 株価の上昇/下落確率が関わらないのはなぜか？

A. 効率的市場では, 株価の上昇/下落確率は株価そのものにすでに折り込まれているから

例えば, 株価が高確率で上昇するならば

①市場もそれを予期して$S_0 \sim \exp(-rT)uS_0$(すなわち, $u \sim \exp(rT)$)となり

②$p \sim 1$となるから

③$f \sim f_u$となってウマ味は一切生じない

株価が高確率で下落する場合も, 中間の場合も全く同様

(出典:福島県警)

株価変動のMarkov性

効率的市場においては，株価の時間変動の情報は”現在の株価”に含まれている

↓

株価の時間変動の記述には，過去の株価の履歴など要らないはず

$$\text{イメージ:}\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = f(t, S)$$

ただし，決定論的な予言はもちろん不可能だから，確率過程として描こう

➡つまりは，株価の時間変動を**<u>Markov過程</u>**として捉える！

↑”記憶のない”確率過程

※過去の株価変動のパターンから株価を予測するアプローチをテクニカル分析という
しかし，これが平均を上回る実績を上げる例はあまりない…らしい

連続Markov過程(おきもち)

株価Sの時間変動は(時間並進対称な)連続Markov過程にしたがうとして

$$S(t+\Delta t)-S(t)\sim P_{\Delta t,\,S(t)}$$

↑適当な確率分布

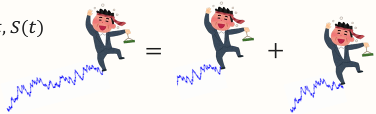
例えばΔtを前半と後半に分けると，特徴的な時間スケールがないこととMarkov性から

$$\left.\begin{array}{r} S\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)-S(t)\sim P_{\frac{1}{2}\Delta t,\,S(t)} \\ S(t+\Delta t)-S\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)\sim P_{\frac{1}{2}\Delta t,\,S\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)} \end{array}\right] \to \text{和は} \sim P_{\Delta t,\,S(t)}$$

が成り立つはず

Δtが十分小さいとし，さらに分割の個数をnに増やせば，$P_{\Delta t,\,S(t)}$は次を満たすべきとわかる

$$X_1,\cdots,X_n\sim P_{\frac{1}{n}\Delta t,\,S(t)} \to X_1+\cdots+X_n\sim P_{\Delta t,\,S(t)}$$



🍷連続Markov過程(おきもち)🍷

一方で，nが十分大きいとき，中心極限定理より

$$X_1 + \cdots + X_n \sim N(m, s^2)$$

※もとの分布の裾が(分散が発散するほどに)広い場合は中心極限定理が成り立たないらしい
…が，株価の時間変動がそんな分布に従う場合はムシする(ここが実は少し怪しい)

したがって

$$P_{\Delta t, S(t)} = N(m, s^2)$$

$$P_{\frac{1}{n}\Delta t, S(t)} = N\left(\frac{m}{n}, \frac{s^2}{n}\right)$$

でなければおかしい

さらに，上の議論から$m, s^2 \propto \Delta t$であるので，その比例係数をそれぞれa, b^2とかく

つまり，まとめると

$$S(t + \Delta t) - S(t) \sim N(a\Delta t, b^2\Delta t)$$

連続Markov過程(おきもち)

Δtは微小としたので，その意味を込めて微分の記法を用いると

$$\mathrm{d}S \sim N(a\mathrm{d}t, b^2\mathrm{d}t)$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}S - a\mathrm{d}t}{b\sqrt{\mathrm{d}t}} \sim N(0,1)$$

ここで表記の簡略のため，$N(0,1)$にしたがうランダムな量εを導入する

$$\frac{\mathrm{d}S - a\mathrm{d}t}{b\sqrt{\mathrm{d}t}} = \varepsilon$$

$$\therefore \mathrm{d}S = a\mathrm{d}t + b\varepsilon\sqrt{\mathrm{d}t}$$

さらに，ランダム性を表す量を$\mathrm{dz} = \varepsilon\sqrt{\mathrm{d}t}$とまとめて

$$\mathrm{d}S = a\mathrm{d}t + b\mathrm{dz}$$

スッキリしていて便利なので，連続Markov過程はこの記法で表現することにする

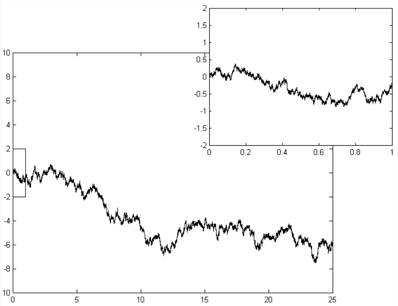
Wiener過程

連続Markov過程において，パラメータa, b^2を定数(Sに依らない)とするとWiener過程を得る

Wiener過程

$$\mathrm{d}S = a\mathrm{d}t + b\mathrm{d}z$$

a:期待ドリフト率, b^2:分散率



Wiener過程

Wiener過程の場合は, $\mathrm{d}t$を微小量に限る必要はないので

$$S \sim N(S_0 + at, b^2 t)$$

よって, 時間並進対称性およびMarkov性より, $S(t) = S$のもとで$S' < S(t') < S' + \mathrm{d}S'$であるような条件付き確率を$\mathcal{G}\mathrm{d}S'$とするならば

$$\mathcal{G} = \frac{1}{b\sqrt{2\pi(t'-t)}} \exp\left(-\frac{\left(S' - S - a(t'-t)\right)^2}{2b^2(t'-t)}\right)$$

$a = 0$および$b^2 = 2D$とすると, 馴染みのあるBrown運動の式が得られる

すなわち, Wiener過程は定常的かつ一様な流れのもとでのBrown運動と捉えられる

株価過程

…でも，株価の時間変動をWiener過程と捉えるのは本当に妥当だろうか？

① aは，単位時間あたりの株価の上昇幅(の期待値)を表していた

→しかし，株は上昇幅ではなく収益率で評価されるはず

→つまり，一定となるべきは期待収益率

$$\mu = \frac{a}{S}$$

である！

② bは，単位時間あたりの株価変動の標準偏差を表していた

→もとの株価が大きいほど，変動もそれに比例して大きくなるだろう

→つまり，一定となるべきはボラティリティ(移り気とかいう意味)

$$\sigma = \frac{b}{S}$$

である！

株価過程

以上より，株価の時間変動は次の株価過程で記述する方がよさそう

株価過程

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}z$$

μ:期待収益率，σ:ボラティリティ

→左辺は$\mathrm{d}(\log S)$であるので，要するに$\log S$がWiener過程にしたがうのでは？

→すると，さっきの議論から

$$\log\frac{S}{S_0} \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$$

なのでは？

勝ったッ！
第3部完！

…残念ながら，これは間違い

悲しいお知らせ:ここからは(おきもち)数学の時間だ…

株価過程にあらわれる$d(\log S)$を正しく扱うには，確率過程における”微分積分”を定める必要アリ

↓

目指すのは，いままで考えていた確率過程の一般化であるIto過程~~(別に一般化する必要はないが)~~

$$\mathrm{d}S = a(t,S)\mathrm{d}t + b(t,S)\mathrm{d}z$$

と関数$G(t,S)$に対して成り立つ次のItoの補題

Itoの補題

$$\mathrm{d}G = \frac{\partial G}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial G}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}(\mathrm{d}S)^2$$

ここで$(\mathrm{d}S)^2 = b^2\mathrm{d}t$

Itoの確率積分ー目標と困難

まずは準備&練習として，一般に時刻tと経路ωの関数$f(t,\omega)$をzで積分することを考える

$$\int_{t_i}^{t_f} f\mathrm{d}z = ？？？$$

ただし，Markov性を用いたいのでfは”先取りなし”の関数とする

つまり，$f(t,\omega)$は時刻t以前での情報のみから決まる

素朴に思いつくのは，次式で$n\to\infty$とすること(Riemann-Stieltjes積分)

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k,\omega)\Delta z_k \quad \left(t_i = t_1 < \cdots < t_n = t_f, \Delta z_k = z(t_{k+1}) - z(t_k)\right)$$

$\uparrow t_k \sim t_{k+1}$の間の任意の時刻

…しかし，実はこれではうまくいかない

Itoの確率積分ー目標と困難

なぜうまくいかないのかというと，積分の値がτ_kの選び方に依ってしまうから

実例として，$\tau_k = t_k$とした場合と$\tau_k = t_{k+1}$とした場合とを比べてみよう

時間の分割の細かさのオーダーをθとして，$\Delta f_k = f(t_{k+1}, \omega) - f(t_k, \omega) = \mathcal{O}(\theta^\nu)$のときを考える

$\Delta z_k = \mathcal{O}(\theta^{0.5})$と$n = \mathcal{O}(\theta^{-1})$に注意すると

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(t_{k+1}, \omega)\Delta z_k - \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, \omega)\Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta f_k \Delta z_k = \mathcal{O}(\theta^\nu)\times\mathcal{O}(\theta^{0.5})\times\mathcal{O}(\theta^{-1}) = \mathcal{O}(\theta^{\nu-0.5})$$

普通の積分なら$\nu \geq 1$なので問題なく$\theta \to 0$で差も消える

しかし，いまはfが例えばSに依存してもよいので $\nu \geq 0.5$であり，$\nu = 0.5$のときがアウト

Itoの確率積分ー解決策

実は, τ_k を t_k に選ぶとうまく(分割にも依らず)積分が定まる

Itoの確率積分

$$\int_{t_i}^{t_f} f \mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, \omega) \Delta z_k$$

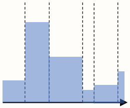
Q. なぜうまくいくのか?

A. またもやMarkov性のおかげ

Itoの確率積分ー単関数

まず, fとして次のような単関数ϕ_nを考える(kは0から$n-1$を走る)

$$\phi_n(t,\omega)=e_k(\omega)\ \ (t_k \le t < t_{k+1})$$



この積分は次式とするのが妥当そう

$$\int_{t_i}^{t_f} \phi_n \mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n-1} e_k(\omega)\Delta z_k$$

Itoの確率積分ーItoの等長性

すると，次のItoの等長性が成り立つ

$$\left\langle \left(\int_{t_i}^{t_f} \phi_n \mathrm{d}z \right)^2 \right\rangle = \left\langle \int_{t_i}^{t_f} (\phi_n)^2 \mathrm{d}t \right\rangle$$

なぜなら，左辺を展開して

$$\left\langle \left(\int_{t_i}^{t_f} \phi_n \mathrm{d}z \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\sum_{k=0}^{n-1} e_k(\omega) \Delta z_k \right) \left(\sum_{l=0}^{n-1} e_l(\omega) \Delta z_l \right) \right\rangle = \sum_{k,l} \langle e_k(\omega) e_l(\omega) \Delta z_k \Delta z_l \rangle$$

Itoの確率積分ーItoの等長性

①$k \neq l$のとき，$k < l$であるとすると，$e_k(\omega)e_l(\omega)\Delta z_k$(時刻$t_l$以前の情報)と$\Delta z_l$とは独立であるから

$$\langle e_k(\omega)e_l(\omega)\Delta z_k \Delta z_l\rangle = \langle e_k(\omega)e_l(\omega)\Delta z_k\rangle\langle\Delta z_l\rangle = 0$$

$$\uparrow 0$$

②$k = l$のとき，$e_k(\omega)e_l(\omega)\Delta z_k \Delta z_l = \left(e_k(\omega)\right)^2(\Delta z_k)^2$において$\left(e_k(\omega)\right)^2$と$(\Delta z_k)^2$とは独立であるから

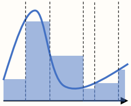
$$\langle e_k(\omega)e_l(\omega)\Delta z_k \Delta z_l\rangle = \left\langle\left(e_k(\omega)\right)^2(\Delta z_k)^2\right\rangle = \left\langle\left(e_k(\omega)\right)^2\right\rangle\langle(\Delta z_k)^2\rangle = \left\langle\left(e_k(\omega)\right)^2\right\rangle\Delta t_k$$

$$\uparrow \Delta t_k$$

以上より

$$\left\langle\left(\int_{t_i}^{t_f}\phi_n \mathrm{d}z\right)^2\right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1}\left\langle\left(e_k(\omega)\right)^2\right\rangle\Delta t_k = \left\langle\sum_{k=0}^{n-1}\left(e_k(\omega)\right)^2\Delta t_k\right\rangle = \left\langle\int_{t_i}^{t_f}(\phi_n)^2\mathrm{d}t\right\rangle$$

Itoの確率積分ー単関数近似



単関数の積分は問題なくできたので，一般のfを単関数で近似して積分を定める

具体的には，$e_k(\omega) = f(t_k, \omega)$とすればいい

すると実際，これは次を満たす”よい近似”になっている(証明略，かなりめんどい)

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle \int_{t_i}^{t_f} (f-\phi_n)^2 \mathrm{d}t \right\rangle = 0$$

このとき，積分は

$$\int_{t_i}^{t_f} f\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty}\int_{t_i}^{t_f} \phi_n \mathrm{d}z$$

で定義

Itoの確率積分ーー意性

問題は，この積分がwell-definedか？ということ(分割に依ると意味がない)

→異なる分割$\{t_i\}$, $\{t'_j\}$(分割の個数はそれぞれn, m)に関する和I_n, I'_mの"差"が消えるかをみよう

I_n, I'_mはωに依る確率変数→その"大きさ"(ノルム)を測らなければ議論できない

…というわけで，確率変数$X(\omega)$のノルムは次で定める

$$\|X(\omega)\|^2 = \left\langle \left(X(\omega)\right)^2 \right\rangle$$

この定義を用いて2つの積分の"差"を評価すると

$$\|I_n - I'_m\|^2 = \langle (I_n - I'_m)^2 \rangle = \left\langle \left(\int_{t_i}^{t_f} (\phi_n - \phi'_m) \mathrm{d}z \right)^2 \right\rangle$$

Itoの確率積分ーー意性

ここで，$\phi_n - \phi'_m$も単関数(分割としてはもとの2つの分割の共通細分をとる)

よってItoの等長性より

$$\left\langle \left(\int_{t_i}^{t_f} (\phi_n - \phi'_m) \mathrm{d}z \right)^2 \right\rangle = \left\langle \int_{t_i}^{t_f} (\phi_n - \phi'_m)^2 \mathrm{d}t \right\rangle$$

$p, q \in \mathbb{R}$に対し成り立つ$(p-q)^2 \leq 2(p^2+q^2)$において$p = f - \phi_n$, $q = f - \phi'_m$とすれば

$$\left\langle \int_{t_i}^{t_f} (\phi_n - \phi'_m)^2 \mathrm{d}t \right\rangle \leq 2 \left\langle \int_{t_i}^{t_f} \left((f - \phi_n)^2 + (f - \phi'_m)^2 \right) \mathrm{d}t \right\rangle$$

と評価でき，近似の性質から$n, m \to \infty$で右辺は消えるので

$$\lim_{n,m\to\infty} \| I_n - I'_m \|^2 = 0$$

以上より，積分は一意に定まってめでたしめでたし

Itoの補題

いよいよ, Itoの補題を導こう

GをTaylor展開し, 次の和の極限として表す

$$G-G_0=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta G_k=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\underline{\frac{\partial G}{\partial t}\Delta t_k}+\underline{\frac{\partial G}{\partial S}\Delta S_k}+\underline{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(\Delta t_k)^2}+\underline{\frac{\partial^2 G}{\partial t\partial S}\Delta t_k\Delta S_k}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}(\Delta S_k)^2+\underline{R_k}\right)$$

↑ 剰余項

赤線の項は$n\to\infty$で消える

青線の項は$n\to\infty$でそれぞれ

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial G}{\partial t}\Delta t_k\to\int_{t_i}^{t_f}\frac{\partial G}{\partial t}\mathrm{d}t$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial G}{\partial S}\Delta S_k\to\int_{t_i}^{t_f}\frac{\partial G}{\partial S}\mathrm{d}S$$

Itoの補題

よって問題は

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} (\Delta S_k)^2 \to ？？？$$

ここで，おおよそ($n \to \infty$で厳密に)

$$(\Delta S_k)^2 \sim \underline{a^2 (\Delta t_k)^2} + \underline{2ab\Delta t_k \Delta z_k} + b^2 (\Delta z_k)^2$$

であって赤線の項の和は$n \to \infty$で消えるから，結局

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} b^2 (\Delta z_k)^2 \to ？？？$$

が知りたい

直感的には，$\Delta z_k \sim N(0, \Delta t_k)$なので $(\Delta z_k)^2 = \Delta t_k$としてしまいたくなる

↑実は，これで**<u>正解</u>**

Itoの補題

しばらく，簡略のために求めたい和を

$$\sum_{k=0}^{n-1} g_k(\Delta z_k)^2$$

とかくことにする

さっきの直感が合っているためには，$n \to \infty$で次が消えればよさそう

$$\left\langle \left(\sum_{k=0}^{n-1} g_k\big((\Delta z_k)^2 - \Delta t_k\big) \right)^2 \right\rangle$$

Itoの確率積分のときと同様に展開すると

$$\left\langle \left(\sum_{k=0}^{n-1} g_k\big((\Delta z_k)^2 - \Delta t_k\big) \right)^2 \right\rangle = \sum_{k,l} \left\langle g_k g_l \big((\Delta z_k)^2 - \Delta t_k\big)\big((\Delta z_l)^2 - \Delta t_l\big) \right\rangle$$

Itoの補題

$k \neq l$なる項は, Itoの確率積分のときと同様に消える

$k = l$の項も, Markov性より

$$\left\langle (g_k)^2 \left((\Delta z_k)^2 - \Delta t_k \right)^2 \right\rangle = \langle (g_k)^2 \rangle \langle (\Delta z_k)^4 - 2(\Delta z_k)^2 \Delta t_k + (\Delta t_k)^2 \rangle$$

ここで, $\Delta z_k \sim N(0, \Delta t_k)$より$\langle (\Delta z_k)^4 \rangle = 3(\Delta t_k)^2$, $\langle (\Delta z_k)^2 \rangle = \Delta t_k$(証明略, 特性関数でも使えば？)ゆえ

$$\left\langle (g_k)^2 \left((\Delta z_k)^2 - \Delta t_k \right)^2 \right\rangle = 2\langle (g_k)^2 \rangle (\Delta t_k)^2$$

これはもちろん, 足しあげても$n \to \infty$で消える

➡$(\Delta z_k)^2 = \Delta t_k$として, 次のように計算することが許された！

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} b^2 (\Delta z_k)^2 \to \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} b^2 \mathrm{d}t$$

Itoの補題

まとめると

$$G - G_0 = \int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial G}{\partial t}\mathrm{d}t + \int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial G}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2}(\mathrm{d}S)^2 \quad \left((\mathrm{d}S)^2 = b^2\mathrm{d}t\right)$$

微分形式に直して

$$\mathrm{d}G = \frac{\partial G}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial G}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}(\mathrm{d}S)^2 \quad \left((\mathrm{d}S)^2 = b^2\mathrm{d}t\right)$$

さらに, $\mathrm{d}S = a\mathrm{d}t + b\mathrm{d}z$を代入すれば

Itoの補題

$$\boxed{\mathrm{d}G = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial S}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}b^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial G}{\partial S}b\mathrm{d}z}$$

ここまでお疲れ様でした…！

株価過程再考

さっそく，Itoの補題において$G = \log S$としてみる

$$\mathrm{d}(\log S) = \left(\frac{a}{S} - \frac{b^2}{2S^2}\right)\mathrm{d}t + \frac{b}{S}\mathrm{d}z$$

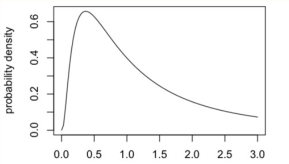
$a = \mu S,\ b = \sigma S$であったので

$$\mathrm{d}(\log S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}z$$

➡$\log S$はWiener過程にしたがう！！

$$\log\frac{S}{S_0} \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$$

対数正規性



株価Sは，その対数が正規分布にしたがう→対数正規性をもつという

$\log X \sim N(m, s^2)$であるとき，$X \sim \Lambda(m, s^2)$であるということにしよう

すると，Xの期待値及び分散は次で与えられる(証明略，計算は調べれば出てくるので…)

$$\langle X \rangle = \exp\left(m + \frac{s^2}{2}\right)$$

$$\mathrm{var}(X) = (\exp(s^2) - 1)\exp(2m + s^2)$$

→ Sについては

株価分布

$$\frac{S}{S_0} \sim \Lambda\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$$

$$\langle S \rangle = \exp(\mu t) S_0$$

$$\mathrm{var}(S) = (\exp(\sigma^2 t) - 1)\exp(2\mu t)(S_0)^2$$

期待収益率と収益率の期待値

$\langle S \rangle = S_0 \exp(\mu t)$→$\mu$は確かに”期待収益率”にふさわしい

しかし，期間$0 \sim t$での収益率xは

$$S = S_0 \exp(xt)$$
$$\therefore x = \frac{1}{t} \log \frac{S}{S_0}$$

なので

$$\langle x \rangle = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$$

➡”期待収益率”と”収益率の期待値”は一致しない！(ヤヤコシヤ…)

これは，Jensenの不等式から

$$\log \langle X \rangle \geq \langle \log X \rangle$$

であるから(算術平均と幾何平均の大小関係からも理解できる)

Black-Scholes-Merton方程式ー仮定

①株価の時間変動は, μおよびσが定数である株価過程にしたがう

②証券はいくらでも分割して取引でき, 空売りが可能で, その売却代金は全額利用可能

③市場は効率的で, 取引コストや税金はない(完全市場)

④デリバティブに途中の配当はない

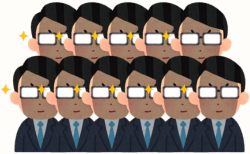
⑤裁定機会は存在しない

⑥証券は連続的に取引される

⑦無リスク金利rは定数で, 期間にも依らない

…こうしてまとめてみると, 仮定はわりにたくさんある(いくつかの仮定を外せる改良モデルもある)

Black-Scholes-Merton方程式ー無裁定原理再び



デリバティブの価格$f(t,S)$に対してItoの補題を用いると

$$\mathrm{d}f=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial S}\mu S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\mathrm{d}t+\frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\mathrm{d}z$$

一方，そもそもの株価過程は

$$\mathrm{d}S=\mu S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}z$$

→2つの価格のランダム性は，同一の項dzに由来する

→無リスクのポートフォリオが組める！

具体的には

$$\text{デリバティブ}:\text{株式}=-1:\frac{\partial f}{\partial S}$$

とすればよい

Black-Scholes-Merton方程式ー無裁定原理再び

このポートフォリオの価値をΠとすると

$$\mathrm{d}\Pi = -\mathrm{d}f + \frac{\partial f}{\partial S}\mathrm{d}S = -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\mathrm{d}t$$

ここで，無裁定原理より収益率は債券と等しくなくてはならない

いまは微小期間を考えているので

$$\mathrm{d}\Pi = r\Pi\mathrm{d}t = r\left(-f + \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\mathrm{d}t$$

よって2式より，fは次を満たすように決まる！

Black-Scholes-Merton方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}rS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rf$$

Black-Scholes-Merton方程式ー境界値問題として

Black-Scholes-Merton方程式の導出において，デリバティブの個性は考慮しなかった
→個々のデリバティブの特性は，境界条件として問題に含める

例1:フォワード契約の境界条件は

$$f(0, S_0) = 0$$
$$f(T, S_T) = S_T - K$$

例2:ヨーロピアン・コール・オプションの境界条件は(株の買値をKとして)

$$f(T, S_T) = \max(S_T - K, 0)$$

➡つまり，デリバティブの価格評価はBlack-Scholes-Merton方程式を境界条件のもとで解く問題にに帰着する！

Black-Scholes-Merton方程式ー永久デリバティブ

Black-Scholes-Merton方程式の練習問題として, 次のデリバティブを考える

「株価SがHに一致したとき, 金額Qが支払われる」

このデリバティブの価格fはSのみに依存すると考えられるので, Black-Scholes-Merton方程式は

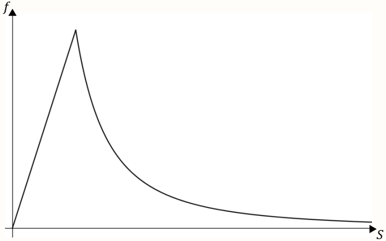
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S}rS + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}S^2}\sigma^2 S^2 = rf$$

境界条件は, $S \leq H$においては$f(0) = 0,\ f(H) = Q$

$S \geq H$においては$f(H) = Q,\ f(\infty) = 0$

→解は

$$f = \begin{cases} \dfrac{QS}{H} & (S \leq H) \\ Q\left(\dfrac{S}{H}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} & (S > H) \end{cases}$$



🍷Black-Scholes-Merton方程式ーリスク中立化法🍷

一般にBlack-Scholes-Merton方程式は偏微分方程式であり，正面から殴り合うのは難しい

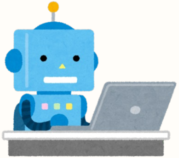
→"リスク中立化法"といううまいテクニックがある

Black-Scholes-Merton方程式は，市場のリスク選好に依存する項μを含まない

↑リスクのある取引に対し，どれだけの収益率を要求するか
普通はリスクが大きいほど高い収益率を要求する
(伊藤カ◯ジとかはリスク愛好型の例)

…ということは，リスク選好をどのように仮定しても正しい解が得られるはず

Black-Scholes-Merton方程式ーリスク中立化法



最も単純なリスク選好である，リスク中立世界を仮定しよう！

リスク中立世界…リスクがどれだけあっても，期待値によってすべてを判断する市場
　　　　　　　　流石にもちろん絵空事

～リスク中立世界の特徴～

①すべての投資資産の期待収益率は無リスク金利と同じ

②すべての投資資産の価値は，収益の期待値を無リスク金利で割引いたものになる

(無裁定原理の適用範囲が，リスクのある場合にも拡大したと考えるとわかりやすいかも)

➡デリバティブの価格評価は，収益の期待値(期待ペイオフ)$\langle f_T \rangle$を求める問題に帰着する！
　さらに，その過程において$\mu = r$としてよい

Black-Scholes-Merton方程式ーフォワード契約の価値

リスク中立化法を用いて，株のフォワード契約の価値fを評価してみる

期待ペイオフは

$$\langle f_T \rangle = \langle S_T - K \rangle = \langle S_T \rangle - K$$

期待収益率は無リスク金利に等しいので

$$\langle S_T \rangle = \exp\big(\mu(T-t)\big)S = \exp\big(r(T-t)\big)S$$

以上より

$$\langle f_T \rangle = \exp\big(r(T-t)\big)S - K$$

無リスク金利で割引いて

$$f = \exp\big(-r(T-t)\big)\langle f_T \rangle = S - \exp\big(-r(T-t)\big)K$$

→以前求めた結果と一致する(さらに，この解はBlack-Scholes-Merton方程式をたしかに満たす)

Black-Scholes-Merton方程式ーオプションの価格

リスク中立化法を用いて，オプションの価格fを評価してみる

期待ペイオフは

$$\langle f_T \rangle = \langle \max(S_T - K, 0) \rangle$$

無リスク金利で割引いて

$$f = \exp(-rT)\langle f_T \rangle = \exp(-rT)\langle \max(S_T - K, 0) \rangle$$

➡あとは，なんとかして$\langle \max(S_T - K, 0) \rangle$を求めればよい

Black-Scholes-Merton方程式ーオプションの価格

ちょっと前に考察した株価分布を思い出し，さらにリスク中立世界であることも用いると

$$m = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T$$

$$s^2 = \sigma^2 T$$

とおけば

$$\frac{S_T}{S_0} \sim \Lambda(m, s^2)$$

対数正規分布の定義を考えれば，株価の対数を用いて計算した方が楽そうなので

$$G = \frac{\log \frac{S_T}{S_0} - m}{s}$$

とすると

$$G \sim N(0,1)$$

🍷Black-Scholes-Merton方程式ーオプションの価格🍷

このGを用いると，求めたいのは$\langle\max(\exp(sG+m)S_0-K,0)\rangle$ということになる

Gの確率密度関数をgとして，これを素直に計算すると

$$\langle\max(\exp(sG+m)S_0-K,0)\rangle=\int_a^\infty(\exp(sG+m)S_0-K)g\mathrm{d}G$$

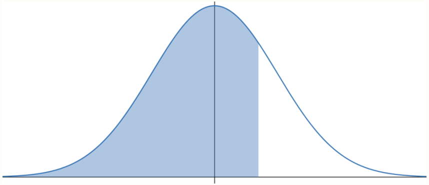
ただし，aは$\exp(sa+m)S_0-K=0$となるような値で，すなわち

$$a=\frac{\log\frac{K}{S_0}-m}{s}$$

とする

あとはこれを実際に積分するだけなので，頑張る

Black-Scholes-Merton方程式ーオプションの価格



まず, $G \sim N(0,1)$だから

$$g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{G^2}{2}\right)$$

この後使うので, 標準正規分布の累積分布関数をhとしておく

つまりは

$$h = \int_{-\infty}^{G} g(G')\mathrm{d}G' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{G} \exp\left(-\frac{G'^2}{2}\right)\mathrm{d}G' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-G}^{\infty} \exp\left(-\frac{G'^2}{2}\right)\mathrm{d}G'$$

↑正規分布の対称性より

Black-Scholes-Merton方程式ーオプションの価格

さて，求めたかった積分を思い出すと

$$\int_a^\infty (\exp(sG+m)S_0 - K)\, g\mathrm{d}G = \frac{\exp(m)S_0}{\sqrt{2\pi}}\int_a^\infty \exp\left(sG - \frac{G^2}{2}\right)\mathrm{d}G - \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_a^\infty \exp\left(-\frac{G^2}{2}\right)\mathrm{d}G$$

第1項は，平方完成して

$$\frac{\exp\left(m+\frac{s^2}{2}\right)S_0}{\sqrt{2\pi}}\int_a^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}(G-s)^2\right)\mathrm{d}G = \exp\left(m+\frac{s^2}{2}\right)S_0 h(s-a)$$

第2項は

$$-\frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_a^\infty \exp\left(-\frac{G^2}{2}\right)\mathrm{d}G = -Kh(-a)$$

よって結局

$$\langle \max(\exp(sG+m)S_0 - K, 0)\rangle = \exp\left(m+\frac{s^2}{2}\right)S_0 h(s-a) - Kh(-a)$$

🍷Black-Scholes-Merton方程式ーオプションの価格🍷

ようやく欲しいものが求まったので，無リスク金利で割引けばようやくオプションの価格が

$$f = \exp(-rT)\left(\exp\left(m + \frac{s^2}{2}\right)S_0 h(s-a) - Kh(-a)\right)$$

と決まる

あとはm, s, aの正体を思い出せば

Black-Scholes-Merton公式

$$f = S_0 h(d_1) - \exp(-rT)Kh(d_2)$$

$$d_1 = s - a = \frac{\log\frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = -a = \frac{\log\frac{S_0}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

ゴール！明日友達に自慢しよう！