

クリフォード代数とスピノ幾何の導入

数理物理班 小原充貴

2023年5月10日

量子論を勉強していると粒子の持つ性質としてスピンという概念に出くわす。順当に勉強していけばスピンを扱うことはできるようになるのだが、結局スピンとは何なのかという問いに明確に答えるのは誰もが頭を悩ますところだろう。この記事はそんなスピンの数学的な取り扱いについて筆者がスピノ幾何の本 [2][本間] を途中まで読んで知り得た話のうち、物理屋に共有して面白がってもらえそうな部分をまとめたものである。したがって記事の大部分が同書に依っている点は前もって白状しておこう。

スピノ幾何学では一般の曲がった時空の上にスピノを導入する作法が明らかになる。そこで本記事では1章で物理の文脈でどのようにスピノが導入されているかを概観し、2章でクリフォード代数を用いてその数学的な定式化を行い、3・4章で幾何学的な概念を導入しつつ曲がった時空におけるスピノ構造の定義とそれが可能になる条件を述べていく。なお、補足には本筋から外れるあるいは本文に書くほどではないと判断した話を書いているが、ホモロジーに触れたことがない方にもその直感的なイメージを伝えたいので6.4節に目を通すことはお勧めしておく。

前提知識として量子力学・群論・多様体論はある程度知っていることを仮定している上、代数学・代数トポロジーに関する結果を証明なしに認めてしまうことがある。多様体論をはじめとした幾何学についてはPhysics Labの数理物理班で同時に公開されている高間君のノート [5] や辻君の解説記事 [7]、代数トポロジーに関する部分については又も高間君のノート [6] などが参考になるだろう。いずれもよく構成された労作なのでのぞいてみるのがよいと思う。特に辻君の記事の最後で球面上にスピノが現れることが示されており、はじめの問いに一定の回答を示している。

目次

1	物理におけるスピン	3
1.1	スピン部分	3
1.2	スピン 1/2 系	4
2	Spin 群	5
2.1	定義	5
2.2	実際に触ってみる (1)	8
3	大域的なスピン構造	10
3.1	定式化	10
3.2	実際に触ってみる (2)	19
4	スピン構造と Stiefel-Whitney 類	21
4.1	層の定義	22
4.2	Čech コホモロジー群の構成	25
4.3	Stiefel-Whitney 類の構成と定理の証明	29
4.4	実際に触ってみる (3)	33
5	補足	33
5.1	角運動量代数	33
5.2	普遍被覆空間が同型を除いて一意であること	35
5.3	1 の分割	38
5.4	ホモロジーの幾何的な意味	38

1 物理におけるスピン

1.1 スピン部分

量子力学^{*1} ないし多くの物理で前提としている空間はユークリッド空間 \mathbb{R}^3 なのでひとまず \mathbb{R}^3 で考える。 \mathbb{R}^3 は一様・等方な空間、言い換えれば並進・回転について対称性を持っているので、この二つの操作がなす群について考えるのは自然だろう。

よく知られた話なので省略するが、並進操作の生成子は運動量演算子 $\hat{\mathbf{p}}$ と呼ばれ、 $[p_i, p_j] = 0$ という代数構造を持っている。いずれの成分も可換なため、固有値 \mathbf{p} の三成分は独立に値をとれ、対応する固有ベクトルの組 $\{|\mathbf{p}\rangle\}$ は直交性を持ち完備関係式を満たす。

回転操作の生成子は軌道角運動量演算子 $\hat{\mathbf{L}} := \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}$ であり、角運動量代数

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \quad (1.1)$$

を持つ。この構造についての標準的な議論は末尾につけておいた。それによるとこの構造から許される自由度は (L, L_z) の二つであり、軌道角運動量 L は $0 \cdot$ 自然数 \cdot 半奇数、その z 成分 L_z は $-L, -L+1, \dots, L$ のいずれかの値をとる。しかしながら、 $\{|\mathbf{x}\rangle\}$ で展開される関数空間には半奇数の角運動量は現れない。それは次の定理^{*2} が成り立つからである。

定理 1.1: 球面調和関数の直交性と完備性

軌道角運動量演算子 L は二次元球面 S^2 上の関数に作用する。 S^2 上の二乗可積分な関数空間を $L^2(S^2)$ とかく。 L^2 について軌道角運動量が $L \in \mathbb{N} \cap \{0\}$ であるような固有空間を \mathcal{Y}_L と書いたとき、

$$L^2(S^2) = \bigoplus_{L=0}^{\infty} \mathcal{Y}_L$$

である。^a

^a \oplus は直和。例えば $A \oplus B = \{a + b \mid a \in A, b \in B, (a, b) = 0\}$ である。

つまり $\hat{\mathbf{L}}^2$ に対し非負整数の固有値を持つ固有関数 (球面調和関数) によって S^2 上の状態空間は完全に張れるのである。ここに半奇数の角運動量が実現する余地はない。

しかし、フェルミオンを考えるには $|\mathbf{x}\rangle$ によって展開される空間 \mathcal{H}_{space} とは独立に別の基底によって展開される部分 \mathcal{H}_{spin} で半奇数の角運動量を許すような空間が必要になる。つまり、 ψ が含まれる状態空間 \mathcal{H} は次のように分解されることになる。

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{space} \otimes \mathcal{H}_{spin}$$

ここで角運動量演算子は、 \mathcal{H}_{spin} に演算するものを $\hat{\mathbf{S}}$ とし、 $\hat{\mathbf{J}} := \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ となる。 $\hat{\mathbf{L}}$ と $\hat{\mathbf{S}}$ は可換であり、 $\hat{\mathbf{S}}$ は (1.1) を満たす。

^{*1} 粒子はある確率分布 ψ の元であらゆる状態を実現する。 ψ は状態の重ね合わせなので、これを状態ベクトル $|\psi\rangle$ とも書く。例えば位置 \mathbf{x} に粒子が存在する状態は $|\mathbf{x}\rangle$ と書き、状態 ψ のもと位置 \mathbf{x} に粒子が存在する確率振幅は $\langle\psi|\mathbf{x}\rangle$ と計算する。特に $|\mathbf{x}\rangle$ は位置を測定する操作 $\hat{\mathbf{x}}$ に対して $\hat{\mathbf{x}}|\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle$ を満たす固有状態である。

^{*2} 詳しくは [1][野村] 定理 7.2.1 を参照。

1.2 スピン 1/2 系

1.2.1 S_i の表現

角運動量を定めると、 $\hat{\mathbf{S}}$ の既約表現が 1 つ定まる。また、角運動量の合成の理論からスピンの大きさが $k/2$ である系はスピン 1/2 系 k 個の、対称テンソル積空間である。^{*3}

つまり \mathcal{H}_{spin} は $S = 1/2$ なる表現空間 $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ によって、

$$\mathcal{H}_{spin} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \oplus \left(\mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \odot \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \right) \oplus \cdots = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k(\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}) \quad (1.2)$$

と分解されていると考えて良い。^{*4}従って、スピン部分 \mathcal{H}_{spin} を調べるためにはいわゆるスピン 1/2 系 $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ について考えれば十分なことがわかる。

では、 $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ における $\hat{\mathbf{S}}$ の表現とそこから生成される回転操作を見ておこう。 (S, s_z) が満たす条件から明らかに二次元なので基底を $|\pm \frac{1}{2}\rangle$ とする。角運動量代数の一般論から、 $\hat{S}_{\pm} := \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$ について

$$\hat{S}_{\pm} |s_z\rangle = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \pm 1 \right) - s_z(s_z \pm 1)} |s_z \pm 1\rangle$$

であるから、スピン角運動量演算子 S_i の行列表現は

$$S_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

各々がパウリ行列の 1/2 倍になっている。そしてここから生成される回転操作は回転角と回転軸方向を (α, \mathbf{n}) として、

$$U(\alpha, \mathbf{n}) = \exp[-i\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}] = \mathbf{1} \cos \frac{\alpha}{2} - i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (1.3)$$

という形のユニタリ変換であった。これは、 \mathbb{C}^2 上の回転群 $SU(2)$ である。ここで $\boldsymbol{\sigma} := 2\mathbf{S}$ としている。

1.2.2 $SU(2)$ と $SO(3)$ の関係

S_i の生成するユニタリ変換 $U(\alpha, \mathbf{n})$ の性質を見ておこう。まず、 $U(\alpha, \mathbf{e}_z)$ とその逆変換を $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a} = \sigma_x a_x + \sigma_y a_y + \sigma_z a_z$ の両側から挟んでみると次のようになる。

$$U^{-1}(\alpha, \mathbf{e}_z)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})U(\alpha, \mathbf{e}_z) = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

これより、 $U(\alpha, \mathbf{e}_z)$ は z 軸周りにベクトル \mathbf{a} を角度 α だけ回転させることがわかる。したがってこの意味で写像 $\text{Ad}: SU(2) \rightarrow SO(3)$ が得られる。さらに式 (1.3) から $U(\alpha, \mathbf{n}) = -U(\alpha + 2\pi, \mathbf{n})$ である。つまり α を動かして $U(\alpha, \mathbf{n})$ が演算子として一周して元に戻ってくるためには α を 4π ずらす必要がある。ところでこれは $SO(n)$ へ写像をした時 4π 回転つまり 2 週分の回転に相当する。よって、 $SU(2)$ は $SO(3)$ の二重被覆になっていることがわかる。

^{*3} スピン 1 系は $|+, +\rangle, |-, -\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle)$ からなる合成系であった。続く式 (1.2) の \odot や $S^k(\cdot)$ などはテンソル積を全て対称化して得られる空間という意味。

^{*4} あくまで数学的な構造の話である。この分解から直ちにボソンをスピン 1/2 の合成として扱おうとするのは危険。

特にユニタリ変換はその複素共役転置が逆行列であるという定義とその部分群として $SU(2)$ は行列式が 1 であることに注意すると,

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(2) \mid |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \cong S^3$$

がわかり, これより $SU(2)$ は単連結であることが言える. このようなとき $\text{Ad} : SU(2) \rightarrow SO(3)$ は普遍被覆写像, $SU(2)$ は $SO(3)$ の普遍被覆群であるという.

2 Spin 群

2.1 定義

$SO(n)$ の普遍被覆群をより統一的に (例えば一般の次元などで) 扱うために, $\text{Spin}(n)$ 群を考えたい. その定義にはいくつかステップが必要なので簡単どころから定めていこう.

定義 2.1: テンソル積空間

$V(\subset \mathbb{R}^n)$: n 次元実ベクトル空間. 直積 $V \times V$ が生成する自由 \mathbb{R} 加群 $F(V)$ にたいし, その部分加群 $R(V)$ を $\forall v, v_1, v_2, u, u_1, u_2 \in V, \forall r \in \mathbb{R}$ について

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2, u) - (v_1, u) - (v_2, u) \\ (v, u_1 + u_2) - (v, u_1) - (v, u_2) \\ r(v, u) - (rv, u) \\ r(v, u) - (v, ru) \end{aligned} \tag{2.1}$$

の形の元が生成するものとする. この時, V の 2 階のテンソル積 $V \otimes V$ は商空間,

$$V \otimes V := \frac{F(V)}{R(V)}$$

である.

テンソル積の普遍性より k 階のテンソル積が同様に構成でき, これを $T^k(V) := \otimes^k V$ とかく. テンソル積空間 $T^*(V)$ とは,

$$T^*(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(V)$$

で, その元は $t = r + v + u \otimes w \cdots$ という形をしている. ただし $T^0(V) := \mathbb{R}$ としている.

意味合いとしては (2.1) の形の元がすべて 0 になるので, 元 $v \otimes u (\in V \otimes V)$ に双線形性が入ることになる. 定義の中でも書いたが階数の異なるテンソル同士の足し算を入れたのがテンソル積空間である. テンソル積と同様な方法でクリフォード代数を定義しよう. 以下ベクトル空間 V には内積 $\langle v, u \rangle$ が入っているとす.

定義 2.2: クリフォード代数

$V(\subset \mathbb{R}^n)$: n 次元実ベクトル空間. $T^*(V)$ を V のテンソル積空間とする. $T^*(V)$ の部分空間として次を考える.

$$S(V) := \{v \otimes v + \langle v, v \rangle \mid v \in V\}$$

そして, $S(V)$ の両側イデアルを

$$J(V) := \{t_1 \otimes s \otimes t_2 \mid t_1, t_2 \in T^*(V), s \in S(V)\}$$

とする. V のクリフォード代数 $Cl(V)$ とは商空間

$$Cl_n(V) := \frac{T^*(V)}{J(V)}$$

のことである. その元は $v \cdot w$ のように表す. (しばしば \cdot は省略する.)

商空間による構成とほぼ同義だが, 具体的には次のような線形写像を考えていると思えば良い:

$$\begin{aligned} \pi : T^*(V) &\rightarrow Cl_n(V), v \otimes w \mapsto v \cdot w \\ &\text{ただし, } \pi(v \otimes v + \langle v, v \rangle) = 0 \end{aligned}$$

この時, $\pi((v+w) \otimes (v+w))$ を考えることで, 次のクリフォード関係式^{*5}が成り立つことがわかる;

$$v \cdot w + w \cdot v = -2 \langle v, w \rangle \quad (2.2)$$

クリフォード代数 Cl_n は 2^n 次元ベクトル空間である.^{*6} 実際, \mathbb{R}^n の基底を $\{e_1, \dots, e_n\}$ とすると, 式 (2.2) から任意の元が添字を昇順に並べた $e_{i_1} \cdot e_{i_2} \cdots e_{i_k}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_k, 1 \leq k \leq n$) の線型結合で一意にかける.

$Cl_n(V)$ の上で $\text{Spin}(n)$ は次で定義される.

定義 2.3: $\text{Spin}(n)$

$V(\subset \mathbb{R}^n)$: n 次元実ベクトル空間. $Cl_n(V)$ を V のクリフォード代数とする.

$$\text{Spin}(n) := \{v_1 \cdot v_2 \cdots v_{2p} \in Cl_n(V) \mid \|v\| = 1, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

クリフォード代数 $Cl_n(V)$ はクリフォード積「 \cdot 」について群をなす. 実際

- 結合律: $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$ ($\forall u, v, w \in Cl_n(V)$)
- 単位元: $1 \cdot v = v \cdot 1 = v$ ($\forall v \in Cl_n(V)$)
- 逆元: $v^{-1} := -v/\|v\|^2 : v \cdot v^{-1} = v^{-1} \cdot v = 1$ ($\forall v \in Cl_n(V)$)

である. そこで $Cl_n(V)$ の \mathbb{R}^n への表現 $\text{Ad} : Cl_n(V) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ を次のように与えてみよう: つまり,

^{*5} 外積代数のときは右辺の内積の項が存在しなかった.

^{*6} 残念ながら Cl_n は計量ベクトル空間ではないので, これをきちんと示すのは少し大変なのだが, 主題から逸れるので割愛させていただきます.

$v, x \in \mathbb{R}^n$ として,

$$\text{Ad}(v)x := v \cdot x \cdot v^{-1} = -x + 2 \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} v = -R_v(x) \quad (2.3)$$

最後の行は x の v に垂直な面に関する鏡映を表している。この Ad が準同型写像になっていることはほぼ明らかだろう。この表現は $\text{Spin}(n)$ を群とした時にも使える。その場合、 $\text{Spin}(n)$ が偶数個の単位ベクトルの積から構成されることから、 $g = v_1 \cdots v_{2p}$ にたいして、

$$\text{Ad}(g)x = R_{v_1} \circ \cdots \circ R_{v_{2p}}(x)$$

と、偶数回の鏡映操作となる。

ところで、次の定理がある。

定理 2.1: Cartan-Dieudone

$g \in O(n)$ は n 個以下の鏡映の合成

$$g = R_{v_1} \circ \cdots \circ R_{v_p} \quad (1 \leq p \leq n)$$

で表せる。

証明 n に関する帰納法で確かめよう。

$n = 1$ の時、 \pm の変換は原点周りの鏡映そのもの。

$n = k - 1$ の時、主張が正しいとする。恒等写像でない $g \in O(n)$ について考えると適当な $v \in \mathbb{R}^n$ にたいして $gv \neq v$ である。ここで $u = v - gv$ に垂直な面に関する鏡映 R_u を考える。 $\langle gv, gv \rangle = \langle v, v \rangle$ だから gv と v のなす角を θ として

$$R_u(gv) = gv - 2 \frac{\langle gv, u \rangle}{\|u\|^2} u = gv - 2 \frac{-\|v\|^2(1 - \cos \theta)}{2\|v\|^2(1 - \cos \theta)} u = v$$

よって $R_u \circ g$ は v を保つ。これを v に垂直な平面に制限すると仮定から $k - 1$ 個以下の鏡映の合成である。つまり $R_u \circ g$ は v を変えない鏡映の合成で、

$$R_u \circ g = R_{v_1} \circ \cdots \circ R_{v_p} \quad (1 \leq p \leq k - 1)$$

とかける。両辺に左から R_u をかければ g は k 個以下の鏡映の合成になる。 ■

特に奇数回の鏡映は空間の反転を引き起こすので $SO(n)$ は偶数回の鏡映の合成でかけることがわかる。さらに鏡映の基準とするベクトルは単位ベクトルで十分だから、 $R_{v_1} \circ \cdots \circ R_{v_{2p}} \in SO(n)$ はそのまま $\pm v_1 \cdots v_{2p} \in \text{Spin}(n)$ を定める。つまり Ad は定義から少なくとも \pm の自由度を残して、全射なのである。ここで「少なくとも」と書いたが実は \pm を除いて一意に決まることが次の定理からわかる。

定理 2.2:

次の群の単完全列が成り立つ：

$$1 \hookrightarrow \{\pm 1\} \hookrightarrow \text{Spin}(n) \twoheadrightarrow SO(n) \twoheadrightarrow 1$$

証明 完全列とはそれを構成する各集合とその前後の写像 $\xrightarrow{i} A \xrightarrow{j}$ に関して $\text{Im}(i) = \text{Ker}(j)$ が成り立つものである。

$\{\pm 1\}$ の前後では、包含写像だから $\text{Im}(1 \hookrightarrow \{\pm 1\}) = 1$. $\text{Spin}(n)$ の単位元は 1 なので、 $\text{Ker}(\pm 1 \hookrightarrow \text{Spin}(n)) = 1$. よって O.K. 同様にして $\text{SO}(n)$ の前後についても確認できる. (この時、Ad の全射性が活きる.)

さて、 $\text{Im}(\{\pm 1\} \hookrightarrow \text{Spin}(n)) = \pm 1$ であるから、 $\text{Ker}(\text{Ad}) = \pm 1$ であれば定理は成り立つ. これを示そう. $g \in \text{Ker}(\text{Ad})$ とすると、 $g x g^{-1} = x \Leftrightarrow g x = x g (\forall x \in \mathbb{R}^n)$ だから g は $\text{Cl}_n(V)$ の中心元かつ偶冪. V の基底を e_i とかくことにすると g は $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{2p}}$ の形の元の線型結合で一意にかける. (i_k は昇順に並べ、すべて異なる値をとるように式変形してあるとする.) そこで e_{i_1} を右からかけるとこの成分は、 $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{2p}} e_{i_1} = (-1)^{2p-1} e_{i_1} e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{2p}} = e_{i_2} \cdots e_{i_{2p}}$. 一方左からかけると $e_{i_1} e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{2p}} = -e_{i_2} \cdots e_{i_{2p}}$ しかしこれは中心元であることに反するので g は大きさ 1 のスカラー. つまり $g = \pm 1$. ■

これより $g, g' \in \text{Cl}_n$ について $\text{Ad}(g) = \text{Ad}(g') \Leftrightarrow \text{Ad}(g^{-1}g') = 1 \Rightarrow g^{-1}g' = \pm 1$ である. 以上から $\text{Spin}(n)$ が $\text{SO}(n)$ の 2 重被覆群であることがわかった.

ところで、 $\text{Spin}(n)$ は単連結すなわち $\text{SO}(n)$ の普遍被覆群であるが、単連結な被覆群は同型を除いて一意であるから*7, 次がしたがう:

$$\text{Spin}(3) \cong \text{SU}(2).$$

2.2 実際に触ってみる (1)

では \mathbb{R}^3 の生成するクリフォード代数から $\text{Spin}(3)$ の表現空間を考えてみよう. \mathbb{R}^3 の基底を $\{e_1, e_2, e_3\}$ とする. そして、次のような元を考える.

$$\begin{aligned} a &:= \frac{1}{2}(ie_1 - e_2), \quad a^\dagger := \frac{1}{2}(ie_1 + e_2), \quad b := ie_3 \\ w &:= a^\dagger a - \frac{1}{2} = -\frac{i}{2}e_1 e_2 \end{aligned}$$

この時、次が成り立つ;

$$\begin{aligned} \{a, a^\dagger\} &= 1, \quad b^2 = 1 \\ \{a, a\} &= \{a^\dagger, a^\dagger\} = \{a, b\} = \{a^\dagger, b\} = 0 \\ [w, a] &= -a, \quad [w, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [w, b] = 0 \end{aligned}$$

交換関係についての結果に注目すると可換なものの組み合わせは $b, w, b \cdot w$ だから b, w を同時対角化するような表現が可能である. 特に $b^2 = 1, w^2 = \frac{1}{4}$ だから、ベクトル $|w = \pm 1/2; b = \pm\rangle$ で

$$w |\pm 1/2; \pm\rangle = \pm \frac{1}{2} |\pm 1/2; \pm\rangle, \quad b |\pm 1/2; \pm\rangle = \pm |\pm 1/2; \pm\rangle$$

を満たすものをとれる. そこで、基底を順番も込みで $\{|+1/2; +\rangle, |-1/2; +\rangle, |-1/2; -\rangle, |+1/2; -\rangle\}$ ととることにしよう. $\text{Spin}(n)$ の元はノルム 1 のベクトルを偶数個集めてクリフォード積を取ったものだったから、3次元の場合は $-ie_1 e_2, -e_3 e_1, -e_2 e_3$ の表現を考えれば $\text{Spin}(3)$ の表現を与えるには十分で、実際計算してみ

*7 詳しくは [4, 杉浦] を参照していただきたい.

ると次のようになる (空白部分はゼロである.):

$$-ie_1e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & -1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}, -e_3e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}, -e_2e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & & \\ i & 0 & & \\ & & 0 & -i \\ & & i & 0 \end{pmatrix}.$$

これらを見てわかるように, この表現は二つの既約表現の直和^{*8}になっている. 特に二つの既約表現は行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

で移り合うので同値な表現になっている. Spin(3) 群には ± 1 も入っているので, 単位行列とパウリ行列の和で表される SU(2) と同型であることが実感できるだろう. また, $|-1/2 : +\rangle = |0\rangle$ と書くことにすると, $|+1/2 : +\rangle = a^\dagger |0\rangle$ であることもわかる. つまり $a^\dagger \cdot a$ は生成・消滅演算子としてはたらく.

Spin(4) について考えてみよう. 3次元の時と同様に基底ベクトル $\{e_1, e_2\}$ について w_1, a_1, a_1^\dagger , 基底ベクトル $\{e_3, e_4\}$ について w_2, a_2, a_2^\dagger を定義する. 同様の議論から, 表現空間は,

$$w_i |\pm_1, \pm_2\rangle = \pm_i \frac{1}{2} |\pm_1, \pm_2\rangle$$

を満たす $|\pm_1, \pm_2\rangle$ によって張れる. さらに順番込みの基底を $\{|+, +\rangle, |-, -\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle\}$ とする. ここでも基底は $|-, -\rangle$ に a_i^\dagger をかけることで生成されるが, Spin(n) が偶数個の単位ベクトルの積から構成されるので, かかっている生成演算子の偶奇は Spin(n) 群の作用によって変化しない. 従ってその表現は二つの既約表現に分解できて, 例えば,

$$e_2e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & & \\ -i & 0 & & \\ & & 0 & -i \\ & & i & 0 \end{pmatrix}$$

などとなる. この二つの既約表現は同値でない.

さらに次元を一般化して \mathbb{R}^n の生成するクリフォード代数の表現空間を考えてみよう. 3次元の時と同様に基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ にたいし,

$$a_k := \frac{1}{2}(ie_{2k-1} - e_{2k}), a_k^\dagger := \frac{1}{2}(ie_{2k-1} + e_{2k}), b := ie_n$$

$$w_k := a_k^\dagger a_k - \frac{1}{2} = -\frac{i}{2}e_{2k-1}e_{2k}$$

とする. ただし, b を定義するのは n が奇数の時だけである.

$n = 2m$ の時を考える. $[w_k, w_l] = 0$ より可換な元の最大のセットは $\{w_k\}$ となるので, $|\pm_k\rangle$ ($1 \leq k \leq m$) で,

$$w_k |\pm_k\rangle = \pm_k \frac{1}{2} |\pm_k\rangle$$

なる基底による 2^m 次元空間への表現が得られる. この表現空間を W_n と書こう. 全ての w_k の固有値が $-\frac{1}{2}$ であるベクトルを $|0\rangle$ と書くことにすると, この空間は,

$$W_{2m} = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{a_{i_1}^\dagger \cdots a_{i_k}^\dagger |0\rangle \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m, 0 \leq k \leq m.\}$$

*8 全ての行列表現が 2×2 の行列二つにブロック対角化している. この時左上と右下の組が各々二次元表現になる.

となる。^{*9}これは、スピン 1/2 を持つ同種粒子の多粒子系の状態空間 (物理ではフォック空間と呼ばれる。) のものである。

$n = 2m + 1$ の場合は 3 次元の時と同様に b というものも含めて構成できるが、やはり b の固有値によって分かれた二つの既約表現は $\text{Spin}(2m + 1)$ の表現としては同値になるから、 $\text{Spin}(2m + 1)$ の既約表現を与える空間は、

$$W_{2m+1} = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{a_{i_1}^\dagger \cdots a_{i_k}^\dagger | 0\rangle \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m, 0 \leq k \leq m, b|0\rangle = |0\rangle.\}$$

となる。

以上の表現空間 $W_n \cong \mathbb{C}^{2^m}$ を $\text{Spin}(n)$ 群のスピンル空間、また W_n への既約表現をスピノル表現という。

3 大域的なスピン構造

前節で、ユークリッド空間 \mathbb{R}^n 上の回転群 $\text{SO}(n)$ に二重被覆 $\text{Spin}(n)$ が定まり、そのリー代数の二次元表現からスピン 1/2 系が現れることがわかった。

ところで、我々の身の周りはおおよそユークリッド空間に見えるが、我々の住んでいる宇宙全体は決して平坦ではない。重力による時空の歪みはその顕著な例である。より非自明な例としてたとえば、宇宙のどこかに‘穴’が開いていたり‘ねじれ’がある可能性も考えられる。そうした性質を持ちうるいわば図形のことを以下多様体と呼ぶ。著しい性質として多様体は局所的にはユークリッド空間と同相である。

我々は多様体 M 上の各点においてどのような場が存在するのかということに関心がある。それを記述する空間として多様体の各点には接 (ベクトル) 空間が定義できる。これは \mathbb{R}^n と同相であるから、前節ではこの局所的なユークリッド空間にスピン部分空間が定義できることをみたことになる。気になるのは多様体全域にわたって、大域的なスピン構造が定義できるかどうか、できるとしたらどのような場合かということである。この節ではその定式化を与えることにしよう。

3.1 定式化

以下、 M を n 次元多様体とする。

定義 3.1: ベクトル束

多様体 E について全射 $p: E \rightarrow M$ がランク m の実ベクトル束であるとは、次が成り立つことである:

ファイバー

$E_x := p^{-1}(x) (\subset E)$ が \mathbb{R}^m ベクトル空間である。

局所自明化の存在

$\forall x \in M$ にたいして次を満たす x の近傍 U と微分同相写像 $\psi_U: p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^m$ が存在:

$\forall y \in U, \psi_U|_{p^{-1}(y)}: p^{-1}(y) \xrightarrow{\cong} \{y\} \times \mathbb{R}^m$ が線形写像

ベクトル束のイメージとしては、例えば寿司ネタにされる前のウニとかいが栗を想像するとよい。あれらは

^{*9} ベクトル空間 V と部分集合 $S (\subset V)$ について

$$\text{Span}_{\mathbb{C}}(S) := \{x \in V \mid \exists \alpha^i \in \mathbb{C}, \exists s_i \in S (i \text{ は有限個の添字}) \text{ s.t. } x = \alpha^i s_i\}.$$

要するに S の元が張る空間のこと。

球体上に無数のとげが生えているわけだが、ベクトル束に置き換えると多様体 S^2 上に一次元ベクトル空間 \mathbb{R} が刺さっていることになる。^{*10}ところで、多様体を定める開集合というのは有限個の他の開集合と共通部分を持っている。この共通部分の上においてもファイバーは各点ごと一つに定まっているので、局所自明化同士は綺麗に張り合わさってほしい。この張り合わせをするのが次の変換関数である。^{*11}

定義 3.2: 変換関数

$p: E \rightarrow M$ がランク m の実ベクトル束であるとする。

開集合 U_α, U_β が共通部分を持つとする。それぞれに対する局所自明化を、

$\psi_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^m$ ($i = \alpha, \beta$) とした時、次を満たすような変換関数

$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(m; \mathbb{R})$ が存在する:

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m, (x, \mathbf{v}) \mapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)\mathbf{v})$$

変換関数には、その定義から次のコサイクル条件が成り立つ:

性質 3.1: コサイクル条件

- U_α 上で, $g_{\alpha\alpha} = 1$
- $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ で, $g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\beta\alpha}$
- $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ で, $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$

ベクトル束の典型として次の接束は重要である。

定義 3.3: 接束

$T_x M$ を M の x における接ベクトル空間として、

$$TM := \bigcup_{x \in M} T_x M$$

を M の接束とする。

接ベクトル空間とは多様体上のある点における方向微分をベクトルと同一視した時に、そうしたベクトルの張る空間のことで、多様体が二次元平面ならある点における接平面が接ベクトル空間であり、それらを多様体全域で集めてきたものが接束である。

次の切断は物理的にも重要な概念である。

^{*10} 長さは有限なので区間 $[0, 1]$ とかにした方が近いかもしれない。

^{*11} $U_\alpha \cap U_\beta$ 上のファイバーを U_α 上のファイバーと見ても、 U_β 上のファイバーと見ても \mathbb{R}^m になっているためには二つの見方の間に一対一の対応がついてほしいわけだ。その上でさらに線形性を入れている。

定義 3.4: 切断

$p: E \rightarrow M$: ベクトル束. M 上に定義された滑らかな関数 $s: M \rightarrow E$ が次を満たすとき, これを E の切断という:

$$p \circ s = id_M: M \rightarrow M$$

E の切断全体の集合を $\Gamma(M, E)$ とかく.

切断は定義から $s(x) \in E_x$ である. いま, 各ファイバーはベクトル空間なので, 切断同士にスカラー倍と和が入る. この意味で切断はベクトル場とも呼ぶ. 電磁場などは切断として捉えることができる.

概念の定義ばかりが立て続いてしまって申し訳ないのだが, 今後の議論の主役となる (であろう) 主束を定義しよう.

定義 3.5: 主束

G : リー群. P : 多様体.

$\pi: P \rightarrow M$ が構造群を G とする主束^aであるとは, 次が成り立つことである:

全射性

π は滑らかな全射. $\pi^{-1}(x) =: P_x$ をファイバーという.

G の作用

G は各 P_x に右から, 自由かつ推移的に作用する.

G 同変な局所自明化

$\forall x \in M$, にたいして次を満たす x の近傍 U と微分同相写像

$\Psi_U: \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times G, u \mapsto (\pi(u), \phi_U(u))$ が存在:

$$\phi_U(ug) = \phi_U(u)g \quad (g \in G)$$

^a 構造群を明示して主 G 束と呼ぶことも多い

ひとことで言ってしまうとファイバー自体が構造群 (変換関数が値をとる群のことを構造群という. ベクトル束の場合は $GL(n; \mathbb{R})$ であった.) であるようなファイバー束である. ^{*12}

主束の同型は次のように定義される.

^{*12} ファイバー束については [5][高間] が詳しいです.

定義 3.6: 主束の同型

M 上の主 G 束 $\pi: P \rightarrow M$ と $\pi': Q \rightarrow M$ が同型であるとは、微分同相写像 $F: P \rightarrow Q$ で、次を満たすものが存在することである。

1. $\pi' \circ F(u) = \pi(u) \quad (\forall u \in P)$
2. $F(ug) = F(u)g \quad (\forall u \in P, g \in G)$

おそらく以下の図式が可換であると言った方がわかりやすいだろう。

$$\begin{array}{ccc}
 P \times G & \xrightarrow{F \times id} & Q \times G \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 P & \xrightarrow{F} & Q \\
 & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\
 & & M
 \end{array}$$

主束の同型の必要十分条件として次の定理はこの記事の最後で必要になる。

定理 3.1:

M 上の主 G 束 $\pi: P \rightarrow M$ と $\pi': Q \rightarrow M$ が共通の開被覆 $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ によって与えられる^aとする。 P と Q の変換関数をそれぞれ $\{g_{\alpha\beta}\}, \{h_{\alpha\beta}\}$ とする。

このとき、 P と Q が同型であることと、関数 $f_\alpha: W_\alpha \rightarrow G$ の族 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ で

$$h_{\alpha\beta}(x) = f_\alpha^{-1}(x)g_{\alpha\beta}(x)f_\beta(x)$$

を満たすものが存在することは同値である。

^a 異なる開被覆で与えられていたら共通の細分を取れば良い。

証明

P の局所自明化を

$$\psi_\alpha: \pi^{-1}(W_\alpha) \rightarrow W_\alpha \times G, u \mapsto (\pi(u), \phi_\alpha(u)),$$

Q の局所自明化を

$$\Psi_\alpha: \pi^{-1}(W_\alpha) \rightarrow W_\alpha \times G, u \mapsto (\pi(u), \Phi_\alpha(u))$$

とする。

[\Rightarrow]

P, Q が同型であるとする。微分同相写像 $F: P \rightarrow Q$ が存在して、 $\forall u \in P, g \in G$ にたいして

$$\begin{aligned}
 \pi' \circ F(u) &= \pi(u) \\
 F(ug) &= F(u)g
 \end{aligned}$$

を満たす. P における局所自明化と Q における局所自明化を F によって繋いで, 出発点からのずれを $f_\alpha(x)$ とする. つまり,

$$\Psi_\alpha \circ F \circ \psi_\alpha^{-1}: W_\alpha \times G \rightarrow W_\alpha \times G, (x, g) \mapsto (x, f_\alpha(x)g)$$

となったとすると, $f_\alpha: W_\alpha \rightarrow G$ である. このとき, Q における変換関数を求めると,

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1} &= (\Psi_\alpha \circ F \circ \psi_\alpha^{-1}) \circ (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}) \circ (\psi_\beta \circ F^{-1} \circ \Psi_\beta^{-1}), \\ \Phi_\beta(v) &\mapsto f_\beta^{-1}(x)\Phi_\beta(v) \\ &\mapsto g_{\alpha\beta}(x)f_\beta^{-1}(x)\Phi_\beta(v) \\ &\mapsto f_\alpha(x)g_{\alpha\beta}(x)f_\beta^{-1}(x)\Phi_\beta(v) \end{aligned}$$

だから,

$$h_{\alpha\beta}(x) = f_\alpha(x)g_{\alpha\beta}f_\beta^{-1}(x)$$

となる.

[\Leftarrow]

$\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ によって, $h_{\alpha\beta}(x) = f_\alpha(x)g_{\alpha\beta}f_\beta^{-1}(x)$ とかけたとする. Q の局所自明化を

$$\Psi'_\alpha(u) = (\pi'(u), f_\alpha(x)\Phi_\alpha(u))$$

とすると, 変換関数は $h'_{\alpha\beta} = f_\alpha h_{\alpha\beta} f_\beta^{-1} = g_{\alpha\beta}$ と一致する. そして,

$$F := \Psi'_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha: P_\alpha \rightarrow Q_\alpha, u \mapsto (x, g) \mapsto v$$

とすると

$$\begin{aligned} \pi(u) &= x = \pi'(v) = \pi' \circ F(u) \\ ug' &\mapsto (x, g)g' \mapsto vg' \end{aligned}$$

である. 二つ目の式は主 G 束の局所自明化の G 同変性を使っている. こうして F は主束の同型になっていることがわかる. ■

接空間に $\text{SO}(n)$ をくっつけたいので主束の例として次のようなものを考えよう.

例 3.1:

主 $GL(n)$ 束 $\mathbf{GL}(M)$

構成と主束の性質を満たすことの確認

[構成] M を今まで通り n 次元多様体とする. 点 $x \in M$ での接ベクトル空間 $T_x M$ は n 次元ベクトル空間だから基底 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ がとれる. 局所自明化は線形同型写像なので, x の近傍 U で $s_i := \psi_U^{-1}(x, e_i)$ とするとこれらは $p^{-1}(U)$ 上で基底になる. このようにある開集合 U 上のファイバーにおいて基底になるような, 局所的な切断の組 $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ を局所フレームという. そこで, 局所フレームの集合 $L_x := \{\{s_i\} \mid \{s_i\} \text{は } \pi^{-1}(U) \text{ の基底}\}$ と, さらにその M 全体での集合

$$\mathbf{GL}(M) := \bigcup_{x \in M} L_x$$

を考える。ここまですら、構成である。

[全射性] 接束の射影 p を使って

$$\pi : \mathbf{GL}(M) \rightarrow M, (x, \{s_i\}) \mapsto x$$

とすれば明らか。

[GL(n) の作用] 右からの作用は $u = (x, \{s_i(x)\})$ として

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{GL}(M) \times GL(n; \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbf{GL}(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (u, g) & \longmapsto & (\pi(u), (s_1, \dots, s_n)g) \end{array}$$

によって自然に定まり、 u の固定部分群は $\{e\}$ 。よって作用は自由。さらに、二つの基底は $GL(n)$ で行き来できるので、作用は推移的。

[GL(n) 同変な局所自明化] 局所フレームが接ベクトル束の標準基底 $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_x\}$ と $g \in GL(n)$ で

$$(s_1, \dots, s_n)(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)_x \cdot g \tag{3.1}$$

とかけるとする。^{*13}

$$\begin{array}{ccc} \phi : \pi^{-1}(U) & \longrightarrow & U \times GL(n; \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ u & \longmapsto & (\pi(u), g) \end{array}$$

で、

$$\phi(ug') = \phi(u)g' (= (u, g)g' := (u, gg'))$$

とすれば良い。 ■

以上のように $\mathbf{GL}(M)$ は接ベクトル空間上に定義されていて、 $T_x M$ の上に基底の変換行列のなす群 $GL(n)$ が乗っかっている。群 $GL(n)$ には空間回転も含まれるので、うまく構造群を制限できれば、 $T_x M$ の上に回転操作のなす群 $SO(n)$ が乗った主 $SO(n)$ 束 $\mathbf{SO}(M)$ も構成できる。そのためには、まず直交群 $O(n)$ に限定する必要があるので $T_x M$ の正規直交基底の集合を取り出さなければならない。そして、このうち空間反転に対応する部分を排除する必要がある。

ここで言っている構造群の制限のことを正しくは簡約という。具体的な手続きに入る前に簡約の定義を述べておこう。

定義 3.7: 簡約

G をリー群、 H をその部分群とする。主 G 束 $\pi: P \rightarrow M$ が主 H 束に簡約可能であるとは、開被覆 \mathcal{U} をうまく選ぶことで全ての変換関数 $g_{\alpha\beta}$ が H に値を持つようにできることである。

正規直交基底を取るためには正定値内積を入れる必要がある。

^{*13} M の開集合に局所座標を入れるので、この開集合上で式 (3.1) が成り立つ。この g を $\{s_i\}$ の局所座標とすれば多様体構造も $\mathbf{GL}(M)$ に入る。

定義 3.8: リーマン多様体

接束 TM のファイバー $T_x M$ における線型写像全体のなす集合を $T_x^* M$ とする. そして $T^* M := \bigcup_{x \in M} T_x^* M$ とする.^a $p: T^* M \otimes T^* M \rightarrow M$ はベクトル束である.
 切断 $g \in \Gamma(M; T^* M \otimes T^* M)$ と M の組 (M, g) がリーマン多様体であるとは, g が次を満たすことである;

$$\forall x \in M \text{ で, } g \text{ が } T_x M \text{ の正定値内積を与える.}$$

^a これを余接束という.

以後 M はリーマン多様体とする. これで, 長さが測れるようになったので, 接束 $\pi: TM \rightarrow M$ について次の集合を考えることが可能になった.

$$\mathbf{O}(M) := \bigcup_{x \in M} L'_x$$

w/ $L'_x := \{ \{s_i\} \mid \{s_i\} \text{ は } x \in M \text{ の近傍を } U \text{ として } \pi^{-1}(U) \text{ の正規直交基底.} \}$

これは, 例 4.1 と同様に主 $O(n)$ 束 $\mathbf{O}(M)$ となる.

ここから, 構造群を $SO(n)$ に簡約することは接束 $\pi: TM \rightarrow M$ に向きを入れることと同値であるから, まずは向きの定義をしよう.

定義 3.9: 向き付け可能

多様体 M にたいし, 直線束 $\Lambda^n(T^* M) \rightarrow M$ を考える.

多様体 M が向き付け可能 $\Leftrightarrow \exists w \in \Gamma(M, \Lambda^n(T^* M))$ s.t. w はゼロ点を持たない.

ベクトル束 $p: E \rightarrow M$: ランク m の実ベクトル束にたいし, 直線束 $\det(E) := \Lambda^m(E)$ を考える.^a

E が向きづけ可能 $\Leftrightarrow \exists w \in \Gamma(M, \det(E))$ s.t. w はゼロ点を持たない.

^a $\Lambda^2(E)$ は $T^2(E)$ の全ての元を反対称化した空間でその元を $u \wedge v$ とかく. \wedge はウェッジ積と呼ばれ $u \wedge v = -v \wedge u$ を満たす積である. n 次の場合も同様に定義されるが次元は ${}_m C_n$ なので $\det(E)$ は 1 次元になる.

正直これだけでは, '向き' のイメージがつかないが次の定理がある.

定理 3.2: 向き付けの意味付け

次の二つは同値である.

1. $p: E \rightarrow M$ がベクトル束として向きづけ可能
2. ある M の開被覆 U が存在して, E の変換関数の族 $\{g_{\alpha\beta}\}$ が全て, $\det(g_{\alpha\beta}) > 0$ を満たす.

証明 $p: E \rightarrow M$ の局所自明化 ψ_α, ψ_β における局所フレームを $\{e_i\}, \{e'_i\}$ とする. $U_\alpha \cap U_\beta$ では,

$$(e'_1, \dots, e'_m) = (e_1, \dots, e_m) g_{\alpha\beta}^{-1}$$

よって, $\det(E)$ の局所フレーム $e_1 \wedge \dots \wedge e_m$ においては

$$e'_1 \wedge \dots \wedge e'_m = e_1 \wedge \dots \wedge e_m \det(g_{\alpha\beta}^{-1})$$

となって, $\det(g_{\alpha\beta})$ が変換関数になる.

[1⇒2]

$w \in \Gamma(M, \det(E))$ がゼロ点を持たないとする. $w > 0$ として良い. $\det(E)$ の局所自明化において

$$\psi_\alpha(w) = (x, w_\alpha(> 0))$$

だから, $U_\alpha \cap U_\beta (\neq \emptyset)$ では

$$w_\beta = w_\alpha \det(g_{\alpha\beta}) \tag{3.2}$$

より $\det(g_{\alpha\beta}) > 0$.

[2⇒1]

開被覆 \mathcal{U} を固定して $\det(g_{\alpha\beta}) > 0$ が常に成り立つようにする. $\det(E)|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{R}$ において, $w_\alpha = \psi_\alpha^{-1}(x, 1)$ とすると w_α は $\det(E)$ の U_α 上の切断でゼロでない. $\{h_\alpha\}$ を 1 の分割^{*14} とすると $w := \sum_{\beta \in \mathcal{U}} h_\beta w_\beta$ は式 (3.2) よりゼロでない切断となる. ■

この定理より, 向きづけ可能な場合は開被覆をうまく選べばファイバー同士の張り合わせの際に空間の反転が起こらないことがわかる. つまり全てのファイバーを右手系あるいは左手系に固定できることを向きづけ可能と呼んでいることがわかる. リーマン多様体の接束が向きづけ可能な時, 適当な開被覆を選べば主 $O(n)$ 束 $\mathbf{O}(M)$ は勝手に主 $SO(n)$ 束 $\mathbf{SO}(M)$ となる. この束をリーマン多様体 (M, g) の向きつき正規直交フレーム束と呼ぶ.

それではスピン構造の定義に移ろう.

定義 3.10: スピン構造

(M, g) : 向き付きリーマン多様体. $p: \mathbf{SO}(M) \rightarrow M$: (M, g) の向き付き正規直交フレーム束.

(M, g) のスピン構造とは, 主 $\text{Spin}(n)$ 束 $\pi: \mathbf{Spin}(M) \rightarrow M$ と束準同型

$$\Phi: \mathbf{Spin}(M) \rightarrow \mathbf{SO}(M)$$

の組 $(\mathbf{Spin}(M), \Phi)$ であって, 次が可換^aになるもの:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Spin}(M) \times \text{Spin}(n) & \xrightarrow{\Phi \times \text{Ad}} & \mathbf{SO}(M) \times \text{SO}(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Spin}(M) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{SO}(M) \\ & \searrow \pi & \swarrow p \\ & M & \end{array}$$

^a 可換とは, ある集合から別の集合に向けて写像を繋げて行ったとき, この写像が経由する集合によらないことである.

ナイーブに考えると, 主 $\text{Spin}(n)$ 束と呼べるものは好きなように構成できてしまう^{*15}. しかし, 物理的に意味を持つのは底空間 M の幾何的な性質を反映したものである. そのため上の定義では, $\mathbf{Spin}(M)$ の各ファイバーが接空間に対して定まった $\mathbf{SO}(M)$ のファイバーの二重被覆になるようなもので, さらにファイバー同士の張り合わせが $\mathbf{SO}(M)$ の張り合わせをある意味で保つように, 図式の可換性を要請している.

*14 後ろのページに定義 (5.3) を書いておいた.

*15 自明なファイバー $M \times \text{Spin}(n)$ とかを考えればいい.

定義の意味の説明

定義に含まれる可換図式の扱いをもう少し具体的に確認しておこう。まず、 $\mathbf{Spin}(M)$ の局所自明化を $\forall x \in U_\alpha \subset M$ に対して、

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbf{Spin}(n), u \mapsto (\pi(u), \phi_\alpha(u)) \quad (3.3)$$

$\mathbf{SO}(M)$ の局所自明化を

$$\psi'_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbf{SO}(n), v \mapsto (p(v), \phi'_\alpha(v))$$

とかく。この時、

$$\mathbf{Spin}(M) \times \mathbf{Spin}(n) \rightarrow \mathbf{Spin}(M), (u, g) \mapsto ug$$

の部分は、主束の定義から局所自明化が $\mathbf{Spin}(n)$ 同変なので、 $\psi_\alpha(ug) = (\pi(u), \phi_\alpha(u)g)$ と振る舞う。 $\mathbf{SO}(M)$ の方も同様である。

束準同型

$$\Phi : \mathbf{Spin}(M) \rightarrow \mathbf{SO}(M), u \mapsto \Phi(u)$$

とは、可換性 $p \circ \Phi(u) = \pi(u)$ と $\Phi(ug) = \Phi(u) \text{Ad}(g)$ を満たすものである。ここで Ad は式 (2.3) の意味で用いている。 u の局所自明化を式 (3.3) としたときに $\Phi(u)$ の局所自明化は、

$$\psi'_\alpha \circ \Phi(u) = (\pi(u), \text{Ad}(\phi_\alpha(u)))$$

などがとれる。ここまで見ておけば、図式の上半身の四角形が可換になることは容易に確認できる。

ファイバーの張り合わせ、つまり $U_\alpha \cap U_\beta$ 上での変換関数については $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ にたいし、 $\mathbf{Spin}(M)$ と $\mathbf{SO}(M)$ の変換関数 $h_{\alpha\beta}$ と $g_{\alpha\beta}$ が

$$\text{Ad}(h_{\alpha\beta}) = g_{\alpha\beta} \quad (3.4)$$

であれば、 $\mathbf{Spin}(M)$ での変換が

$$(x, \phi_\alpha(u)) = (x, h_{\alpha\beta} \phi_\beta(u)) \mapsto (x, \text{Ad}(h_{\alpha\beta} \phi_\beta(u))) = (x, g_{\alpha\beta} \text{Ad}(\phi_\beta(u)))$$

となって、 Φ によって $\mathbf{SO}(M)$ 上での変換に移せることになる。^{*16}特に $g_{\alpha\beta}$ は接束 TM の変換関数だったから、このように定義した $\mathbf{Spin}(M)$ には変換関数を通して多様体 M の幾何的な性質が反映されている。 ■

以上で多様体上に \mathbf{Spin} 群をのせることができた。あとは前章の最後で導入した \mathbf{Spin} 群の表現空間 W_n を $\mathbf{Spin}(M)$ の各ファイバーに同伴させれば、多様体上にスピノル系が定められそうである。このようなベクトル束を一般に $\mathbf{Spin}(M)$ の同伴ベクトル束と呼ぶのだが、数学的な定義に沿って構成してみよう。

同伴ベクトル束の構成

まず材料として、主 $\mathbf{Spin}(n)$ 束 $\pi : \mathbf{Spin}(M) \rightarrow M$ があり、その構造群 $\mathbf{Spin}(n)$ はスピノル空間 W_n に左から

$$\mathbf{Spin}(n) \times W_n \rightarrow W_n, (g, x) \mapsto \Delta_n(g)x$$

^{*16} 式 (3.4) のように変換関数 $g_{\alpha\beta} : M \rightarrow \mathbf{SO}(n)$ に対応する関数 $h_{\alpha\beta} : M \rightarrow \mathbf{Spin}(n)$ のことを、 $g_{\alpha\beta}$ の持ち上げという。実はこのような持ち上げでコサイクル条件を満たすようなものがいつでも存在するとは限らず、その可否を決めるには Stiefel-Whitney 類なる特性類を用いるのが非常に有効である。この話題については次章で詳しく書くつもりである。

と作用している. ここで, $\Delta_n : \text{Spin}(n) \rightarrow GL(2^m, \mathbb{C})$ はスピノル表現である. ここで, 直積多様体 $\mathbf{Spin}(M) \times W_n$ への $\text{Spin}(n)$ の右作用を

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{Spin}(M) \times W_n) \times \text{Spin}(n) & \longrightarrow & \mathbf{Spin}(M) \times W_n \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ ((u, x), g) & \longmapsto & (u, x)g \end{array}$$

とする. ただし $(u, x)g := (ug, \Delta_n(g^{-1})x)$ である. ここに同値関係

$$(u, x) \sim (u', x') \Leftrightarrow (u, x) = (u', x')g$$

を入れて,

$$\mathbf{Spin}(M) \times_{\Delta_n} W_n := \mathbf{Spin}(M) \times W_n / \text{Spin}(n)$$

なる同値類を定める. 多様体 M への射影を

$$p : \mathbf{Spin}(M) \times_{\Delta_n} W_n \rightarrow M, [u, x] \mapsto \pi(u)$$

とすると, これは $\mathbf{Spin}(M)$ の同伴ベクトル束である. 特に局所自明化は次のように取れる;

$$\Psi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times W_n, [u, x] \mapsto (\pi(u), \Delta_n(\phi_\alpha(u))x)$$

これは, 代表元の取り方によらない. 実際 $(u', x') = (u, x)g$ として,

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha([u', x']) &= (\pi(u'), \Delta_n(\phi_\alpha(u'))x') \\ &= (\pi(ug), \Delta_n(\phi_\alpha(ug))\Delta_n(g^{-1})x) \\ &= (\pi(u), \Delta_n(\phi_\alpha(u))x) \\ &= \Psi_\alpha([u, x]) \end{aligned}$$

■

以上のように構成された $\mathbf{Spin}(M)$ の同伴ベクトル束をスピノル束という. 定義としてまとめておこう.

定義 3.11: スピノル束

スピノル束 \mathbf{S} とは, 上で定義したベクトル束 $\mathbf{S} := \mathbf{Spin}(M) \times_{\Delta_n} W_n$ のことである.

また, スピノル場とはスピノル束上の切断 $s \in \Gamma(M, \mathbf{S})$ のことである.

こうして, 多様体 M の接ベクトル空間 $T_x M$ の回転群 $\text{SO}(n)$ の二重被覆としてスピノル構造が入り, その表現空間 (スピノル 1/2 系) も導入することができた. もう少し物理っぽく言えば, 局所的に平坦な空間における回転の自由度からスピノル概念を導入できたことになる.

3.2 実際に触ってみる (2)

手で計算できる身近な例として円 S^1 上のスピノル構造を考えてみよう.

S^1 の開集合と局所座標系として, 次の3つをとる.

$$\begin{cases} \phi_0 : U_0 \rightarrow \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right) \\ \phi_1 : U_1 \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \\ \phi_2 : U_2 \rightarrow \left(\frac{7}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi\right) \end{cases}$$

次のような状況を想像すれば良い。

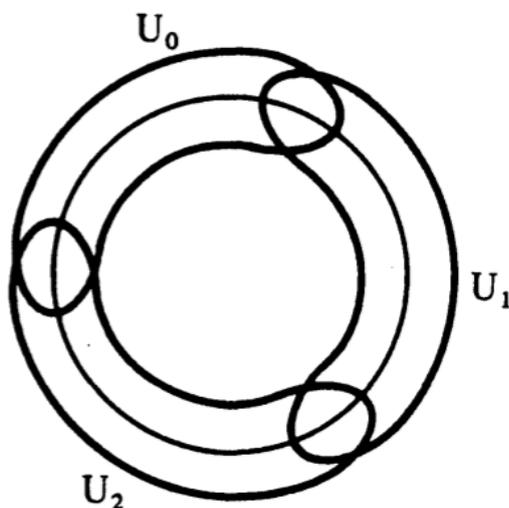


図1 S^1 の開被覆のイメージ図.
左端に $\theta = 0$ の点がある. [11, Bott-Tu,p100] より引用.

この時, 座標変換は

$$\begin{cases} \phi_0 \circ \phi_2^{-1} : (\frac{11}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi) \rightarrow (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}), \theta \mapsto \theta - 2\pi \\ \phi_1 \circ \phi_0^{-1} : (\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi), \theta \mapsto \theta \\ \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : (\frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi) \rightarrow (\frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi), \theta \mapsto \theta \end{cases}$$

接空間は $T_x S^1 = \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial \theta}$ であって, これらをまとめて接束とした時の変換関数は,

$$g_{01} = g_{12} = g_{20} = 1$$

である. スピン構造は $\det(g_{\alpha\beta}) > 0$ の開被覆を取った時に入れることができ,

$$\psi_\alpha : \pi^{-\alpha}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \text{Spin}(1), \begin{cases} u_1 \mapsto (x, 1) \\ u_{-1} \mapsto (x, -1) \end{cases}$$

となる.

いま, 変換関数は $\text{SO}(1) = 1$ に値をとるので, $\text{Ad}(\pm 1) = 1$ より $\text{Spin}(S^1)$ の変換関数は, 3つの開集合の共通部分の上で ± 1 の値をとることができる. 特に, $U_0 \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ だから, どの値を選んでもコサイクル条件は成り立つ. そこで, スピン構造 A,B,C を考えて, それぞれの変換関数を,

$$\text{A: } h_{01} = h_{12} = h_{20} = 1$$

$$\text{B: } h'_{01} = h'_{12} = -h'_{20} = 1$$

$$\text{C: } h''_{01} = -h''_{12} = -h''_{20} = 1$$

としよう. U_1 上で $u_{+1} \mapsto (x, 1)$ であるものをもって, 上記の変換関数の張り合わせによって S^1 上を動かしてみると, 自明化の第二成分は次のように変化する;

表 1 S^1 上のスピン構造の挙動

	U_0	U_1	U_2	U_0	U_1	U_2	U_0	\dots
A	1	1	1	1	1	1	1	\dots
B	1	1	1	-1	-1	-1	1	\dots
C	1	1	-1	1	1	-1	1	\dots

注目すべき点は、 $A \cdot C$ には u_{+1} と対をなす u_{-1} がとれて、各開集合上で u_{+1} の -1 倍になるのに対し、 B でそのような元 u'_{-1} をとると、これは S^1 を一周してきた u_{+1} 自身と一致してしまう点である。言い換えれば $A \cdot C$ は非連結な S^1 の二重被覆で、 B は連結な二重被覆になっている。幾何的な対象のイメージとしては A が円筒、 B がメビウスの帯、 C は名前はないが帯を 2 回ねじって両端を繋いだものを表現していることがわかるだろう。^{*17}

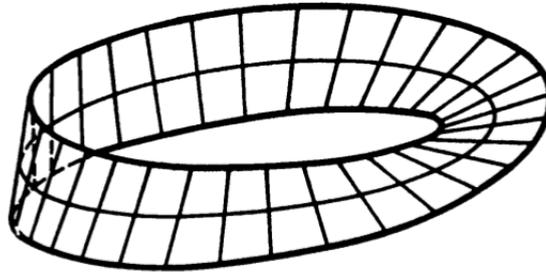


図 2 構造 B; メビウスの帯の模式図。

帯の中心を通る線が S^1 である。この帯の端点がスピン構造の ± 1 の挙動を表現している。つまり、 S^1 上のある点で $+1$ の端点を定めても、一周して戻ってきたときには帯の張り合わせが一捻りされているせいで -1 の端点に変わってしまっている。張り合わせで捻るかどうか変換関数の正負と対応しているわけだ。(図は [11, Bott-Tu,p40] より引用。)

$B \cdot C$ の変換関数を $h'_{\alpha\beta} = \tau'_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}, h''_{\alpha\beta} = \tau''_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$ とかくと、前者の τ' は分解することができないが、後者は $\tau''_{\alpha\beta} = w_\alpha w_\beta$ と $w_\alpha \in \{\pm 1\}$ の積でかけるので、主束の同型に関する定理 4.1 よりスピン構造 A と C は同型であることがわかる。このように分解できる変換関数のことをある意味で自明と呼んでいて、スピン構造は $\tau_{\alpha\beta}$ によって分類できる。この辺りの事情については次章で扱うことにする。

4 スピン構造と Stiefel-Whitney 類

前章で議論したスピン構造の定式化では変換関数の持ち上げの点でそれが可能か否かという不安があった。この章では、 $\text{SO}(M)$ の変換関数を使ってそれを判定する次の定理の証明を行う。

^{*17} メビウスの帯自体は向きづけができない多様体なのでその上にスピン構造を定義することはできないが、 S^1 の上にメビウスの帯の構造を持つスピン構造を作ることはできるのである。

定理 4.1: 多様体がスピン構造を持つための必要十分条件

(M, g) : 向き付きリーマン多様体. 次の二つは同値である.

1. (M, g) がスピン構造を持つ
2. 第2次 Stiefel-Whitney 類 $w_2(M)$ が自明.

また, (M, g) のスピン構造は $\check{H}^1(M, \mathbb{Z}_2)$ で分類できる.

証明には (というか定理の主張を述べるには) いくつかの概念を導入する必要があるので純粋に数学的な議論がしばらく続く. 最後の方で素朴に計算できる例として S^1 上の Čech コホモロジーの計算を行ってみようと思う.

4.1 層の定義

層を定義する. イメージとしてはファイバー束に近い概念である.

定義 4.1: 前層

\mathcal{F} が位相空間 M 上の前層であるとは, \mathcal{F} が次の性質を持つことである;

対応

任意の開集合 $U (\subset M \setminus \{\phi\})$ にたいし, 集合 $\mathcal{F}(U)$ が対応する.

制限写像の存在

任意の開集合 $V \subset U$ にたいし, 次を満たす制限写像 $r_V^U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ が存在する.

- $r_U^U = id$:
- $W \subset V \subset U \Rightarrow r_W^U = r_W^V \circ r_V^U$

定義 4.2: 層

前層 \mathcal{F} が層であるとは, \mathcal{F} が次の性質をもつことである;

任意の開集合 $U (\subset M)$ にたいして, M の開集合族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ で, $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ なるものが与えられて, 次が成り立つ;

単射性

$\forall s, t (\in \mathcal{F}(U))$ について, $\forall \alpha \in A, r_{U_\alpha}^U(s) = r_{U_\alpha}^U(t) \Rightarrow s = t$.

貼り合わせ

各 $\mathcal{F}(U_\alpha)$ から一つずつ元をとってきた集合 $\{s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ について,

$\forall \alpha, \beta \in A, r_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\alpha}(s_\alpha) = r_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\beta}(s_\beta) \Rightarrow \exists s \in \mathcal{F}(U) \text{ s.t. } \forall \alpha r_{U_\alpha}^U(s) = s_\alpha$.

また, 層 \mathcal{F} の開集合 U 上の切断とは, $\mathcal{F}(U)$ の元のことを指す.

例 4.1:

- \mathbb{Z} 値関数の層を \mathbb{Z} とかく. その U 上の切断 $s \in \mathbb{Z}(U)$ は, 整数値の局所定数関数^aであり, 制限写像は単に定義域の制限 $r_V^U: \mathbb{Z}(U) \rightarrow \mathbb{Z}(V), s \mapsto s_V$ となる.
- ベクトル束 $p: E \rightarrow M$ の U 上切断の集合 $\Gamma(U, E_U)$ も M の上で層をなす. 上の場合と同様に制限写像は, $r_V^U: \Gamma(U, E_U) \rightarrow \Gamma(V, E_V), s \mapsto s_V$ となる.

^a 連結な開集合の上で定数関数であることを局所定数関数と言っている. 連結な U_1, U_2 で共通部分を持たないものをもってそれぞれの切断 $s_1 = 1, s_2 = 2$ を集めた集合 $\{s_1, s_2\}$ を考える. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ だから張り合わせによって $U = U_1 \cup U_2$ に対して $r_{U_\alpha}^U(s) = s_1 = 1, r_{U_\beta}^U(s) = s_2 = 2$ と, 非連結な二つの連結成分を持つ U 上では定数でない切断が存在することになる.

以下では群の層, つまり集合 $\mathcal{F}(U)$ に群演算が定まっているものを考えることにする. この場合, 制限写像は準同型写像である. 層の間にも準同型が定義できる.

定義 4.3: 層の準同型

\mathcal{F}, \mathcal{G} を M 上の層とする.

$h: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が層準同型であるとは, 任意の開集合 $U \subset M$ において, $h_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ が準同型写像であり, 次の図式が可換になること;

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{h_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow r_V^U & & \downarrow r_V^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{h_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

層は多様体の各開集合上に集合を対応させるものであった. そこで, ある $x \in M$ の近傍での切断に同値関係を定義する. \mathcal{F} を多様体 M 上の層とし, M の開被覆を \mathcal{U} とする. x の近傍全体を $\mathcal{U}_x = \{U_\alpha \in \mathcal{U} \mid U_\alpha \text{ は } x \text{ の開近傍}\}$ と書くことにしよう. この時 $f \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ と $g \in \mathcal{F}(U_\beta)$ の同値関係は,

$$f \sim g \Leftrightarrow \forall U_\gamma \subset U_\alpha \cap U_\beta, r_{U_\gamma}^{U_\alpha}(f) = r_{U_\gamma}^{U_\beta}(g) \tag{4.1}$$

と定めることができる.

以上の同値関係によって x の近傍で同値類を取ることができる. その集合を x における \mathcal{F} の茎という. 定義としてまとめておこう. *18

*18 帰納極限については高間君の記事 [6] をご参照ください. この定義では同記事の命題 (A.7) をつかっています.

定義 4.4: 茎と芽

\mathcal{F} を M 上の層とする. $x \in M$ を適当に取っておく.

x での茎

\mathcal{F} の x における茎とは, 次の帰納極限;

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U) \cong \bigcup_{U \in \mathcal{U}_x} \mathcal{F}(U) / \sim.$$

x での芽

茎への制限写像を $r_x^U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x, f \mapsto [f]$ として,

$$f_x := r_x^U(f) \in \mathcal{F}_x$$

を芽という.

定義 4.5: 層の短完全列

系列

$$1 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 1$$

が層の短完全列であるとは, 任意の $x \in M$ で

$$1 \rightarrow \mathcal{E}_x \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow 1$$

が短完全列であること.

例 4.2:

$$1 \rightarrow \underline{SO}(n) \rightarrow \underline{O}(n) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1 \text{ (exact)}$$

確認 集合 K に対し層 \underline{K} は, $\underline{K}(U) = C^\infty(U, K)$ であるもののことである. 層が離散的な集合への対応づけをする場合は単に \mathbb{Z}_2 などと書く. 短完全列の定義から各茎において短完全列が成り立っていればよく, 茎というのは定義域の異なる切断たちを x の近傍で同じ値を取るもので束ねたものだから, 任意の $x \in M$ の十分小さな近傍 W で,

$$1 \rightarrow SO(n)(W) \rightarrow O(n)(W) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}_2(W) \rightarrow 1 \text{ (exact)}$$

なら良い. この系列の完全性はほぼ明らかだろう. ■

もう一つだけあとで使う例を挙げておく. これも上と同じように確認できる.

例 4.3:

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \underline{\text{Spin}}(n) \xrightarrow{\text{Ad}} \underline{SO}(n) \rightarrow 1 \text{ (exact)}$$

4.2 Čech コホモロジー群の構成

ここでは Čech コホモロジー群の構成をする。コホモロジーないしホモロジーは位相空間の圏から \mathbb{R} 加群の圏への共変関手であり、その自然性から位相不変量であることが従う。つまり、同相な位相空間 $X \simeq Y$ にたいしてそのホモロジー群は $H(X, \mathbb{R}) \cong H(Y, \mathbb{R})$ と同型となるので、位相空間の性質を調べるのに強力な道具となる。幾何的な意味としては空間にどんな穴がどれほど空いているかという情報を与えてくれる。例えば、 S^1 の 1 次ホモロジー群は $H_1(S^1, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ である。これは S^1 に 1 次元の穴が 1 つ空いていることに対応している。

では、本題に入ろう。 M を位相空間、 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を M の開被覆とする。また \mathcal{F} を M 上の加群^{*19}の層とする。いくつか言葉の定義をしよう。

単体

$|\sigma| := U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cdots \cap U_{\alpha_p} \neq \emptyset$ の時、組 $\sigma := (\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ を p 次単体という。特に $|\sigma|$ を σ の台という。単体全体の集合を Σ と書くことにする。つまり、

$$\Sigma := \{(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \mid U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cdots \cap U_{\alpha_p} \neq \emptyset, p \in \mathbb{Z}\}$$

である。

コチェイン

任意の p 次単体 $\sigma_p \in \Sigma$ に対して $\mathcal{F}(|\sigma_p|)$ の元を対応させる写像

$$f: \Sigma \rightarrow \mathcal{F}, \sigma_p \mapsto f_{\sigma_p} (\in \mathcal{F}(|\sigma_p|))$$

をとる。ただし、 $\sigma = (\alpha_0, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_p)$ と $\sigma' = (\alpha_0, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_p)$ にたいして、 $f_\sigma = -f_{\sigma'}$ であるとする。この f を開被覆 \mathcal{U} に関する \mathcal{F} 値の p コチェインという。^{*20}

コチェイン複体

p コチェイン全体の集合を

$$\check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \{f \mid f \text{ は開被覆 } \mathcal{U} \text{ に関する } \mathcal{F} \text{ 値のコチェイン}\}$$

とかいて、 p コチェイン複体と呼ぶ。これは加群である。実際、 \mathcal{F} は加群の層なので $f, g \in \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ として、 $f + g := \{f_{\sigma_p} + g_{\sigma_p} (\in \mathcal{F}(|\sigma_p|)) \mid \sigma_p (\in \Sigma) \text{ は } p \text{ 次単体}\}$ とすればこれも p コチェインである。

コバウンダリ作用素

写像 $\delta^p: \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ を

$$\delta^p(f)_\sigma := \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i r_{|\sigma|}^{\sigma_i} \circ f_{\sigma_i}$$

と定義する。^{*21}ただし、 $\sigma = (\alpha_0, \dots, \alpha_{p+1})$, $\sigma_i = (\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p+1})$ としている。^{*22}

この時次が成り立つ。

^{*19} 非可換群の層の場合は後で議論する。

^{*20} f の値は符号を除いて単体ごとに決まっているので族 $\{f_{\sigma_p} (\in \mathcal{F}(|\sigma_p|)) \mid \sigma_p (\in \Sigma) \text{ は } p \text{ 次単体}\}$ をコチェインだと思って良い。

^{*21} 作用する次数 p はしばしば省略する。

^{*22} $(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p+1})$ は α_i を除いた組のこと。

定理 4.2:

任意の次数 p において,

$$\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0 \quad (4.2)$$

である.

証明

$$\begin{aligned} \delta^{p+1} \circ \delta^p(f)_{(\alpha_0, \dots, \alpha_{p+2})} &= \sum_{i=0}^{p+2} (-1)^i \delta^p(f)_{(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p+2})} \\ &= \sum_{i=0}^{p+2} (-1)^i \sum_{k \neq i}^{p+2} (-1)^k f_{(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_k, \dots, \alpha_{p+2})} \end{aligned}$$

$f_{(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_k, \dots, \alpha_{p+2})}$ の項は (δ^p, δ^{p+1}) が (α_i, α_k) を消すか, (α_k, α_i) を消すかで二つ出てくる. $i > k$ とすると, 前者の符号は, $(-1)^{i-1}(-1)^k$. 後者の符号は $(-1)^k(-1)^i$ となるので, 確かに 0 である. ■

これでようやく Čech コホモロジー群を定義できる.

定義 4.6: 開被覆 \mathcal{U} における Čech コホモロジー群

コサイクル群

$$Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \text{Ker}\{\delta^p: \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})\}$$

コバウンダリ群

$$B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \text{Im}\{\delta^{p-1}: \check{C}^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})\}$$

コホモロジー群

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

念の為商集合の意味を確認しておく, $g, h \in Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ について同値関係を, $g \sim h \Leftrightarrow \exists f \in Z^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ s.t. $g = h + \delta(f)$ として同値類を定めている. また, 式 (4.2) より $B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subset Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ は明らかである.

被覆によらないチェックコホモロジー群の定義

以上の定義では開被覆への依存性を残して都合が悪い. そこで, M の開被覆の細分について帰納極限をとる. チェックコホモロジーを定めた開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対し, 細分 $\mathcal{W} = \{W_\beta\}_{\beta \in B}$ を取る. ここで細分とは, 任意の W_β にたいしてある U_α が存在して $W_\beta \subset U_\alpha$ となるような被覆のことである. 従って, 添字集合の間に対応

$$\rho: B \rightarrow A, \beta \mapsto \rho(\beta)$$

がつけられる. さらに, 細分を一つ固定すると

$$W_{\beta_0} \cap W_{\beta_1} \cap \dots \cap W_{\beta_p} \subset U_{\rho(\beta_0)} \cap U_{\rho(\beta_1)} \cap \dots \cap U_{\rho(\beta_p)}$$

だから、 p コチェインの制限 $\rho_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}: \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^p(\mathcal{W}, \mathcal{F})$ を

$$\rho_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}(f) = \{f_{\sigma_p} \in \mathcal{F}(|\sigma'_p|) \mid \sigma'_p = (\beta_0, \dots, \beta_p), \sigma_p = (\rho(\beta_0), \dots, \rho(\beta_p))\}$$

と定義できる。特にこれは準同型写像で、コバウンダリ作用素との可換性

$$\delta^p \circ \rho_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}} = \rho_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}} \circ \delta^p: \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^{p+1}(\mathcal{W}, \mathcal{F}) \quad (4.3)$$

を満たすチェイン写像だから、商加群の普遍性からコホモロジー群の誘導準同型

$$\overline{\rho_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}}: \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^p(\mathcal{W}, \mathcal{F})$$

が一意に存在する。^{*23}

この誘導準同型を使って式 (4.1) の時と同様に帰納極限をとる。つまり、 $[f] \in \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ と $[g] \in \check{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ について、 \mathcal{W} を \mathcal{U} と \mathcal{V} の共通の細分として、

$$[f] \sim [g] \Leftrightarrow \overline{\rho_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}}([f]) = \overline{\rho_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}}([g])$$

なる同値関係を入れ、全ての開被覆について定まった Čech コホモロジー群の非交和をこの同値関係で割る；

$$\check{H}^p(M, \mathcal{F}) := \varinjlim \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \coprod_{\mathcal{U}} \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / \sim$$

こうして定義された $\check{H}^p(M, \mathcal{F})$ を多様体 M 上の Čech コホモロジー群という。 ■

2点ほど注をつけておこう。

コホモロジーの準同型

層準同型 $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ は、式 (4.3) と同様の可換性 $\delta^p \circ h = h \circ \delta^p$ を満たすので、誘導準同型 $\bar{h}: \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ が得られる。さらに、 \bar{h} は制限 $\rho_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}$ と可換だから、帰納極限においても準同型

$$\bar{h}: \check{H}^p(M, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^p(M, \mathcal{G})$$

を誘導する。(最後の \bar{h} は記号を変えるべきだが省略している。)

開被覆の取り方

多様体のチェックコホモロジー群は全ての開被覆についての帰納極限としたが、実は適当な開被覆を取れば、その結果が帰納極限と一致することが知られている。例えば [8][上野] によれば Lelay の定理から次の定理が従う。

定理 4.3:

X が分離的スキームであり $\mathcal{U} = \{U_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ が X のアフィン開被覆であるとき、 X 上の任意の準連接層にたいして同型

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \check{H}^p(X, \mathcal{F}) \cong H^p(X, \mathcal{F})$$

が成り立つ。

^{*23} [6][高間] の定義 2.3 を参照。

ここで $H^p(X, \mathcal{F})$ とはチェックコホモロジーに限らない一般のコホモロジーである。
 筆者自身スキームのその字も理解していないのでこれ以上の説明はできないが、アフィン開被覆に関しては [12][中原] などを見ると開被覆の任意個の元の共通部分が可縮であるようなものだと思っておけば良さそうである。

最後に次の定理は重要である。(詳細は [6][高間] の命題 2.1 を参照。)

定理 4.4: コホモロジー長完全列

M を位相空間とし、 M 上の層の短完全列

$$1 \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{G} \rightarrow 1$$

が成り立っているとす。この時次の系列が完全列である。

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \check{H}^0(M, \mathcal{E}) \xrightarrow{i} \check{H}^0(M, \mathcal{F}) \xrightarrow{j} \check{H}^0(M, \mathcal{G}) \\ \xrightarrow{\delta^*} \check{H}^1(M, \mathcal{E}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

ただし、 δ^* は連結準同型である。

連結準同型のところを下に書いた写像の図式を見ながら説明しておこう。(しばらく M は省略する。)

1. $\check{H}^p(M, \mathcal{G})$ の元の生成元 $g \in Z^p(\mathcal{G})$ をとる。(下図右上。)
2. j は全射だから、 $j(h) = g$ なる $h \in \check{C}^p(\mathcal{F})$ が存在する。
3. g の定義から $\delta^p(g) = 1$ であり、 j と δ は可換だから、 $\delta^p(h) \in \text{Ker}(j)$ 。
4. 短完全列 (4.4) の定義から $\text{Im}(i) = \text{Ker}(j)$ なので、 $i(z) = \delta^p(h)$ なる z が存在する。
5. コバウンダリ作用素 δ の冪零性から、 $\delta^{p+1} \circ \delta^p(h) = 1$ 。
6. 図式の可換性と i の単射性から、 $\delta^{p+1}(z) = 1$ 。
7. 従って、 $z \in Z(\mathcal{E})$ 。

この手順で、写像 $\bar{\delta}^*: Z(\mathcal{G}) \rightarrow Z(\mathcal{E}), g \mapsto z$ ができる。これが、準同型でコホモロジー群への誘導準同型をとったときに well-defined*24 であるかどうかの議論などは省略する。

$$\begin{array}{ccccc} & & \exists h \in \check{C}^p(\mathcal{F}) & \xrightarrow{j} & g \in Z^p(\mathcal{G}) \\ & & \downarrow \delta^p & & \downarrow \delta^p \\ \exists z \in Z^{p+1}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\quad} & \delta^p(h) & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow \delta^{p+1} & & \downarrow \delta^{p+1} & & \\ \delta^{p+1}(z) (= 1) & \xrightarrow{\quad} & 1 (= \delta^{p+1} \circ \delta^p(h)) & & \end{array}$$

非可換な層の場合

層 \mathcal{F} が非可換群の場合にどうすれば良いかを考えておこう。
 単体が変わりはない。

*24 2 手目で j を使ったとき h は一意に決まらないがその自由度が $[z]$ を変えないこと。

0 コチェインと 1 コチェインは

$$f = \{f_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)\}$$

$$g = \{g_{\alpha\beta} \in \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta) \mid g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\beta\alpha}\}$$

とすれば良さそうである。ただしこの場合, $f_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$ の逆元は

$$f_{\alpha\beta}^{-1} = h_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta}^{-1} = h_{\beta\alpha}g_{\beta\alpha} \neq g_{\beta\alpha}h_{\beta\alpha} = f_{\beta\alpha}$$

であるから, \mathcal{F} における積演算は群を成さない。

またコバウンダリ作用素を,

$$\delta^0(f)_{(\alpha,\beta)} := f_\beta^{-1}f_\alpha,$$

$$\delta^1(g)_{(\alpha,\beta,\gamma)} := g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha}g_{\alpha\beta}$$

とすると, $(\delta^0(f)_{\alpha\beta})^{-1} = f_\alpha^{-1}f_\beta = \delta^0(f)_{\beta\alpha}$ と, 0 コチェインの写像は 1 コチェインの元にきちんと入ることがわかる。さらに 0 コチェインに 2 回作用すると

$$\delta^1 \circ \delta^0(f)_{(\alpha,\beta,\gamma)} = f_\beta^{-1}f_\gamma f_\gamma^{-1}f_\alpha f_\alpha^{-1}f_\beta = 1$$

と冪零性を見たしていることもわかる。1 コチェイン同士の同値関係を,

$$g \sim h \in \check{C}^1(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \exists f \in \check{C}^0(\mathcal{F}) \text{ s.t. } \forall (\alpha, \beta) \in \Sigma, g_{\alpha\beta} = f_\alpha^{-1}h_{\alpha\beta}f_\beta$$

と入れるとこれは確かに反射律・対称律・推移律を満たす。よってこの同値類から $\check{H}^0(\mathcal{F}), \check{H}^1(\mathcal{F})$ は定義できる。ただし 1 次コサイクル群はコサイクル条件 $\delta^1(g)_{\alpha\beta\gamma} = g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha}g_{\alpha\beta} = 1$ を満たす部分集合である。

ところが, 2 コチェインを δ^1 で移すと非可換性から

$$(\delta^1(g)_{(\alpha,\beta,\gamma)})^{-1} = g_{\beta\alpha}g_{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta} \neq g_{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta}g_{\beta\alpha} = \delta^1(g)_{(\beta,\alpha,\gamma)}$$

となるので, 2 次以上のコホモロジーは定義できない。また, 上に書いたコホモロジー長完全列も非可換群が入っている場合は, その 2 次コホモロジーが現れる手前で止まるものとする。 ■

4.3 Stiefel-Whitney 類の構成と定理の証明

いよいよ Stiefel-Whitney 類の構成をし, 目標にしていた定理の証明に入る。S-W 類は特性類と呼ばれるコホモロジー群の元の一つ (つまり一つの同値類) であり, ホモロジー群が位相不変量であったことからこれらも幾何的な分析の上で有効な量である。特にその具体的な構成は (S-W 類でもそうだが) 接束やベクトル束で扱う量を用いているので, 考えている束がどれほど捻れているかという情報を与えてくれる。

ここでは 1 次と 2 次についてのみ考える。

第 1 次 S-W 類

例 5.2 で層の短完全列

$$1 \rightarrow \underline{SO}(n) \rightarrow \underline{O}(n) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1 \text{ (exact)}$$

を紹介した。ここから前節最後の定理を用いてコホモロジー長完全列

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \check{H}^0(M, \underline{SO}(n)) &\longrightarrow \check{H}^0(M, \underline{O}(n)) \longrightarrow \check{H}^0(M, \mathbb{Z}_2) \\ &\xrightarrow{\delta^*} \check{H}^1(M, \underline{SO}(n)) \longrightarrow \check{H}^1(M, \underline{O}(n)) \longrightarrow \check{H}^1(M, \mathbb{Z}_2) \end{aligned}$$

を得る。

いま M をリーマン多様体だとすると接束 TM の局所フレームから $\mathbf{O}(M)$ が構成できるのだった。この変換関数 $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow O(n)$ は 1 単体における $\underline{O}(n)(U_\alpha \cap U_\beta)$ の切断であり、コサイクル条件 $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$ から、 $\{g_{\alpha\beta}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{O}(n))$ だからコホモロジー群の元 $[\{g_{\alpha\beta}\}] \in \check{H}^1(M, \underline{O}(n))$ の生成元になる。これを誘導準同型で隣に移した

$$w_1(M) := [\tau] (\in \check{H}^1(M, \mathbb{Z}_2))$$

を多様体 M の第 1 次 Stiefel-Whitney 類という。ここで $\tau = \{\det(g_{\alpha\beta}) \mid (\alpha, \beta) \text{ は 1 単体}\}$ である。 ■

第 2 次 S-W 類

1 次の時と同様に短完全列

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i} \underline{\text{Spin}}(n) \xrightarrow{\text{Ad}} \underline{SO}(n) \rightarrow 1 \quad (\text{exact}) \quad (4.4)$$

から、長完全列

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \check{H}^0(M, \mathbb{Z}_2) &\longrightarrow \check{H}^0(M, \underline{\text{Spin}}(n)) \longrightarrow \check{H}^0(M, \underline{SO}(n)) \\ &\xrightarrow{\delta^*} \check{H}^1(M, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \check{H}^1(M, \underline{\text{Spin}}(n)) \longrightarrow \check{H}^1(M, \underline{SO}(n)) \\ &\xrightarrow{\delta^*} \check{H}^2(M, \mathbb{Z}_2) \end{aligned}$$

を得る。

M が向きづけ可能なリーマン多様体な時、変換関数は $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow SO(n)$ に簡約でき、コサイクル条件を満たすから $[\{g_{\alpha\beta}\}] \in \check{H}^1(M, \underline{SO}(n))$ の生成元になる。そこで連結準同型によって一つ下の段に移して、

$$w_2(M) := [\{\delta^*(g_{\alpha\beta})\}] (\in \check{H}^2(M, \mathbb{Z}_2))$$

を得る。これを多様体 M の第 2 次 Stiefel-Whitney 類という。

もう少し具体的に見ておくと、 $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$ だから g の $\check{C}^1(\underline{\text{Spin}}(n))$ への持ち上げ h は $z_{(\alpha\beta\gamma)} := \delta^1(h)_{(\alpha\beta\gamma)} = h_{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}h_{\gamma\alpha} = \pm 1$ を満たす。そこで、 $\delta^*(g)_{(\alpha\beta\gamma)} = z_{(\alpha\beta\gamma)} \in \mathbb{Z}_2$ を取っている。これがコサイクル群の元であることは $h_{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}h_{\gamma\alpha} = h_{\gamma\alpha}h_{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}$ と $h_{\alpha\beta}h_{\beta\alpha} = 1$ を使って $\delta^2(z)_{(\alpha\beta\gamma\delta)}$ を計算すればわかる。

$$\begin{array}{ccccc} \exists h (\in \check{C}^1(\underline{\text{Spin}}(n))) & \xrightarrow{\text{Ad}} & g (\in Z^1(\underline{SO}(N))) & & \\ & & \downarrow \delta^1 & & \downarrow \delta^1 \\ \exists z (\in Z^2(\mathbb{Z}_2)) & \xrightarrow{\quad} & \pm 1 & \xrightarrow{\text{Ad}} & 1 \\ & & \downarrow \delta^2 & & \\ & & \delta^2(z) (= 1) & & \end{array}$$

■

以上が S-W 類の構成である。
ではまず、次の定理を示そう。

定理 4.5: 向き付け可能性の必要十分条件

次の二つは同値である。

1. リーマン多様体 (M, g) が向き付け可能.
2. $w_1(M)$ が自明.

ただし、自明であるとはコホモロジー群の単位元であることをいう。
また、 (M, g) の向きは $\check{H}^0(M, \mathbb{Z}_2)$ で分類できる。

証明

[1 \Rightarrow 2]

向き付け可能なとき開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を適当に選ぶことで、

$$\tau_{\alpha\beta} := \det(g_{\alpha\beta}) = 1 \quad (\forall \alpha, \beta \in A)$$

とできる。従って、 $[\tau] = [1] = 1$ と、単位元になる。

[2 \Rightarrow 1]

$\{[\tau]\}$ が自明だとすると、生成元はコバウンダリ群の元なので、

$$\tau_{\alpha\beta} = \omega_\alpha^{-1} \omega_\beta \quad (\forall \alpha, \beta \in A)$$

なる、0 コチェイン $\omega = \{\omega_\alpha \mid \alpha \in A\} \in \check{C}^0(M, \mathbb{Z}_2)$ が存在する。そこで、

$$h_\alpha := \text{diag}(\omega_\alpha, 1, \dots, 1) \in O(n)$$

によって局所自明化を、 $\phi'_\alpha := h_\alpha \phi_\alpha$ とすれば、変換関数は $g'_{\alpha\beta} = h_\alpha g_{\alpha\beta} h_\beta^{-1}$ となるから、

$$\tau'_{\alpha\beta} = \det(g'_{\alpha\beta}) = (\det(g_{\alpha\beta}))^2 = 1$$

と変わって、向き付けが可能であることがわかる。

[向きの分類]

$[z] \in \check{H}^0(M, \mathbb{Z}_2)$ を一つとる。 z はコサイクル群の元なので、

$$\delta^0(z)_{(\alpha\beta)} = z_\alpha^{-1} z_\beta = 1 \Leftrightarrow z_\alpha = z_\beta$$

である。従って、 z は M の単連結成分上で \mathbb{Z}_2 の定数値を持つ。そこで、 $h_\alpha := \text{diag}(z_\alpha, 1, \dots, 1)$ によって局所自明化を $\phi'_\alpha = h_\alpha \phi_\alpha$ とすると、変換関数は $h_\alpha = h_\beta$ だから単連結成分上で \det の符号を変えないが、右手系・左手系は z によって変わる。ゆえに、 (M, g) の向きは $[z] \in \check{H}^0(M, \mathbb{Z}_2)$ で分類できる。 ■

では次に次を示そう。

定理 4.6: 多様体がスピ構造を持つための必要十分条件

(M, g) : 向き付きリーマン多様体. 次の二つは同値である.

1. (M, g) がスピ構造を持つ
2. 第2次 Stiefel-Whitney 類 $w_2(M)$ が自明.

また, (M, g) のスピ構造は $\check{H}^1(M, \mathbb{Z}_2)$ で分類できる.

証明

[1 \Rightarrow 2]

下の図式を見ればほぼ明らか. $\mathbf{Spin}(M)$ の推移関数 $h = \{h_{\alpha\beta}\}$ はコバウンダリ条件を満たすので, $Z^1(\mathbf{Spin}(n))$ の元になっている. これより, $\delta^1(h) = 1$ を $Z^2(\mathbb{Z}_2)$ に移すと i の単射性から $z = 1$. 従って, $\mathbf{SO}(M)$ の推移関数からの連結準同型が $\delta^*(g) = z = 1$ なのでその同値類 $\omega_2(M) = [\delta^*(g)]$ は自明.

$$\begin{array}{ccc} \exists h (\in Z^1(\mathbf{Spin}(n))) & \xrightarrow{\text{Ad}} & g (\in Z^1(\mathbf{SO}(n))) \\ \downarrow \delta^1 & & \downarrow \delta^1 \\ \exists z = 1 (\in Z^2(\mathbb{Z}_2)) & \xrightarrow{i} & 1 = \delta^1(h) \xrightarrow{\quad\quad\quad} 1 \end{array}$$

[2 \Rightarrow 1]

$\mathbf{SO}(M)$ の変換関数 $g = \{g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbf{SO}(n)\}$ にたいして, 持ち上げ $h = \{h_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbf{Spin}(n)\}$ が存在する. これは, $\text{Ad}(h_{\alpha\beta}) = g_{\alpha\beta}$ を満たすが, コサイクル条件を満たすとは限らない. さて, このような h を經由して連結準同型を取った $\omega_2(M) = [z]$ が自明であるとする. このとき, $z_{(\alpha\beta\gamma)} = w_{\alpha\beta}w_{\beta\gamma}w_{\gamma\alpha} (w_{\alpha\beta} \in \check{C}^1(\mathbb{Z}_2))$ とかけるから, $\mathbf{Spin}(M)$ として変換関数が

$$h'_{\alpha\beta} = w_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$$

であるものをとれば, $\text{Ad}(h'_{\alpha\beta}) = \text{Ad}(h_{\alpha\beta}) = g_{\alpha\beta}$ より, M 上のスピ構造を入れることができる.

[スピ構造の分類]

二つのスピ構造の変換関数を $\{h_{\alpha\beta}\}$ と $\{h'_{\alpha\beta}\}$ とかく. $\text{Ad}(h_{\alpha\beta}) = \text{Ad}(h'_{\alpha\beta})$ だから,

$$h'_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$$

なる $\tau_{\alpha\beta} \in \check{C}^1(U, \mathbb{Z}_2)$ が決まる. 変換関数のコサイクル条件から

$$\delta^1(\tau)_{(\alpha\beta\gamma)} = 1$$

なので, $[\tau] \in \check{H}^1(M, \mathbb{Z}_2)$ が決まる.

今, $[\tau]$ が自明だとすると, $\tau_{\alpha\beta} = w_\alpha^{-1}w_\beta$ を満たす $w \in \check{C}^0(U, \mathbb{Z}_2)$ が存在して,

$$h'_{\alpha\beta} = w_\alpha^{-1}h_{\alpha\beta}w_\beta$$

とかける. 従って定理 3.1 より二つのスピ構造は同値である.

$[\tau]$ が自明でないとき, このように変換関数が関係付けられないので同値でない構造であることがわかる. ■

4.4 実際に触ってみる (3)

素朴に計算できる例として S^1 上の \mathbb{Z}_2 系数 Čech コホモロジー群を計算してみよう。開被覆は前節で扱った図 (1) の $\mathcal{U} = (U_0, U_1, U_2)$ にとることとする。

0 コチェインは開集合ごとに値を持つので、

$$f = (a_0, a_1, a_2) \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2(U_0) \times \mathbb{Z}_2(U_1) \times \mathbb{Z}_2(U_2).$$

\mathbb{Z}_2 において逆元は自分自身なのでコバウンダリ作用素を使って 1 コチェイン複体に移すと、

$$\delta^0(f) = (a_1a_0, a_2a_1, a_0a_2) \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2(U_{01}) \times \mathbb{Z}_2(U_{12}) \times \mathbb{Z}_2(U_{20}). \quad (4.5)$$

となる。ここで $U_{ik} = U_i \cap U_k$ とした。

$f \in \text{Ker}(\delta^0)$ であるためには、

$$\begin{aligned} a_1a_0 &= a_2a_1 = a_0a_2 = 1 \\ \Leftrightarrow a_0 &= a_1 = a_2 \end{aligned}$$

が必要。従って $Z^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ 。 $B^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2) = \phi$ だから、 $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ がわかる。このように 0 次コホモロジーが 1 次元空間と同型になることは S^1 の連結成分が一つであることを表している。

$\delta^0(f)$ の 3 つの成分は和が 0 になるので独立ではない。従って $\text{Im}(\delta^0) \cong (\mathbb{Z}_2)^2$ である。一般の 1 コチェインは

$$g = (b_{01}, b_{12}, b_{20}) \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^3$$

だが、 $\check{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2(U_{012} = \phi) = \phi$ なので、 $\check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2) = \text{Ker}(\delta^1)$ である。これより、

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^3 / \mathbb{Z}_2^2 \cong \mathbb{Z}_2$$

このように 1 次コホモロジーが 1 次元空間と同型になることは S^1 に 1 次元の穴が一つ空いていることを表している。

$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2)$ にどのような成分の組合わせが入っているのかを見ておこう。まず、 $\text{Im}(\delta^0)$ の元 (4.5) は総積が 1 だから $(1, 1, 1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1)$ である。これらの元によって移りあうことのない $Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2)$ の元は $(1, 1, 1), (-1, 1, 1)$ の二つのみ。この二つが $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2)$ の生成元で、 $(-1, 1, 1) \times (-1, 1, 1) = (1, 1, 1)$ だから確かにこれは \mathbb{Z}_2 と同型であることがわかる。前章の「実際に触ってみる (2)」を思い出すと、タイプ A と C は $(1, 1, 1)$ と $(1, -1, -1)$ に対応していて $\text{Im}(\delta^0)$ で移り合えるので同値であり、タイプ B は $(1, 1, -1)$ に対応しているので他の二つと同値でない。実際これらの構造の間には連結・非連結という大きな違いがあった。こうしてみると確かにスピンの同値類が $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2)$ によって分類されていることが実感できるだろう。

5 補足

5.1 角運動量代数

角運動量の交換関係、

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$$

を満たす演算子 $\{J_1, J_2, J_3\}$ を考える。この時、次の交換関係が成り立つ：

$$[\mathbf{J}^2, J_i] = 0 \quad (i = x, y, z)$$

そこで、 \mathbf{J}^2 と J_z を同時に対角化する基底を考えることにして、

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 |\mu, m\rangle &= \mu |\mu, m\rangle \\ J_z |\mu, m\rangle &= m |\mu, m\rangle \end{aligned}$$

であるとする。ここで、昇降演算子

$$J_{\pm} := J_x \pm iJ_y$$

を導入すると、

$$[J_+, J_-] = 2J_z, \quad [J_{\pm}, \mathbf{J}^2] = 0$$

である。この関係から

$$|\mu, m \pm 1\rangle \propto J_{\pm} |\mu, m\rangle$$

がわかる。ところがノルムは正定値であることから、この昇降操作には限界がある。具体的には、

$$\langle \mu, m | (\mathbf{J}^2 - J_z^2) | \mu, m \rangle = \langle \mu, m | \frac{1}{2} (J_+ J_+^{\dagger} + J_- J_-^{\dagger}) | \mu, m \rangle \geq 0$$

より

$$m_{\min} \leq m \leq m_{\max}, \quad m_{\max}^2 \leq \mu, \quad m_{\min}^2 \leq \mu$$

なる m_{\min}, m_{\max} があって、

$$J_+ |\mu, m_{\max}\rangle = 0, \quad J_- |\mu, m_{\min}\rangle = 0$$

であるとする。この左辺にそれぞれ J_-, J_+ をかけると、 $J_- J_+ = \mathbf{J}^2 - J_z^2 - J_z$, $J_+ J_- = \mathbf{J}^2 - J_z^2 + J_z$ だから、

$$\begin{aligned} 0 &= J_- J_+ |\mu, m_{\max}\rangle = (\mu - m_{\max}^2 - m_{\max}) |\mu, m_{\max}\rangle \\ 0 &= J_+ J_- |\mu, m_{\min}\rangle = (\mu - m_{\min}^2 + m_{\min}) |\mu, m_{\min}\rangle \end{aligned}$$

ゆえに

$$\mu = m_{\max}^2 + m_{\max} = m_{\min}^2 - m_{\min} \quad \therefore m_{\max} = -m_{\min}$$

がわかる。 $|\mu, m_{\min}\rangle$ に J_+ を n 回かけて $|\mu, m_{\max}\rangle$ が得られるとすると、 $n + m_{\min} = -m_{\min} \quad \therefore m_{\min} = -n/2$ 。従って、

$$\mu = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right), \quad m = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1, \dots, \frac{n}{2}$$

であることがわかった。

5.2 普遍被覆空間が同型を除いて一意であること.

B : 連結かつ弧状連結な空間.

定義 5.1: 被覆空間

E : 連結な空間.

連続写像 $p: E \rightarrow B$ が B 上の被覆空間であるとは次を満たすこと:

1. p は全射
2. $\forall x \in B, \exists V_x: x$ の連結な開近傍, $\exists U_y: y \in p^{-1}(x)$ の開近傍 s.t.

$$y \neq y' \Rightarrow U_y \cap U_{y'} = \emptyset$$

3. $p|_{U_y}: U_y \rightarrow V_x$ は同相写像

特に B を底空間, E を全空間, p を射影, $p^{-1}(x)$ を x 上のファイバーという.

余裕があったら挿絵を入れるが, ティラミス 이미지를イメージしておけばよい.

定義 5.2: 被覆空間の写像と同型

- 被覆空間 $p: E \rightarrow B, p': E' \rightarrow B$ にたいし, p から p' への被覆空間の写像を, 連続写像 $f: E \rightarrow E'$ で次の図式を可換にするものとする.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ B & \xlongequal{\quad} & B \end{array}$$

- 被覆空間 E, E' の同型を,
 $\forall x \in B$ にたいし, $f|_{p^{-1}(x)}: p^{-1}(x) \rightarrow p'^{-1}(x)$ が全単射であることとする.

定義 5.3: 基本群

X : 位相空間. X の点 $x_0 \in X$ を基点とするループ空間を,

$$\Omega(X, x_0) := \{l: [0, 1] \rightarrow X \mid l \text{ は } X \text{ への連続写像で, } l(0) = l(1) = x_0 \text{ を満たす.}\}$$

とする. この時,

$$\simeq := \{(l, l') \in \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \mid l \simeq l' \text{ (} l \text{ と } l' \text{ はホモトープ)}\}$$

なる関係は $\Omega(X, x_0)$ の同値関係であり, 次の基本群^a $\pi_1(X, x_0)$ が定まる:

$$\pi_1(X, x_0) := \Omega(X, x_0) / \simeq$$

^a 群構造はループ積によって入る. 二つのループ l, l' の間のループ積 $l' \cdot l$ は, 基点 x_0 を共有しているので「 l を辿ってから l' を辿る。」という繋げ方で新たなループを作る.

補題 5.1:

被覆空間 $p : E \rightarrow B$ の任意の $b_0 \in B$ と $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ について, 単射準同型

$$p_* : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$$

が誘導される.

証明 p は連続写像なので準同型性はほぼ明らか. 単射性を示す.

$[g] \in \pi_1(E, e_0)$ にたいし, $p_*([g]) = 1 \in \pi_1(B, b_0)$ とする. $g : I \rightarrow E$ はループで, ループ $f := p \circ g : I \rightarrow B$ は仮定から基点 b_0 にホモトープ. つまり, 連続写像 $\exists F : I \times I \rightarrow B$ s.t. $F(0, *) = f(*), F(1, *) = b_0, F(*, 0) = F(*, 1) = b_0$. 被覆空間なので F のリフトが存在する. つまり, 連続写像 $\exists G : I \times I \rightarrow E$ s.t. $G(0, *) = g(*), p \circ G(*, *) = F(*, *), G(*, 0) = G(*, 1) = e_0$. ここで, 連結集合 $G(1, I)$ は離散なファイバー $p^{-1}(b_0)$ に含まれるので, $G(1, I) = e_0$ に決まる. つまり $g \simeq e_0$. ■

以上から, $\pi_1(E, e_0)$ は $\pi_1(B, b_0)$ の部分群 $p_*(\pi_1(E, e_0))$ と同型である. ここで被覆空間として E が弧状連結なものを考えよう.*25 E の基点として新たに $e_1 \in p^{-1}(b_0)$ をとることを考える. 弧状連結性から e_1 から e_0 への道 σ がとれ, これにより群同型,

$$\sigma_* : \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(E, e_1), [g] \mapsto [\sigma^{-1} \circ g \circ \sigma]$$

が誘導される. これを上記の p_* によって $\pi_1(B, b_0)$ に移すと,

$$p_* \circ \sigma_*([g]) = [p \circ \sigma^{-1}] [p \circ g] [p \circ \sigma] = w^{-1} p_*([g]) w$$

であるから, 任意の $e \in p^{-1}(b_0)$ を基点とした E の基本群を $\pi_1(B, b_0)$ に写したものは $p_*(\pi_1(E, e_0))$ の共役部分群 $p_*(\pi_1(E, e)) = w p_*(\pi_1(E, e_0)) w^{-1}$ ($w \in \pi_1(B, b_0)$) としてかける. 特にこの共役部分群を集めたものを

$$\chi(E, b_0) = \{p_*(\pi_1(E, e)) \mid e \in p^{-1}(b_0)\}$$

とかく.

ここで次の定理が成り立つ.

定理 5.1: ファイバー写像定理

B, B' : 連結かつ弧状連結な空間. $p : E \rightarrow B, p' : E' \rightarrow B'$: 被覆空間. $f : B \rightarrow B'$: 連続写像. $e_0 \in E, e'_0 \in E', b_0 \in B, b'_0 \in B'$ は, $p(e_0) = b_0, p'(e'_0) = b'_0, f(b_0) = b'_0$ をみたすとする.

この時, 次は同値:

- $\exists! g : E \rightarrow E'$ s.t. $g(e_0) = e'_0$ かつ, $p' \circ g = f \circ p$
- $f_*(\text{Im}(p_*)) \subset \text{Im}(p'_*)$

証明は長くなるので割愛する. (詳しくは [10, 三村]などを参照.) なお, この定理で p, p', f は次の準同型を誘導している:

*25 $SU(2)$ や $\text{Spin}(3)$ は弧状連結であった.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(E, e_0) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(E', e'_0) \\ \downarrow p_* & & \downarrow p'_* \\ \pi_1(B, b_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(B', b'_0) \end{array}$$

定理 5.2: 同値定理

$\forall b_0 \in B$ を固定しておく.

B 上の被覆空間 $p: E \rightarrow B$ と $p': E' \rightarrow B$ が同型 $\Leftrightarrow \chi(E, b_0) = \chi(E', b_0)$

証明

[\Rightarrow] について

同相写像 $g: E \rightarrow E'$ をとる. これは $p' \circ g = p$ を満たす. $e'_0 := g(e_0)$ としておく. この時, 次の同型が誘導される:

$$g_*: \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(E', e'_0)$$

よって, $p_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e'_0))$ より, $\chi(E, b_0) = \chi(E', b_0)$.

[\Leftarrow] について

$\chi(E, b_0) = \chi(E', b_0)$ だから, $e_0 \in E, e'_0 \in E'$ があって,

$$p(e_0) = p'(e'_0) = b_0, \quad p_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e'_0))$$

よって定理 6.1 より $\exists! g: E \rightarrow E'$ s.t. $g(e_0) = e'_0 \wedge p' \circ g = p$. また逆向きを考えて, $\exists! h: E' \rightarrow E$ s.t. $h(e'_0) = e_0 \wedge p \circ h = p'$ である. この時, $h \circ g(e_0) = e_0$ であり, $p \circ h \circ g = p$ であるが, これは, 定理 6.1 を二つの同じ $p: E \rightarrow B$ に適用した時の写像 $id_E: E \rightarrow E$ が満たす性質であるから, 一意性から $h \circ g = id_E$ である. 同様に $g \circ h = id_{E'}$ も言える. よって g は同相写像である. ■

さて, 普遍被覆空間の定義を述べよう.

定義 5.4: 普遍被覆空間

被覆空間 $p: E \rightarrow B$ において, 全空間 E が単連結な時, これを普遍被覆空間という.

単連結な空間には「穴」が存在しないため, すべてのループが一点にホモトープである. 従って, 基本群 $\pi_1(E)$ は単位元のみを持つ自明な群となる. さらにこれより $\chi(E, b_0)$ も $\pi_1(B, b_0)$ の単位元のみからなる集合となるので, 次が従う:

定理 5.3: 普遍被覆空間の一意性

普遍被覆空間は同型をのぞいて一意に定まる.^a

^a 連結な被覆空間のなす圏の始対称であるとも言える.

以上の普遍被覆空間の一意性は考える空間がリー群であっても成り立つ.

定義 5.5: 普遍被覆群

G, \tilde{G} を弧状連結な位相群とする.
 \tilde{G} が G の被覆群であるとは, $p: \tilde{G} \rightarrow G$ が被覆空間であり, p が準同型写像であること.
特に, \tilde{G} が局所弧状連結かつ単連結な時, \tilde{G} を G の普遍被覆群という.

定理 5.4: 普遍被覆群の一意性

弧状連結な線形 Lie 群 G にたいして, 普遍被覆群 \tilde{G} が存在して, 同型を除いて一意に定まる.

5.3 1 の分割

(3.1) 章での証明で突然導入してしまったので定義だけ書いておく.

定義 5.6: 1 の分割

M : 多様体. $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$: M の局所有限な開被覆.
 M 上の滑らかな関数族 $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が U に従属した 1 の分割であるとは, この族が次の 3 つの条件を満たすことである:

1. $0 \leq h_\alpha \leq 1$
2. $\forall \alpha, \text{supp}(h_\alpha) \subset U_\alpha$ (supp は関数の台, つまり関数値が有限の値をとる領域.)
3. $\sum_{\alpha \in A} h_\alpha = 1$

5.4 ホモロジーの幾何的な意味

本文の中でたびたびホモロジーが穴の開き方を表しているという表現をしてきたが, Čech コホモロジー群の計算ではあまり実感が湧かないだろうから, ここでは簡単に計算できる単体的複体のホモロジーを考えてそのイメージを掴もう. Čech コホモロジー群と同様にまずはいくつかの概念と計算規則の定義が必要である.

単体と単体的複体

\mathbb{R}^n の中で $r+1$ 個の点 p_0, \dots, p_r を取ってくる. これらは一つの $r-1$ 次元空間に収まらないものとする. r 単体とは, 集合

$$\sigma_r := (p_0, \dots, p_r) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^r c_i p_i, c_i \geq 0, \sum_{i=0}^r c_i = 1 \right\}$$

のことである.

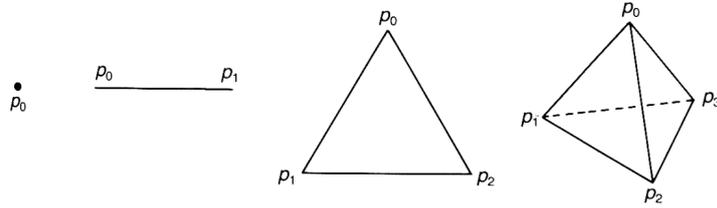


図3 0・1・2・3単体のイメージ. 2・3単体は中身が詰まっている.
図は [12][中原] から引用

r 単体 σ_r から $p+1$ 個の頂点を選んで作った単体 σ_p を σ_r の辺単体という. また辺単体に関する包含関係を不等号で表す. つまり, $\sigma_p = (p_{i_0}, \dots, p_{i_p}) \leq \sigma_r = (p_0, \dots, p_r)$. ただし等号は辺単体が自分自身の時のみ成り立つ. 単体的複体を次で定義する.

定義 5.7: 単体的複体

K を有限個の単体からなる集合とする.

1. K が単体的複体であるとは, 次の二つの条件が成り立つことである.
 - (a) $\sigma \in K$ であるとき, σ の辺単体は全て K に含まれる.
 - (b) $\sigma, \sigma' \in K$ のとき, $\sigma \cap \sigma' = \phi$ または, $(\sigma \cap \sigma' \leq \sigma) \wedge (\sigma \cap \sigma' \leq \sigma')$
2. 単体的複体 K に含まれる単体全ての和集合

$$|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \in \mathbb{R}^n$$

を多面体と呼び, \mathbb{R}^n の部分空間としての次元を $\dim |K|$ とかく.

鎖群

r 単体の間に形式的な和を定義する. 特に σ_r の逆元つまり $-\sigma_r$ は単体に向きを入れることで定義する. 具体的には置換

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & r \\ i_0 & i_1 & \cdots & i_r \end{pmatrix}$$

に対し

$$(p_{i_0}, \dots, p_{i_r}) = \text{sgn}(S)(p_0, \dots, p_r)$$

とする.

定義 5.8: 鎖群

単体的複体 K の r 次元鎖群 $C_r(K)$ とは, K に含まれる r 単体によって生成される自由加群

$$C_r(K, \mathbb{Z}) := \left\{ c = \sum_{i=1}^{I_r} n_i \sigma_r^i \mid I_r \text{ は } K \text{ に含まれる } r \text{ 単体の個数. } n_i \in \mathbb{Z} (\forall i \in I_r) \right\}$$

ただし $C_{r > \dim |K|}(K) = \phi$ であり, 上記の元 c を r チェインという.

$\{\sigma^r\}$ は基底をなすのでこれは $(\mathbb{Z})^{I_r}$ と同型である.

境界作用素

境界作用素 $\partial_r: C_r(K) \rightarrow C_{r-1}(K)$ を次の式で定義する.

$$\partial_r(\sigma_r) := \sum_{i=0}^r (-1)^i (p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_r)$$

ただし, $\partial_0(\sigma_0) := 0$ とする. この作用素は, 式 (4.2) と同様に冪零である.

ホモロジー群

Čech コホモロジー群と同様に単体的複体のホモロジー群が定義できる.

定義 5.9: ホモロジー群

輪体群

$$Z_r(K, \mathbb{Z}) := \text{Ker}\{\partial_r: C_r(K, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{r-1}(K, \mathbb{Z})\}$$

境界輪体群

$$B_r(K, \mathbb{Z}) := \text{Im}\{\partial_{r+1}: C_{r+1}(K, \mathbb{Z}) \rightarrow C_r(K, \mathbb{Z})\}$$

ホモロジー群

$$H_r(K, \mathbb{Z}) := Z_r(K, \mathbb{Z}) / B_r(K, \mathbb{Z})$$

それでは次の二つの図形についてホモロジーを計算してみよう.

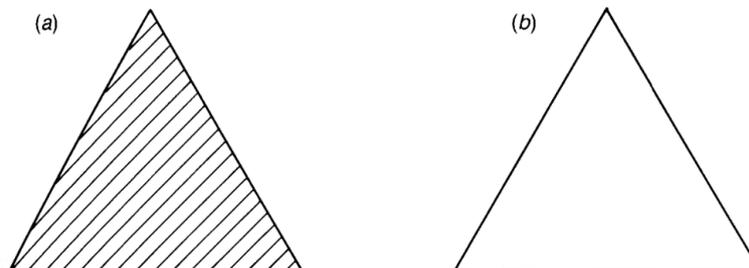


図 4 (a) 穴のない三角形 K_a と (b) 穴の空いた三角形 K_b

[12][中原] から引用.

$H_r(K_a)$ の計算

K_a は 2 単体なので考えるべき単体的複体は,

$$K_a := \{(p_0, p_1, p_2), (p_0, p_1), (p_1, p_2), (p_2, p_0), p_0, p_1, p_2\}.$$

これは 2 次元なので, 鎖群は

$$\begin{aligned} C_0(K) &= \{n_0 p_0 + n_1 p_1 + n_2 p_2\} \\ C_1(K) &= \{m_0(p_0, p_1) + m_1(p_1, p_2) + m_2(p_2, p_0)\} \\ C_2(K) &= \{l(p_0, p_1, p_2)\}. \end{aligned}$$

H_0 を求める. 境界作用素の定義から $\text{Ker}(\partial_0) = C_0 \cong \mathbb{Z}^3$ であり,

$$\begin{aligned} \text{Im}(\partial_1) &= \{m_0(p_1 - p_0) + m_1(p_2 - p_1) + m_2(p_0 - p_2)\} \\ &= \{(m_2 - m_0)p_0 + (m_0 - m_1)p_1 + (m_1 - m_2)p_2\} \\ &\cong \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

だから,

$$H_0(K_a) = \mathbb{Z}^3 / \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}.$$

H_1 を求める. $\text{Im}(\partial_1)$ の係数が全て 0 になることから,

$$\text{Ker}(\partial_1) = \{m((p_0, p_1) + (p_1, p_2) + (p_2, p_0))\} \cong \mathbb{Z}$$

また,

$$\begin{aligned} \text{Im}(\partial_2) &= \{l((p_1, p_2) - (p_0, p_2) + (p_0, p_1))\} \\ &= \{l((p_0, p_1) + (p_1, p_2) + (p_2, p_0))\} \\ &\cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

従って,

$$H_1(K_a) \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \phi$$

最後に, $\text{Ker}(\partial_{r \geq 2}) = \phi$ だから, $H_{r \geq 2} = \phi$ である. ■

$H_r(K_b)$ の計算

K_b は 1 単体三つが繋がっている図形なので考えるべき単体的複体は,

$$K_b := \{(p_0, p_1), (p_1, p_2), (p_2, p_0), p_0, p_1, p_2\}.$$

これは, 1 次元なので鎖群は

$$\begin{aligned} C_0(K) &= \{n_0 p_0 + n_1 p_1 + n_2 p_2\} \\ C_1(K) &= \{m_0(p_0, p_1) + m_1(p_1, p_2) + m_2(p_2, p_0)\} \\ C_2(K) &= \phi. \end{aligned}$$

H_0 は K_a と全く同じようにもとまるので,

$$H_0(K_a) = \mathbb{Z}^3 / \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}.$$

H_1 を求める. K_a と同様に $\text{Ker}(\partial_1) \cong \mathbb{Z}$, $C_2(K) = \phi$ より, $\text{Im}(\partial_2) = \phi$. 従って,

$$H_1(K_b) \cong \mathbb{Z} / \phi = \mathbb{Z}$$

最後に $H_{r \geq 2} = \phi$ である. ■

さて, 得られた結果をまとめると次のようになっている;

表 2 K_a と K_b のホモロジーの比較

	H_0	H_1	$H_{r \geq 2}$
K_a	\mathbb{Z}	ϕ	ϕ
K_b	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	ϕ

K_a は中身の詰まった三角形だったのに対し, K_b は穴の空いた三角形だった. この違いが両者の 1 次ホモロジー群に現れていて, 穴の個数が H_1 の次元に対応している.

またホモロジーの次数は穴の次元を表していて, 上と同様の手続きで図 (3) の 3 単体で中空のものについてホモロジー群を計算すると, $H_0 \cong \mathbb{Z}, H_1 = \phi, H_2 \cong \mathbb{Z}$ となる. ただし H_0 については少し解釈が異なり, H_0 の次元は多面体の連結成分の個数と一致する.

ここまで単体的複体についてを考えてきたが, 定理 5.3 のように異なる定式化を持つホモロジーの間に同型が成り立つので, Čech コホモロジー群の意味も単体的複体などにおけるそれと同じように理解できる.

参考文献

- [1] 野村隆昭 (2018). 球面調和関数と群の表現 (日本評論社). 978 4 535 79818 2
- [2] 本間泰史 (2016). スピン幾何学 スピノール場の数学 (森北出版). 978 4 627 07761 4
- [3] 江沢洋, 島和久 (2009). 群と表現 (岩波書店). 978 4 00 005270 2
- [4] 杉浦光夫 (2000). リー群論 (共立出版). 4 320 01637 8
- [5] 高間俊至 (2023). 微分幾何学 ノート.
<https://event.phys.s.u-tokyo.ac.jp/physlab2023/groups/mathematical-physics/>
- [6] 高間俊至 (2023). 代数トポロジー ノート.
- [7] 辻圭汰 (2023). 幾何学的量子化.
- [8] 上野健爾 (1997). 岩波講座 現代数学の基礎 10; 代数幾何 2 層とコホモロジー (岩波書店). 4 00 010640 6
- [9] J. J. Sakurai, Jim Napolitano: *Modern Quantum Mechanics, 2nd Edition* (2011) (Pearson Education). (J. J. サクライ, ジム・ナポリターノ, 桜井明夫 (訳) (2014). 第 2 版 J. J. Sakurai: 現代の量子力学 (上)) 978 4 8427 0364 0
- [10] Sze -Tsen Hu: *Homotopy Theory* (ゼ -ツェン フー, 三村護 (訳) (1994). ホモトピー論 現代数学社) 4 7687 0316 X
- [11] Raoul Bott, Loring W. Tu *Differential Forms in Algebraic Topology* (Springer-Verlag New York). 978 1 4419 2815 3
- [12] Mikio Nakahara *Geometry, Topology and Physics Second Edition* (2003) (Institute of Physics Publishing). 0 7503 0606 8