幾何学的量子化

Physics Lab. 2023 数理物理班 辻圭汰

2023 年 5 月 11 日

幾何学的量子化は、古典的な相空間から微分幾何学を用いて対応する量子系を得る手続きです。その一端を述べるだけでも膨大な準備が必要になりますが、この記事では解析力学、多様体、シンプレクティック幾何学、位相空間、量子力学、微分幾何学に関する知識を一切仮定せずに幾何学的量子化を紹介します。ただし、大学初年度程度の数学と力学、具体的には数学は行列、偏微分、集合と写像を、力学は簡単な運動方程式の予備知識は仮定せざるを得ませんでした。この記事は次のような構成になっています。

1 章で解析力学、特にハミルトン形式の基礎を解説します。2 章では多様体を用いた幾何学の基礎的事項を紹介し、3 章でシンプレクティック幾何学を用いてハミルトン形式を書き表します。2 章で省略した位相に関する議論は 4 章で行い、5 章と 6 章で微分形式の積分を定義してストークスの定理を証明します。また 7 章ではド・ラームコホモロジーを導入してポアンカレの補題を証明し、チェックコホモロジーとの同型を証明します。8 章では幾何学的量子化でも用いられる分布と葉層構造を定義します。

9 章以降で量子力学と量子化を扱います。9 章では量子力学の数学的定式化を紹介します。10 章では古典系から量子系を得る標準的な方法である正準量子化について議論します。11 章でユークリッド空間における幾何学的量子化のあらましを述べます。12 章で微分幾何学の基礎的事項を紹介します。13 章以降で幾何学的量子化を本格的に扱います。13 章では望ましい性質を持った量子化である前量子化を導入します。14 章では前量子化の問題点を解消するための数学的準備として複素偏極を定義します。最後の 15 章では、調和振動子のハミルトニアンを幾何学的量子化することで生成消滅演算子による表現が得られることや、S^2 を幾何学的量子化することでスピンが自然に現れることを示します。

幾何学的量子化にはチャーン・サイモンズ理論の量子化など様々な応用があります [APW91]。この記事ではそのような応用に至ることはできませんでしたが、基本的なところから一歩一歩解説したため分量が膨大になってしまっています。必要に応じて証明や計算を飛ばすなどしてください。

目次

1　ハミルトン形式

1.1　正準変数と正準方程式

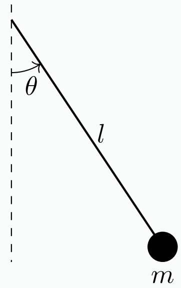
物理法則を表現する形式の一つに、ハミルトン形式というものがあります。ハミルトン形式では、系の状態は正準座標 $q^i (i = 1, \cdots, n)$ と正準運動量 p_i によって表され[*1]、q^i, p_i はハミルトニアンと呼ばれる関数 $H(q^i, p_i)$ を用いた微分方程式

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

に従って時間変化します。この方程式を正準方程式と呼び、q^i, p_i をまとめて正準変数と呼びます。

例 1.1: 振り子の運動

振り子の運動を考えてみましょう。糸で吊るされた振り子は糸がゆるむ可能性があって複雑なので、長さ l の質量のない棒で吊るされた質量 m の振り子を考えることにします。



ある時刻における回転角 θ とその回転速度 $\dot{\theta}$ が定まれば、その後の振り子の運動は全時刻で定まるので、系の状態は $\theta, \dot{\theta}$ で表されます。そこで正準変数を

$$q = \theta, \ p = \dot{\theta}$$

に取ります。正準方程式の片方 $\dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p}$ を満たすためには、ハミルトニアンを

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$$

という形に取ればよいです。このとき正準方程式のもう一方 $\dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}$ は

$$\ddot{q} = -\frac{dV}{dq}$$

となります。これを運動方程式

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin\theta \tag{1}$$

*1 正準座標の添字を上に、正準運動量の添字を下に書いているのは慣習です。

と比較すれば、$V(q) = -\frac{g}{l}\cos q$ とすればよいことが分かるので、ハミルトニアンは

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{g}{l}\cos q$$

となります。これが振り子の運動のハミルトン形式です。

例 1.2: 振り子の運動 2

例 1.1 では $q = \theta, p = \dot{\theta}$ としていましたが、正準変数をこのようにとる必要はありません。例えば $Q = p, P = -q$ として

$$Q = \dot{\theta},\ \ P = -\theta$$

と取ることもできます。ハミルトニアンは単に $Q = p, P = -q$ と置き換えて

$$H(Q,P) = \frac{1}{2}Q^2 - \frac{g}{l}\cos P$$

とすればよいです。正準方程式が運動方程式を与えることを確かめてみてください。

例 1.1 と例 1.2 から分かるように、正準変数をどのように選ぶかは一意的ではなく、様々な選び方があります。

1.2 正準変換

ハミルトン形式は幾何学的に表すことができます。その第一歩は、系の状態を空間の点とみなすことです。例 1.1 で扱った振り子の運動 (簡単のために $l = g = 1$ とします) では、振り子が運動する範囲は単位円周 S^1 であり、振り子の速度は任意の実数をとることができるので、状態は無限に長い円筒 $M = S^1 \times \mathbb{R}$ 上の点とみなすことができます。このような M を相空間と呼びます。

正準変数 $q = \theta, p = \dot{\theta}$ は円筒 M の $-\pi < \theta < +\pi$ の範囲を連続に覆っていますが、M 全体を覆えてはいません[*2]。これを (q,p) は M の局所座標であるといいます。M 全体を覆うために、別の局所座標 (q',p') を使いましょう。(q,p) と (q',p') が重なっているところでは $q(q',p'), p(q',p')$ のように表すことができるので、局所座標 (q',p') で表したハミルトニアンは

$$H(q',p') = H(q(q',p'), p(q',p'))$$

と書けます。逆に q',p' を $q'(q,p), p'(q,p)$ と表せば、偏微分は

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial q'}\frac{\partial q'}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial p'}\frac{\partial p'}{\partial q}$$
$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial q'}\frac{\partial q'}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p'}\frac{\partial p'}{\partial p}$$

[*2] $-\pi \leq \theta < \pi$ とすれば一見いいように見えますが、振り子が反時計回りに上を通るときに θ の値が不連続に π から $-\pi$ へと変わってしまうので連続に覆うことができていません。

となります。ヤコビ行列

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q'}{\partial q} & \dfrac{\partial q'}{\partial p} \\ \\ \dfrac{\partial p'}{\partial q} & \dfrac{\partial p'}{\partial p} \end{pmatrix}$$

を使うともっと簡単に書けて

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \\ \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} = J^T \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q'} \\ \\ \dfrac{\partial H}{\partial p'} \end{pmatrix}$$

となります。ただし J^T は J の転置行列です。一方、q', p' の時間微分は連鎖律から

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dq'}{dt} \\ \\ \dfrac{dp'}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q'}{\partial q}\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{\partial q'}{\partial p}\dfrac{dp}{dt} \\ \\ \dfrac{\partial p'}{\partial q}\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{\partial p'}{\partial p}\dfrac{dp}{dt} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \dfrac{dq}{dt} \\ \\ \dfrac{dp}{dt} \end{pmatrix}$$

と表せます。行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を使うと正準方程式は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dq}{dt} \\ \\ \dfrac{dp}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \\ \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$$

と表せるので、まとめると

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dq'}{dt} \\ \\ \dfrac{dp'}{dt} \end{pmatrix} = JAJ^T \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q'} \\ \\ \dfrac{\partial H}{\partial p'} \end{pmatrix}$$

となります。よって、

$$A = JAJ^T$$

が成り立てば正準方程式は q', p', H においても成り立ちます。この条件を満たす座標変換 $(q, p) \to (q', p')$ を正準変換といいます。

一般に、$i=1,\cdots,n$ として正準変数 q^i,p_i から q'^i,p'_i への変換については、ヤコビ行列を

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial q'^1}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial q'^1}{\partial q^n} & \frac{\partial q'^1}{\partial p^1} & \cdots & \frac{\partial q'^1}{\partial p_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q'^n}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial q'^n}{\partial q^n} & \frac{\partial q'^n}{\partial p^1} & \cdots & \frac{\partial q'^n}{\partial p_1} \\ \frac{\partial p'^1}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial p'^1}{\partial q^n} & \frac{\partial p'^1}{\partial p^1} & \cdots & \frac{\partial p'^1}{\partial p_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p'^n}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial p'^n}{\partial q^n} & \frac{\partial p'^n}{\partial p^1} & \cdots & \frac{\partial p'^n}{\partial p_1} \end{pmatrix}$$

とし、行列 A を

$$A=\begin{pmatrix} & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \end{pmatrix} \tag{2}$$

と置けば[*3]、正準変換の条件は同様に

$$A=JAJ^T$$

と書けます。分かりやすいように成分表示すると、

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q'^i}{\partial q^k}\frac{\partial q'^j}{\partial p_k}-\frac{\partial q'^j}{\partial q^k}\frac{\partial q'^i}{\partial p_k}\right)=0$$
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial p'_i}{\partial q^k}\frac{\partial p'_j}{\partial p_k}-\frac{\partial p'_j}{\partial q^k}\frac{\partial p'_i}{\partial p_k}\right)=0$$
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q'^i}{\partial q^k}\frac{\partial p'_j}{\partial p_k}-\frac{\partial p'_j}{\partial q^k}\frac{\partial q'^i}{\partial p_k}\right)=\delta^i_j$$

となります。

1.3 ハミルトンベクトル場

正準変数 q^i,p_i の関数 $f(q^i,p_i)$ は相空間 M の点に実数を対応させるものとみなすことができます。時間とともに状態が変化して点 (q^i,p_i) が M 上を動くのにしたがい、f の値も変化します。正準方程式を使うと f の変化は

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt}+\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\end{aligned}$$

*3 数字がないところは 0 だとします。

と表すことができます。これを微分演算子

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

が関数 f にかかっているとみなし、

$$\frac{df}{dt} = X_H f$$

と書くことができます。

X_H は幾何学的に解釈できます。微小時間 Δt の間の f の変化は、Δt の 1 次まで考えると

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{df}{dt} \Delta t \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \Delta t \\ &= f\left(q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \Delta t, p_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \Delta t \right) - f(q^i, p_i) \end{aligned}$$

となります。これは点 (q^i, p_i) にあるベクトル $\left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \Delta t, -\frac{\partial H}{\partial q_i} \Delta t \right)$ の始点と終点における f の値の差だと考えることができます。つまり関数 f の変化は、点 (q^i, p_i) がハミルトンベクトル場 X_H によって「流されて」生じたものと考えられます。

例 1.3

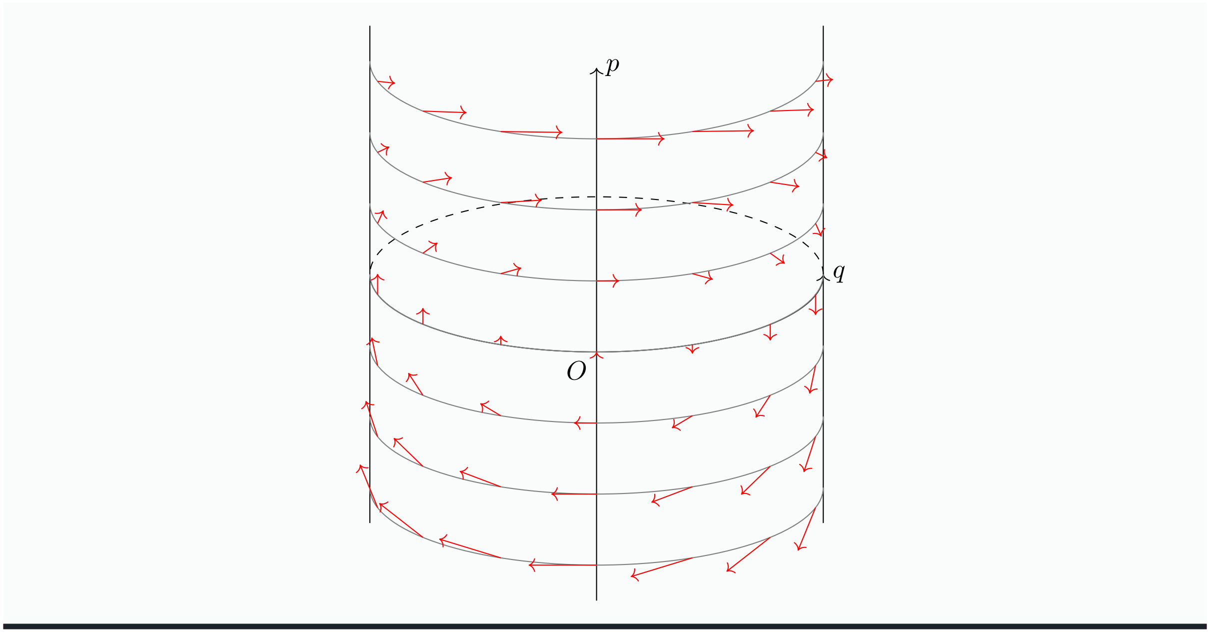
例 1.1 の振り子の運動のハミルトンベクトル場を計算してみましょう。ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2} p^2 - \frac{g}{l} \cos q$$

だったので、

$$X_H = p \frac{\partial}{\partial q} - \frac{g}{l} \sin q \frac{\partial}{\partial p}$$

となります。相空間 $S^1 \times \mathbb{R}$ において X_H を図示すると次のようになります。



微分演算子とベクトル場[*4]が対応するという考えを進めて、微分演算子こそがベクトル場なのだと考えてみましょう。このとき X_H が特定の正準変数 (q^i, p_i) を使って定義されていることが問題になります。異なる正準変数 (q'^i, p'_i) を用いて定義した

$$X'_H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p'_i} \frac{\partial}{\partial q'^i} - \frac{\partial H}{\partial q'^i} \frac{\partial}{\partial p'_i} \right)$$

が X_H と同じ微分演算子にならなければ、X_H がベクトル場を表しているとは言えないからです。連鎖律と正準変換の条件を使って計算すると、

$$\begin{aligned}
X'_H &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial p'_i} + \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial p'_i} \right) \left(\frac{\partial q^j}{\partial q'^i}\frac{\partial}{\partial q^j} + \frac{\partial p_j}{\partial q'^i}\frac{\partial}{\partial p_j} \right) \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial q'^i} + \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial q'^i} \right) \left(\frac{\partial q^j}{\partial p'^i}\frac{\partial}{\partial q^j} + \frac{\partial p_j}{\partial p'^i}\frac{\partial}{\partial p_j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q^k} \left(\frac{\partial q^j}{\partial q'^i}\frac{\partial q^k}{\partial p'_i} - \frac{\partial q^k}{\partial q'^i}\frac{\partial q^j}{\partial p'_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial p_k} \left(\frac{\partial q^j}{\partial q'^i}\frac{\partial p_k}{\partial p'_i} - \frac{\partial p_k}{\partial q'^i}\frac{\partial q^j}{\partial p'_i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial q^j} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q^k} \left(\frac{\partial p_j}{\partial q'^i}\frac{\partial q^k}{\partial p'_i} - \frac{\partial q^k}{\partial q'^i}\frac{\partial p_j}{\partial p'_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial p_k} \left(\frac{\partial p_j}{\partial q'^i}\frac{\partial p_k}{\partial p'_i} - \frac{\partial p_k}{\partial q'^i}\frac{\partial p_j}{\partial p'_i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial p_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\delta^j_k \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^k}\delta^k_j \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j}\frac{\partial}{\partial p_j} \right) \\
&= X_H
\end{aligned}$$

となるので大丈夫です。ハミルトニアン H に対応するベクトル場 X_H をハミルトンベクトル場と呼びます。

[*4] M の各点にベクトルがあるのでベクトル場です。

1.4 ポアソン括弧

ハミルトニアン H にベクトル場

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

が対応するという考えを一般化して、関数 $f : M \to \mathbb{R}$ に対してベクトル場

$$X_f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \tag{3}$$

が対応するとします。X_H と同じく、この対応は正準変数 (q^i, p_i) の選び方に依りません。

関数 $g : M \to \mathbb{R}$ に対する X_f の作用を

$$\{f, g\} = X_f g = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \tag{4}$$

と書いて f, g のポアソン括弧と呼びます[*5]。定義から

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

が成り立つことが分かります。また定義から明らかに

$$\begin{aligned} \{q^i, q^j\} &= 0 \\ \{p_i, p_j\} &= 0 \\ \{p_i, q^j\} &= \delta_i^j \end{aligned}$$

となります。

正準変換の条件はポアソン括弧を使うと

$$\begin{aligned} \{q'^i, q'^j\} &= 0 \\ \{p'_i, p'_j\} &= 0 \\ \{p'_i, q'^j\} &= \delta_i^j \end{aligned}$$

と簡単に書くことができます。これはポアソン括弧が正準変数の選び方に依らないことからも明らかです。

関数 $f : M \to \mathbb{R}$ の時間変化はポアソン括弧を使うと

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}$$

と書くことができます。特に $f = H$ とすれば反対称性から $\{H, H\} = 0$ となるので

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

を得ます。よって、ハミルトニアンは運動の間保存されます。

---

*5 これと逆の符号でポアソン括弧を定義することも多いです。ランダウ=リフシッツ「力学」では、この記事と同じ符号でポアソン括弧を定義しています。

1.5 ラグランジュ形式

物理系をハミルトン形式で表すための簡単な方法として、いったんラグランジュ形式というものにしてからルジャンドル変換によってハミルトン形式を得るというものがあります。

ラグランジュ形式では、ある時刻 t_0 における系の状態は一般化座標 $q^i(t_0)$ とその時間微分 $\dot{q}^i(t_0)$ によって表されます。系はラグランジアンと呼ばれる関数 $L(q^i, \dot{q}^i)$ を用いた微分方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

に従って時間変化します。この方程式をオイラー・ラグランジュ方程式と呼びます[*6]。

運動する粒子などの場合、一般化座標を空間座標として、ラグランジアン L を運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V の差として

$$L = T - V$$

と置くことでラグランジュ形式を得ることができます。

例 1.4: 振り子の運動のラグランジュ形式

例 1.1 で扱った振り子の運動をラグランジュ形式で書いてみましょう。振り子の振れ角を θ とすると、運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

で与えられ、ポテンシャルエネルギーは

$$V = -mgl\cos\theta$$

となります。そこでラグランジアンを

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

としてみます。オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) + mgl\sin\theta = 0$$

となるので、運動方程式

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

が確かに導かれます。

[*6] ラグランジアン $L(q^i, \dot{q}^i)$ の引数と一般化座標 q^i とその時間微分 $\dot{q}^i$ を同じ記号で書く慣習になっているので、分かりにくい式になっています。ラグランジアンの引数を $L(x_1, \cdots, x_{2n})$ のように書けば、この式は $i = 1, \cdots, n$ に対して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{n+i}}(q^1(t), \cdots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \cdots, \dot{q}^n(t))\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}(q^1(t), \cdots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \cdots, \dot{q}^n(t)) = 0$$

と書くことができ、多少は意味が明確になります。

系をラグランジュ形式で書くことができれば、たいていの場合は簡単にハミルトン形式を得ることができます。まず正準運動量を

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

と定義します。p_i は $q^1, \cdots, q^n, \dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^n$ の関数になりますが、これを逆に解いて

$$\dot{q}^i = \dot{q}^i(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$$

とできると仮定します[*7]。このときハミルトニアン H を

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i - L$$

と定義して $q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n$ の関数として表すと、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q^i} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \\
&= -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \\
&= -\dot{p}_i
\end{aligned}$$

および、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}^i + \sum_{j=1}^{n} p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} \\
&= \dot{q}^i
\end{aligned}$$

が成り立つので、確かに正準方程式

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

が満たされます。

例 1.5: 振り子の運動

例 1.4 で求めた振り子の運動のラグランジアン

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

からハミルトニアンを求めます。正準運動量は

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

となるので、$\dot{\theta}$ は

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

[*7] これが可能なとき、ラグランジアン L は非特異であるといいます。

と表せます。ハミルトニアンは

$$
\begin{aligned}
H &= p_\theta \dot{\theta} - \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta \\
&= \frac{1}{2ml^2} p_\theta^2 - mgl\cos\theta
\end{aligned}
$$

となります。

例 1.1 のハミルトニアンとこれは一見異なるように思えますが、$p = \dfrac{p_\theta}{ml^2}$ とし、ハミルトニアンを $H' = \dfrac{H}{ml^2}$ と定義しなおせば

$$
H' = \frac{1}{2} p^2 - \frac{g}{l} \cos\theta
$$

となって一致します。そのため等価ではありますが、ラグランジュ形式から求めたハミルトニアンは力学的エネルギーと一致しているという点では優れています。

2　幾何学の基礎

2.1　多様体

これまで相空間の座標の取り方として正準変数 (q^i, p_i) だけを考えてきましたが、一般化して任意の座標 $(x^1, \cdots, x^n)$ を考えることにします。そのために数学的な枠組みを用意します。

定義 2.1: 微分可能多様体

集合 M の部分集合 U_α と写像 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ の族 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ が次の条件を満たすとする。

(1) 任意の $\alpha \in A$ に対し、φ_α は U_α と $\mathbb{R}^n$ の開集合との全単射である。

(2) 任意の $\alpha, \beta \in A$ に対し、$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ と $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

(3) 任意の $\alpha, \beta \in A$ に対し、$U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ なら、$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^∞ 級写像 (何回でも微分できる写像) である。

(4) 高々可算個の U_α の和集合が M になる。

(5) 任意の $p, q \in M$ に対して、$p, q \in U_\alpha$ を満たす U_α が存在するか、$p \in U_\alpha, q \in U_\beta$ および $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ を満たす U_α, U_β が存在する。

このとき、M は m 次元微分可能多様体であるという。φ_α を局所座標系といい、U_α とのペア $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ を座標近傍という。また $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ を座標近傍系という。

この定義は普通の微分可能多様体の定義とは違う見た目をしていますが、同値な定義です。位相空間を表に出さないためにこの定義にしました。

例 2.2: ユークリッド空間

$\mathbb{R}^n$ はそれ自身が n 次元微分可能多様体になります。実際、$\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を恒等写像とすれば、1 つの座標近傍 $(\mathbb{R}, \mathrm{Id})$ だけで座標近傍系になります。

それぞれの条件について詳しく見ていきましょう。まず条件 (1) における $\mathbb{R}^n$ の開集合の定義を確認しておきます。

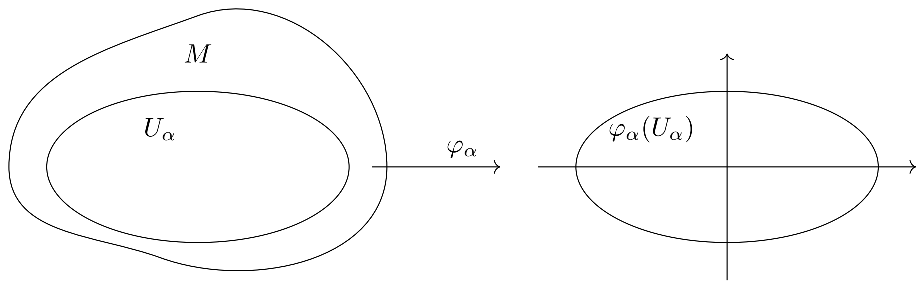
定義 2.3: $\mathbb{R}^n$ の開集合

$\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ を中心とする半径 $r > 0$ の開球を

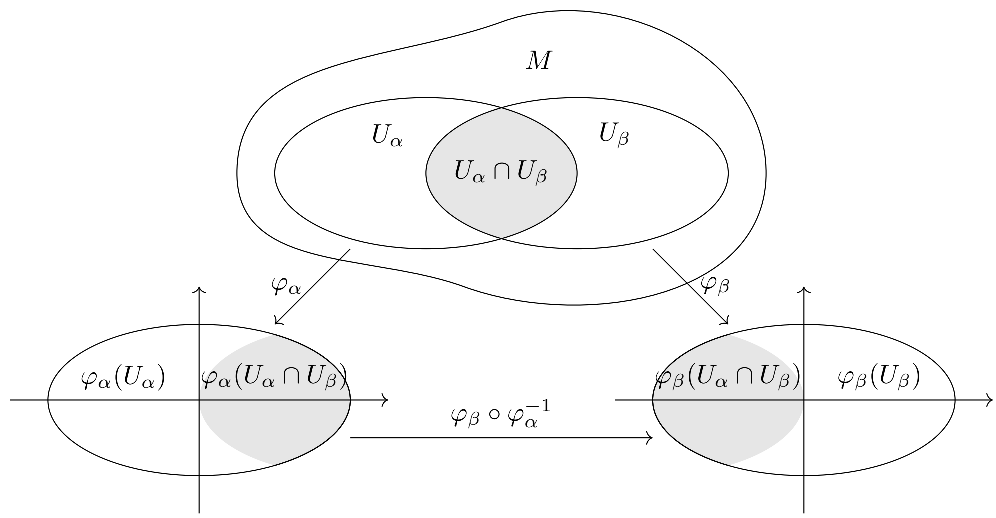
$$B(\boldsymbol{x}_0, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < r\}$$

と定義する。$\mathbb{R}^n$ の部分集合 V が開集合であるとは、任意の点 $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $r > 0$ が存在して $B(\boldsymbol{x}, r) \subset V$ を満たすことをいう。

条件 (1) は U_α が $\mathbb{R}^n$ の開集合と全単射 φ_α で結ばれていることを要求しています。これは $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ が M 上の座標であるということです。



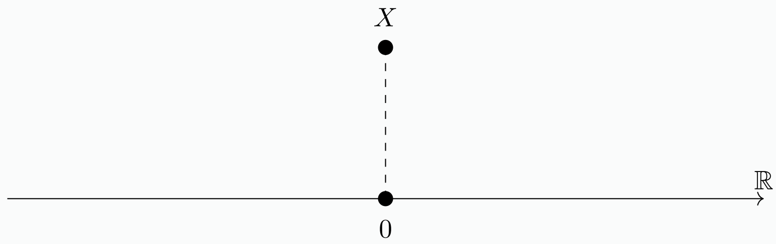
条件 (2) は 2 つの座標近傍 $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ がいい感じに重なっていることを表しています。次の図から分かるように、$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は座標変換を表しているので、条件 (3) は座標変換が滑らかであることを要求しています。



条件 (4) は M 全体が座標で覆われていることおよび、非可算個の座標近傍でしか覆えないような「大きすぎる」空間を除外しています。例えば長い直線というものは条件 (4) 以外を満たしますが、色々と性質が良くないので微分可能多様体とみなしません。

条件 (1) から (4) が満たされているなら、多くの場合で条件 (5) は座標近傍を新しく付け加えることで満たすことができます。例えば異なる 2 点 $p, q \in M$ について $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$ を満たす座標近傍 $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ があるのに $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ であるときは、$U'_\alpha \cap U'_\beta = \varnothing$ を満たす U_α, U_β の部分集合 $U'_\alpha \subset U_\alpha, U'_\beta \subset U_\beta$ を取って $(U'_\alpha, \varphi_\alpha), (U'_\beta, \varphi_\beta)$ を新しい座標近傍として追加できれば条件 (5) を満たせます。しかしどうやっても条件 (5) を満たせない場合もあります。

例 2.4: 2 つの原点を持つ直線



実数直線 $\mathbb{R}$ にもう 1 つの点 $X(X \notin \mathbb{R}$ とします) を加えた $M = \mathbb{R} \cup \{X\}$ を考えます。M の座標近傍 $(\mathbb{R}, \varphi)$ を

$$\varphi(x) = x$$

と定義し、もう 1 つの座標近傍 $((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{X\}, \varphi')$ を

$$\varphi'(x) = \begin{cases} x, & (x \neq X) \\ 0, & (x = X) \end{cases}$$

と定義します。このとき $(\mathbb{R}, \varphi), ((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{X\}, \varphi')$ を座標近傍系とすれば微分可能多様体の条件 (1) から (4) が満たされます。実際、条件 (1)(2)(4) が満たされることは明らかであり、座標変換は

$$\varphi \circ \varphi'^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$$
$$\varphi' \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

となるのでどちらも明らかに C^∞ 級です。

このままでは $0, X$ について条件 (5) が満たされないので新しい座標近傍を付け加えることを考えます。しかし 0 を含む座標近傍と X を含む座標近傍は条件 (1) と条件 (2) のため必ず重なってしまいます。よって条件 (5) を満たすようにすることはできません。

この例から分かるように、条件 (5) は枝分かれしたような空間を除外しています。位相空間の用語を使えば、条件 (5) は微分可能多様体がハウスドルフ空間であることを保証しています。

微分可能多様体の条件について説明したので、ユークリッド空間よりも非自明な例を見てみましょう。

例 2.5: 球面

ユークリッド空間より非自明な例としては、n 次元球面

$$S^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |\boldsymbol{x}| = 1\}$$

があります。S^n は $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合として定義されていることに注意してください。S^0 は $\{-1, +1\}$ であり、S^1 は単位円周です。

S^n の座標近傍系を作ります。まず $k = 1, \cdots, n+1$ に対して

$$U_k^+ = \{\boldsymbol{x} \in S^n \mid x^k > 0\}$$
$$U_k^- = \{\boldsymbol{x} \in S^n \mid x^k < 0\}$$

と定義します。これらを定義域とする局所座標系を

$$\varphi_k^{\pm}: U_k^{+} \to \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{x} \mapsto (x^1, \cdots, x^{k-1}, x^{k+1}, \cdots, x^n)$$

とします。このとき $(U_k^{\pm}, \varphi_k^{\pm})_{k=1,\cdots,n+1}$ が座標近傍系になることを定義 2.1 の条件から確かめましょう。

まず条件 (1) は

$$\varphi_k^{\pm}(U_k^{\pm}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x}| < 1\}$$

が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることから成り立ちます。

条件 (2) は例えば (U_1^+, φ_1^+) と (U_2^+, φ_2^+) の場合、

$$U_1^+ \cap U_2^+ = \{\boldsymbol{x} \in S^n \mid x^1 > 0, x^2 > 0\}$$

より、像

$$\varphi_1^+(U_1^+ \cap U_2^+) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x}| < 1, x^2 > 0\}$$
$$\varphi_2^+(U_1^+ \cap U_2^+) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x}| < 1, x^1 > 0\}$$

がいずれも $\mathbb{R}^n$ の開集合になることから成り立ちます。

条件 (3) も例えば

$$\varphi_2^+ \circ (\varphi_1^+)^{-1}(x^1, \cdots, x^n) = (1 - \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2}, x^3, \cdots, x^n)$$

は $\varphi_1^+(U_1^+ \cap U_2^+)$ 上で C^∞ 級関数なので成り立ちます。

条件 (4) と条件 (5) は明らかです。よって S^n は n 次元微分可能多様体になります。

座標近傍 (U, φ) において、φ の代わりに座標の記号

$$\varphi(p) = (x^1(p), \cdots, x^n(p))$$

を明示して、$(U; x^1, \cdots, x^n)$ と書くこともあります。

$\mathbb{R}^n$ の開集合を局所座標で写すことで、M にも開集合の概念が定義できます。

定義 2.6: 微分可能多様体の開集合

M を n 次元微分可能多様体とする。任意の座標近傍 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ と $\mathbb{R}^n$ の開集合 V に対して、

$$\varphi_\alpha^{-1}(V) = \{p \in U_\alpha \mid \varphi_\alpha(p) \in V\}$$

と表される M の部分集合の全体を $\mathcal{B}(M)$ とする。このとき $\mathcal{B}(M)$ の元の任意個の和集合として表される集合を M の開集合という。空集合 $\varnothing \subset M$ は 0 個の和集合と考えて開集合とする。

微分可能多様体 M の座標近傍 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ に対して $U_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\mathbb{R}^n)$ なので $U_\alpha \in \mathcal{B}(M)$ であり、U_α は M の開集合になります。

例 2.7

2 次元球面 S^2 の部分集合

$$A = \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \mid x^1 > -1/2\}$$

が S^2 の開集合であることを示しましょう。座標近傍系としては例 2.5 のものを取ります。(U_2^+, φ_2^+) に対して $\varphi_2^+(U_2^+ \cap A) \subset \mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ のうち $x^1 > -1/2$ の領域に入り、

$$U_2^+ \cap A = (\varphi_2^+)^{-1}(\{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x^1 > -1/2\})$$

が成り立ちます。よって $U_2^+ \cap A \in \mathcal{B}(S^2)$ となります。同様にして $U_2^- \cap A, U_3^+ \cap A, U_3^- \cap A \in \mathcal{B}(S^2)$ も成り立ち、

$$A = U_1^+ \cup (U_2^+ \cap A) \cup (U_2^- \cap A) \cup (U_3^+ \cap A) \cup (U_3^- \cap A)$$

と表せるので A は S^2 の開集合です。

つまり、座標近傍ごとに $\mathbb{R}^n$ の開集合を移してきたものを $\mathcal{B}(M)$ とし、$\mathcal{B}(M)$ の元を合わせてできる集合を開集合と定義したということです。開集合の基本的な性質は次の命題です。

命題 2.8: 開集合の性質

$\mathbb{R}^m$ または微分可能多様体の開集合について以下の性質が成り立つ。

(1) $\varnothing, M$ は開集合である。
(2) U_1, U_2 が開集合であれば、$U_1 \cap U_2$ は開集合である。
(3) $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が開集合の族であれば、

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

も開集合である。

証明. $\mathbb{R}^n$ の開集合が性質 (1)(2)(3) を満たすことは前提として、微分可能多様体に対して示します。

(1) $\varnothing$ は 0 個の和集合と考えるので開集合です。M が開集合であることは微分可能多様体の条件 (4) から分かります。
(2) U_1, U_2 が開集合であれば $\mathcal{B}(M)$ の元の任意個の和集合として表せるので、$\mathcal{B}(M)$ の部分集合 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ があって

$$U_1 = \bigcup_{B_1 \in \mathcal{B}_1} B_1,\ U_2 = \bigcup_{B_2 \in \mathcal{B}_2} B_2$$

とできます。このとき

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{B_1 \in \mathcal{B}_1} \bigcup_{B_2 \in \mathcal{B}_2} (B_1 \cap B_2)$$

となります。よって $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}(M)$ を示すことができればよいです。

V, W を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし、$B_1 = \varphi_\alpha^{-1}(V), B_2 = \varphi_\beta^{-1}(W)$ と表されるとします。このとき

$$
\begin{aligned}
B_1 \cap B_2 &= \varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W) \\
&= \varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\alpha^{-1}((\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(W)) \\
&= \varphi_\alpha^{-1}(V \cap (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(W))
\end{aligned}
$$

と表すことができ、$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ は微分可能多様体の条件 (3) から C^∞ 級写像になるので $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(W)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であり、$B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}(M)$ となります。

(3) U_λ が $\mathcal{B}(M)$ の部分集合 $\mathcal{B}_\lambda$ によって

$$
U_\lambda = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_\lambda} B
$$

と表されるなら、

$$
\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{B \in \mathcal{B}_\lambda} B
$$

となるのでこれは M の開集合です。

□

開集合の概念から連続写像を定義できます。

定義 2.9: 連続写像・同相写像

微分可能多様体 M, N の間の写像 $F : M \to N$ について、任意の N の開集合 U の逆像

$$
F^{-1}(U) = \{p \in M \mid F(p) \in U\}
$$

が M の開集合であるとき、F は連続であるという。

$F : M \to N$ が全単射であり、F, F^{-1} がともに連続であるとき、F は同相写像であるという。M と N の間に同相写像が存在するとき、M, N は同相であるという。

微分可能多様体と開集合の定義から、局所座標系 $\varphi : U \to \varphi(U)$ は同相写像になります。
$\mathbb{R}^n$ の場合にこの連続の定義がイプシロンデルタ論法における定義と一致することを確かめてみましょう。

例 2.10: 連続の定義

写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が定義 2.9 の意味で連続であるとします。$\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ を任意の点とすると、$\mathbb{R}^n$ の $f(\boldsymbol{x}_0) \in \mathbb{R}^n$ を中心とする半径 $\varepsilon > 0$ の開球 $U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合です。よって f の連続性から $f^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合になります。このとき $\mathbb{R}^m$ の開集合の定義から、$\boldsymbol{x}_0 \in f^{-1}(U)$ を中心とする半径 $\delta > 0$ の開球 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta\}$ が存在して $V \subset f^{-1}(U)$ を満たします。これを論理式で書けば、

$$
\forall \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^m, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m, \quad |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon
$$

となります。これは任意の点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ で $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ がイプシロンデルタ論法における意味で連続であることを表しています。

そこで、微分可能多様体における連続写像の定義はイプシロンデルタ論法における連続写像の定義の自然な一般化になっています。

命題 2.11: 連続写像の合成は連続

M, N, L を微分可能多様体とする。$F : M \to N, G : N \to L$ を連続写像とすると、$G \circ F : M \to L$ は連続である。

証明. 任意の L の開集合 U に対し、G の連続性から $G^{-1}(U)$ は N の開集合です。また F の連続性から $F^{-1}(G^{-1}(U))$ は M の開集合になります。このとき逆像について

$$(G \circ F)^{-1}(U) = F^{-1}(G^{-1}(U))$$

が成立するので $G \circ F$ も連続です。 □

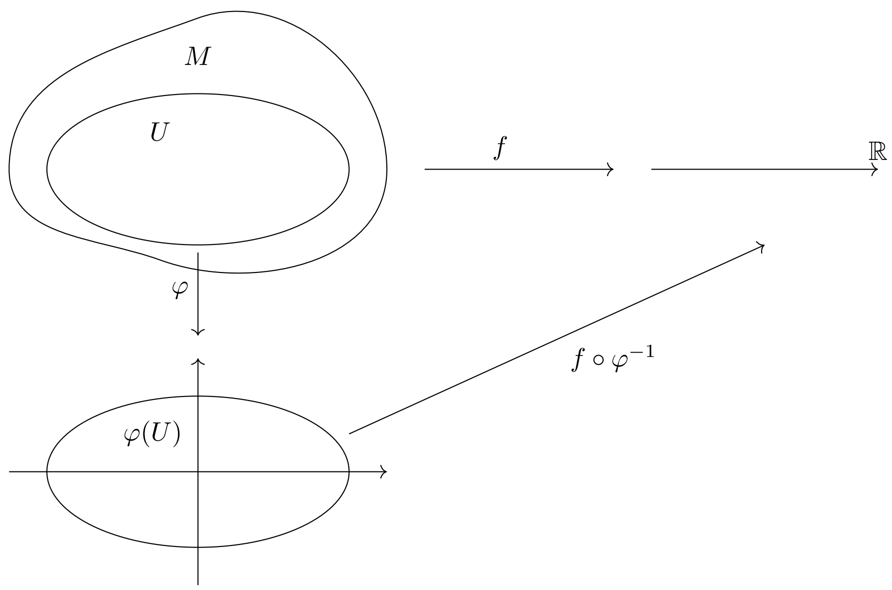
次に多様体上の関数の微分可能性を定義します。

定義 2.12: C^∞ 級関数

微分可能多様体 M 上の実数値関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級関数であるとは、任意の点 $p \in M$ に対して、座標近傍 (U, φ) が存在して $p \in U$ を満たし、局所座標表示

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$$

が C^∞ 級であることをいう。M 上の C^∞ 級関数全体の集合を $C^\infty(M)$ と書く。



この定義では $p \in M$ を含む 1 つの座標近傍 (U, φ) があって $f \circ \varphi^{-1}$ が C^∞ 級であるということしか仮定していませんが、p を含む別の座標近傍 (V, ψ) に対しては $\psi(U \cap V)$ 上で

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$$

が成り立つので、座標変換 $\varphi \circ \psi^{-1}$ が C^∞ 級であることから $f \circ \psi^{-1}$ も C^∞ 級になります。

命題 2.13

C^∞ 級関数 $f : M \to \mathbb{R}$ は連続である。

証明. M の座標近傍系を $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ とします。任意の $\mathbb{R}$ の開集合 V について

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(V \cap \varphi_\lambda(U_\lambda)) \\ &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (f \circ \varphi_\lambda^{-1} \circ \varphi_\lambda)^{-1}(V \cap \varphi_\lambda(U_\lambda)) \\ &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda^{-1}((f \circ \varphi_\lambda^{-1})^{-1}(V \cap \varphi_\lambda(U_\lambda))) \end{aligned}$$

が成り立ちます。$f \circ \varphi_\lambda^{-1}$ は C^∞ 級なので連続であり[*8]、$f^{-1}(V)$ は開集合の和集合になるので M の開集合です。 □

例 2.14

S^1 上の関数 $f : S^1 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x^1, x^2) = x^1$$

とすると C^∞ 級関数になります。実際、局所座標表示は

$$\begin{aligned} f \circ (\varphi_1^{\pm})^{-1}(x) &= \sqrt{1 - x^2} \\ f \circ (\varphi_2^{\pm})^{-1}(x) &= x \end{aligned}$$

となり、全て定義域の上で C^∞ 級関数です。

さらに、多様体の間の写像の微分可能性を同様に定義します。

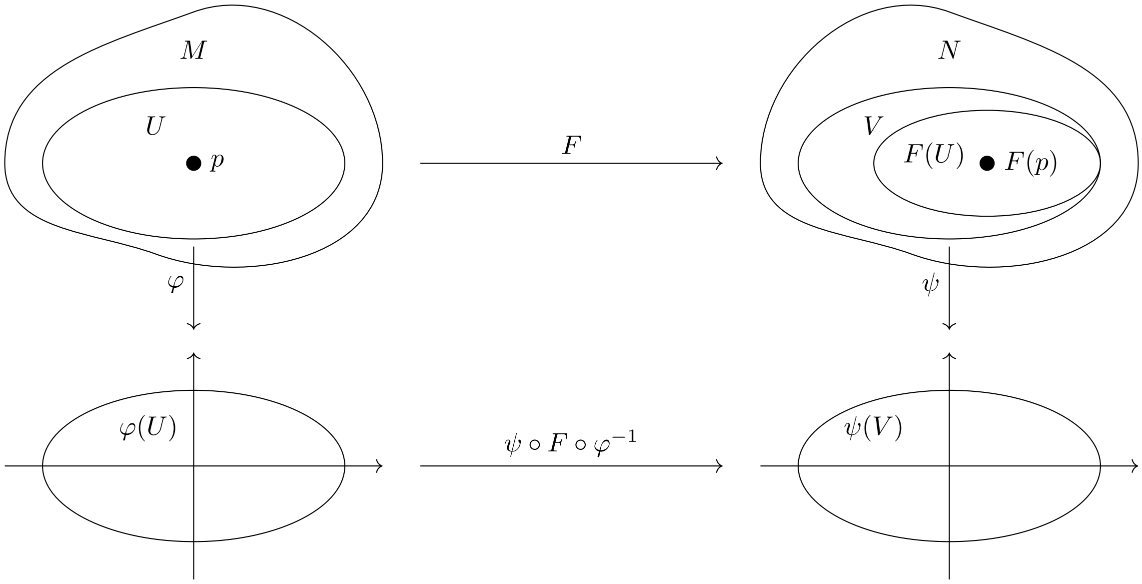
定義 2.15: C^∞ 級写像

微分可能多様体 M, N の間の写像 $F : M \to N$ が C^∞ 級写像であるとは、任意の点 $p \in M$ について、M の座標近傍 (U, φ) と N の座標近傍 (V, ψ) が存在して $p \in U, F(p) \in V$ および $F(U) \subset V$ を満たし、局所座標表示

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

が C^∞ 級であることをいう。

[*8] $f \circ \varphi_\lambda^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が微分可能なら連続であるという事実を使っています。



C^∞ 級関数について述べたことと同様に、この定義では特定の座標近傍 $(U,\varphi),(V,\psi)$ における局所座標表示が C^∞ 級であることしか仮定していませんが、任意の M,N の座標近傍における局所座標表示は C^∞ 級になります。

また $F(U)\subset V$ の条件を満たす $(U,\varphi),(V,\psi)$ は存在しないかもしれないので、φ の $U'\subset U$ を満たす M の開集合 U' への制限 $(U',\varphi|_{U'})$ も座標近傍と認めることにします。

命題 2.16

C^∞ 級写像 $F:M\to N$ は連続である。

証明. $F:M\to N$ が C^∞ 級写像であるということは、M の座標近傍 (U,φ) と N の座標近傍 (V,ψ) が存在して $p\in U, F(p)\in V$ および $F(U)\subset V$ を満たし、$\psi\circ F\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$ が C^∞ 級になるということです。このとき $\psi\circ F\circ\varphi^{-1}$ は連続であり、ψ^{-1},φ も連続なので

$$F|_U=\psi^{-1}\circ(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})\circ\varphi:U\to V$$

も連続である。各点 $p\in M$ を含む開集合 U 上で F が連続なので、$F:M\to N$ も連続です。 □

$F(U)\subset V$ は C^∞ 級写像が連続であることを保証するので重要です。

例 2.17

写像 $F:S^1\to S^2$ を

$$F(x^1,x^2)=(x^1,x^2,0)$$

とすると F は C^∞ 級写像になります。詳細は省略します。

定義 2.18: 微分同相写像

$f : M \to N$ が全単射であり、f, f^{-1} がどちらも C^∞ 級写像であるとき、f は微分同相写像であるという。微分可能多様体 M, N の間に微分同相写像が存在するとき、M, N は微分同相であるという。

C^∞ 級写像は連続なので、微分同相写像は同相写像です。また、局所座標系 $\varphi : U \to \varphi(U)$ は微分同相写像になります。

2.2 接ベクトル

ハミルトン形式で議論したように、接ベクトルは微分演算子として定義することができます。

定義 2.19: 接ベクトル

微分可能多様体 M の点 $p \in M$ における接ベクトルとは、$\mathbb{R}$ 上の線形写像 $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ であって、任意の $f, g \in C^\infty(M)$ に対してライプニッツ則

$$v(fg) = f(p)v(g) + v(f)g(p)$$

を満たすものをいう。点 p における接ベクトル全体の集合を接ベクトル空間といい、T_pM と書く。

接ベクトル空間はその名前の通りベクトル空間です。和とスカラー倍は $v, w \in T_pM, a \in \mathbb{R}$ と $f \in C^\infty(M)$ に対し

$$\begin{aligned}(v + w)(f) &= v(f) + w(f) \\ (av)(f) &= av(f)\end{aligned}$$

とすることで定義します。

接ベクトルの基本的な性質は次の命題です。

命題 2.20

微分可能多様体 M の任意の接ベクトル $v \in T_pM$ について次が成り立つ。

(1) $f \in C^\infty(M)$ が定数関数であれば、$v(f) = 0$ である。
(2) $f, g \in C^\infty(M)$ が $f(p) = g(p) = 0$ を満たすなら $v(fg) = 0$ である。

証明.

(1) 線形性より $f = 1$ である場合に限って証明すれば十分です。このとき $f^2 = f$ なので

$$v(f) = v(f^2) = 2v(f)f(p) = 2v(f)$$

となります。よって $v(f) = 0$ です。

(2) ライプニッツ則から明らかです。

□

点 $p \in M$ における接ベクトルは線形写像 $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ として定義されているので、一見すると点 p から離れた点での関数の値に依存してしまうような気がします。しかし実際には接ベクトルは点 $p \in M$ のまわ

りだけで定まります。

命題 2.21: 接ベクトルは局所的

v を微分可能多様体 M の点 $p \in M$ における任意の接ベクトルとする。2 つの関数 $f, g \in C^\infty(M)$ が p を含む M の開集合の上で $f = g$ を満たすなら、

$$v(f) = v(g)$$

が成り立つ。

証明. $p \in U$ を満たす M の開集合 U 上で $h = 0$ を満たすような関数 $h \in C^\infty(M)$ について $v(h) = 0$ となることを証明すれば、$h = f - g$ とすることで命題が示せます。$\psi \in C^\infty(M)$ を次のような性質を持つ関数だとします[*9]。

(1) M 上で $0 \leq \psi \leq 1$ である。
(2) $\{q \in M \mid \psi(q) > 0\} \subset U$ である。
(3) $\psi(p) = 1$ である。

このとき ψh は M 上で恒等的に 0 になるので $v(\psi h) = 0$ です。ライプニッツ則から

$$0 = v(\psi h) = v(h)\psi(p) + v(\psi)h(p) = v(h)$$

となります。 □

例 2.22

関数 f の座標近傍 (U, φ) における局所座標表示を $(f \circ \varphi^{-1})(x^1, \cdots, x^n)$ とすると、点 $p \in U$ において

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p f = \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^{-1})$$

と定義することで $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ は接ベクトルになります。

実は $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \cdots, \left(\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$ が T_pM の基底になります。まず $\mathbb{R}^n$ の接ベクトル空間についてこれを示します。

命題 2.23

点 $a \in \mathbb{R}^n$ において

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_a, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_a$$

は接ベクトル空間 $T_a\mathbb{R}^n$ の基底になる。

*9 このような関数が存在することは全く自明ではありませんが、ここでは存在を仮定することにします。後で 1 の分割を用いてこのような関数が存在することを示します。

証明. 任意の C^∞ 級関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は、テイラーの定理より C^∞ 級関数 $R_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を用いて

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - a^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) + \sum_{i,j=1}^{n} (x^i - a^i)(x^j - a^j) R_{ij}(x)$$

と展開することができます。右辺第 1 項は定数であり、右辺第 3 項は $x = a$ で消える 2 つの関数の積なので、線形性と命題 2.20 から

$$\begin{aligned} v(f) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) v(x^i - a^i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) v(x^i) \end{aligned}$$

となります。ただし x^i を座標の第 i 成分を値とする関数 $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とみなしています。よって $v^i = v(x^i)$ と置けば

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_a$$

が成り立つので

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_a, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_a$$

は $T_a\mathbb{R}^n$ を張ります。線形独立性は

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_a (x^j) = \delta^i_j$$

から従います。 □

$\mathbb{R}^n$ で示した定理を微分可能多様体 M でも示すために、写像を使って接ベクトルを移す方法を与えます。

定義 2.24: 写像の微分

M, N を微分可能多様体とし、$F : M \to N$ を C^∞ 級写像とする。$p \in M$ に対して $F_{*p} : T_pM \to T_{F(p)}N$ を $v \in T_pM$ と $f \in C^\infty(N)$ に対して

$$(F_{*p}v)(f) = v(f \circ F) \in \mathbb{R}$$

とすることで定義する。F_{*p} を写像 F の微分という。

v が線形性とライプニッツ則を満たすことから、$F_{*p}v$ は確かに $T_{F(p)}M$ の元になります。写像の微分の基本的な性質は次の命題です。

命題 2.25

M, N, L を微分可能多様体とし、$F : M \to N, G : N \to L$ を C^∞ 級写像とする。また $p \in M$ とする。

(1) $F_{*p} : T_pM \to T_{F(p)}M$ は線形写像である。

(2) $(G \circ F)_{*p} = G_{*p} \circ F_{*p}$

(3) $(\mathrm{Id}_M)_{*p} = \mathrm{Id}_{T_pM}$

(4) F が微分同相写像なら F_{*p} はベクトル空間の同型写像であって、$(F_{*p})^{-1} = (F^{-1})_{*p}$ である。

証明.

(1) 自明です。

(2) 任意の $v \in T_pM, f \in C^\infty(M)$ に対し、

$$\begin{aligned}((G \circ F)_{*p}v)(f) &= v(f \circ G \circ F) \\ &= (F_{*p}v)(f \circ G) \\ &= G_{*p}(F_{*p}v)(f)\end{aligned}$$

となるので成り立ちます。

(3) 任意の $v \in T_pM, f \in C^\infty(M)$ に対し、

$$((\mathrm{Id}_M)_{*p}v)(f) = v(f \circ \mathrm{Id}_M) = v(f)$$

となるので成り立ちます。

(4) (2)(3) から $(F_{*p})^{-1} = (F^{-1})_{*p}$ が成り立ち、(1) より F_{*p} はベクトル空間の同型写像です。

□

命題 2.26

n 次元微分可能多様体 M の点 $p \in M$ において、p を含む座標近傍を $(U; x^1, \cdots, x^n)$ とすると

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$$

は接ベクトル空間 T_pM の基底になる。特に T_pM の次元は n である。

証明. 局所座標系 $\varphi : U \to \varphi(U)$ は微分同相写像です。このとき接ベクトルは局所的に定まるので $\varphi_{*p} : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ はベクトル空間の同型写像であり、命題 2.23 から命題が成り立ちます。 □

また、曲線 $c : (a, b) \to M$ が C^∞ 級写像なら、曲線に沿った接ベクトルを定義できます。

定義 2.27: 曲線の接ベクトル

曲線 $c : (a, b) \to M$ が C^∞ 級写像であるとき、C^∞ 級曲線であるという。このとき $t_0 \in (a, b)$ に対して接ベクトル $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=t_0} \in T_{c(t_0)}M$ を、$f \in C^\infty(M)$ に対して

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=t_0} f = \left.\frac{d(f \circ c)}{dt}\right|_{t=t_0}$$

とすることで定義する。これを曲線 c の接ベクトルと呼ぶ。$c'(t_0)$ と書くこともある。

写像の微分と $\mathbb{R}$ の接ベクトル $\left(\dfrac{d}{dt}\right)_{c(t_0)}$ を使えば、

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=t_0} = c_{t_0}\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_{t_0}\right)$$

とも書けます。

例 2.28

曲線 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を

$$c(t) = (\cos t, \sin t)$$

と定義すると C^∞ 級写像になります。c の接ベクトルは $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対して

$$\frac{d(f \circ c)}{dt} = -\sin t \frac{\partial f}{\partial x} + \cos t \frac{\partial f}{\partial y}$$

となることから、

$$c'(t) = -\sin t \frac{\partial}{\partial x} + \cos t \frac{\partial}{\partial y}$$

と表せます。

ところで c は $c : \mathbb{R} \to S^1$ とみなすこともできますが、$c'(t)$ は確かに S^1 に接しています。

2.3 ベクトル場

各点の接ベクトル空間を集めたものを接束といいます。

定義 2.29: 接束

微分可能多様体 M について、

$$TM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\}$$

を M の接束と呼ぶ。

M の座標近傍 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ を用いて、TM の座標近傍 $(U_\alpha \times \mathbb{R}^m, \varphi'_\alpha)$ を

$$\varphi'_\alpha(p, v) = (\varphi_\alpha(p), v^1, \cdots, v^m)$$

と定義することができます。これによって TM は微分可能多様体となります。

定義 2.30: ベクトル場

M を微分可能多様体とする。C^∞ 級写像 $X : M \to TM$ で、任意の点 p に対して

$$X_p \in T_pM$$

を満たすものをベクトル場という。M のベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}(M)$ と書く。

つまり各点 $p \in M$ ごとに p における接ベクトルが滑らかに対応しているものをベクトル場といいます。

例 2.31

例 2.28 で考えた曲線 c の接ベクトルが S^1 上のベクトル場を定義することを示します。関数 $f \in C^\infty(S^1)$ の座標近傍 $(U_1^\pm; \varphi_1^\pm), (U_2^\pm; \varphi_2^\pm)$ における局所座標表示の微分は

$$\frac{d(\varphi_1^\pm \circ f \circ c)}{dt} = \cos t \frac{df}{dx_1^\pm}$$
$$\frac{d(\varphi_2^\pm \circ f \circ c)}{dt} = -\sin t \frac{df}{dx_2^\pm}$$

となるので、

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=t_0} = \cos t_0 \frac{d}{dx_1^\pm} = -\sin t_0 \frac{d}{dx_2^\pm}$$

と表せます。これは t_0 について周期 2π なので、S^1 上の点ごとに 1 つの接ベクトルが定まっており、ベクトル場になります。またこのベクトル場は S^1 上で 0 になりません。

S^1 と違って、S^2 上のベクトル場にはどの点でも 0 にならないものは存在しません。この事実は球面を頭、ベクトル場を髪の毛に見立てて頭には必ずつむじがあると表現されることもあります。

接ベクトルは微分演算子 $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ のことだったので、ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ は写像 $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ とみなすことができます。

定義 2.32: ベクトル場の作用

ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ の関数 $f \in C^\infty(M)$ に対する作用を

$$(Xf)(p) = X_p f$$

と定義する。

接ベクトルの性質から任意の $a, b \in \mathbb{R}$ と $f, g \in C^\infty(M)$ に対して

$$X(af + bg) = a(Xf) + b(Xg)$$
$$X(fg) = f(Xg) + (Xf)g$$

が成り立つことが分かります。逆に、この性質を満たすような写像 $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ は各点において接ベクトルになるのでベクトル場とみなすことができます。

座標近傍 $(U; x^1, \cdots, x^n)$ において、U はそれ自身が微分可能多様体です[*10]。そこで U 上のベクトル場全体の集合 $\mathfrak{X}(U)$ も定義されます。このとき各点ごとの座標基底をつなげてベクトル場 $\dfrac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(U)$ を

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right)(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p f$$

[*10] M の座標近傍系 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ から U の座標近傍系を $(U_\alpha \cap U, \varphi_\alpha|_U)$ として作ることができます。これは後で議論する開部分多様体です。

と定義することができます。このとき任意のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(U)$ は、関数 $X^1, \cdots, X^n \in C^\infty(U)$ を用いて

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{5}$$

と書くことができます[*11]。

別の局所座標 $(U'; x'^1, \cdots, x'^n)$ においては、連鎖律から

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^j}$$

が成立するので、

$$X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X^i \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^j}$$

となります。したがって、$(U'; x'^1, \cdots, x'^m)$ における X の成分は

$$X'^j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} X^i \tag{6}$$

と表せます。物理ではこのように成分が変換することをベクトルの定義として反変ベクトルと呼んでいることが多いですが、幾何学的な観点からするとベクトルの変換則は定義ではなく性質です。

2.4　括弧積とリー代数

2 つのベクトル場 X, Y を順番に作用させても、それはベクトル場になりません。実際、関数 $f, g \in C^\infty(M)$ に対して

$$\begin{aligned} X(Y(fg)) &= X(f(Yg) + (Yf)g) \\ &= f(X(Yg)) + (X(Yf))g + (Xf)(Yg) + (Yf)(Xg) \end{aligned}$$

となるので、後ろの 2 項のせいでベクトル場になる条件を満たしません。しかし X, Y を入れ替えると

$$Y(X(fg)) = f(Y(Xg)) + (Y(Xf))g + (Yf)(Xg) + (Xf)(Yg)$$

となるので、$XY - YX$ とすると余計な項が消えてベクトル場になります。

定義 2.33: 括弧積とリー代数

ベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、関数 f に対する作用

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

で定義されるベクトル場 $[X, Y]$ を X, Y の括弧積と呼ぶ。

偏微分の交換可能性から

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = 0 \tag{7}$$

が成り立つので、座標基底の括弧積は 0 になります。他に次のような性質が成り立ちます。

[*11] 本当は、$X^1, \cdots, X^n$ が C^∞ 級関数になることは証明が必要です。

命題 2.34: 括弧積の性質

任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ の括弧積について次の性質が成り立つ。

(1) (線形性) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$
(2) (交代性)$[X, Y] = -[Y, X]$
(3) (ヤコビ律)$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

証明. 任意の $f \in C^\infty(M)$ に対してそれぞれの右辺と左辺の作用が等しいことを示せばよいです。

(1)

$$\begin{aligned}
[aX + bY, Z]f &= (aX + bY)(Zf) - Z(aXf + bYf) \\
&= a\{X(Zf) - Z(Xf)\} + b\{Y(Zf) - Z(Yf)\} \\
&= a[X, Z]f + b[Y, Z]f
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
[X, Y]f &= X(Yf) - Y(Xf) \\
&= -(Y(Xf) - X(Yf)) \\
&= -[Y, X]f
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&[[X, Y], Z]f + [[Y, Z], X]f + [[Z, X], Y]f \\
&= [X, Y](Zf) - Z([X, Y]f) + [Y, Z](Xf) - X([Y, Z]f) + [Z, X](Yf) - Y([Z, X]f) \\
&= X(Y(Zf)) - Y(X(Zf)) - Z(X(Yf)) + Z(Y(Xf)) + Y(Z(Xf)) - Z(Y(Xf)) \\
&\quad - X(Y(Zf)) + X(Z(Yf)) + Z(X(Yf)) - X(Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Y(X(Zf)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

括弧積が満たす性質を一般化してリー代数が定義されます。

定義 2.35: リー代数

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 L 上の 2 項演算 $[\cdot, \cdot] : L \times L \to L$ が任意の $X, Y, Z \in L$ に対して次の条件を満たすとする。

(1) (線形性) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$
(2) (交代性)$[X, Y] = -[Y, X]$
(3) (ヤコビ律)$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

このとき、L はリー代数であるといい、$[,]$ をリー括弧と呼ぶ。

よって、$\mathfrak{X}(M)$ は括弧積をリー括弧としてリー代数になります。他のリー代数の例としては、$\mathbb{R}^3$ はクロス積 $\times$ をリー括弧としてリー代数になります。

またリー代数の構造を保つ写像として、リー代数の準同型が定義されます。

定義 2.36: リー代数の準同型

リー代数 L, L' の間の線形写像 $h : L \to L'$ が任意の $X, Y \in L$ に対して

$$h([X, Y]) = [h(X), h(Y)]$$

を満たすとき、h はリー代数の準同型であるという。

括弧積が写像の微分に対して満たす性質を考えます。

定義 2.37: F–関係

M, N を微分可能多様体とし、$F : M \to N$ を C^∞ 級とする。ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M), Y \in \mathfrak{X}(N)$ が F–関係にあるとは、任意の点 $p \in M$ において

$$Y_{F(p)} = F_{*p}(X_p)$$

が成り立つことをいう。

C^∞ 級写像 $F : M \to N$ は単射であるとも全射であるとも限らないので、このように定義するしかありません。写像の微分の定義から、$X \in \mathfrak{X}(M), Y \in \mathfrak{X}(N)$ が F–関係にあることは任意の関数 $f \in C^\infty(N)$ に対して

$$Y f \circ F = X(f \circ F)$$

が成り立つことと言い換えられます。

命題 2.38: 括弧積の自然性

M, N を微分可能多様体とし、$F : M \to N$ を C^∞ 級とする。ベクトル場 $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ と $Y_i \in \mathfrak{X}(N)$ が $i = 1, 2$ についてそれぞれ F–関係にあるとすると、$[X_1, X_2]$ と $[Y_1, Y_2]$ も F–関係にある。

証明. 任意の点 $p \in M$ と関数 $f \in C^\infty(N)$ に対して

$$\begin{aligned} Y_1(Y_2 f) \circ F &= X_1(Y_2 f \circ F) \\ &= X_1(X_2(f \circ F)) \end{aligned}$$

となるので、

$$[Y_1, Y_2] f \circ F = [X_1, X_2](f \circ F)$$

が成り立ちます。 □

2.5 積分曲線とフロー

ハミルトン形式において、状態を表す点がハミルトンベクトル場によって「流される」という表現を使いました。このような状況を数学的に表すのが積分曲線とフローです。以降の定義において、I は $\mathbb{R}$ の開区間であるとします。

定義 2.39: 積分曲線

微分可能多様体 M 上の C^∞ 級曲線 $c: I \to M$ がベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ の積分曲線であるとは、任意の $t \in I$ において

$$c'(t) = X_{c(t)}$$

が成り立つことをいう。また $0 \in I$ であるとき、c は点 $p = c(0)$ から始まる積分曲線であるという。

任意の点 $p \in M$ とベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、p から始まる X の積分曲線が存在します。

命題 2.40: 積分曲線の存在

微分可能多様体 M 上の任意の点 $p \in M$ とベクトル場 $\mathfrak{X}(M)$ に対して、$\varepsilon > 0$ と p から始まる積分曲線 $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ が存在する。

証明. p を含む M の座標近傍 $(U; x^1, \cdots, x^n)$ において、C^∞ 級曲線 c とベクトル場 X を

$$c'(t) = \sum_{i=1}^{n} c^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t)}$$
$$X_{c(t)} = \sum_{i=1}^{n} X^i(c(t)) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t)}$$

と局所座標表示すると、c が積分曲線である条件は連立常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dc^1}{dt}(t) &= X^1(c^1(t), \cdots, c^n(t)) \\ &\vdots \\ \frac{dc^n}{dt}(t) &= X^n(c^1(t), \cdots, c^n(t)) \end{aligned}$$

になります。よって常微分方程式の解の存在定理から積分曲線 c は存在します。 $\square$

積分曲線をベクトル場による物理的な状態の変化とみなしたいですが、積分曲線の存在は開区間 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ でだけ保証されていて、$(-\infty, \infty)$ で保証されているわけではないことが気になります。まず $(-\infty, \infty)$ を定義域とする積分曲線が存在する例を挙げます。

例 2.41

$\mathbb{R}^2$(座標の記号を q, p とします) 上のベクトル場

$$X = p\frac{\partial}{\partial q} - q\frac{\partial}{\partial p}$$

を考えます。これは調和振動子のハミルトニアン $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$ に対応するハミルトンベクトル場です。X の積分曲線 $c(t) = (q(t), p(t))$ を決定する方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= p(t) \\ \frac{dp}{dt} &= -q(t) \end{aligned}$$

です。解は $c(0) = (q_0, p_0)$ と置くと

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 \cos t + p_0 \sin t \\ p(t) &= -q_0 \sin t + p_0 \cos t \end{aligned}$$

となります。この曲線は任意の $t \in (-\infty, \infty)$ で定義されており、軌跡は $q_0 = p_0 = 0$ のときは $(0, 0)$ に留まる曲線となり、それ以外の場合は円

$$q^2 + p^2 = q_0^2 + p_0^2$$

になります。

次に積分曲線が延長できない例を挙げます。

例 2.42

3 次元空間でポテンシャル

$$V(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{r}$$

に従って運動する粒子を考えます。高校でも習うように、たいてい粒子の軌道は原点を焦点とする楕円になります (ケプラーの第 1 法則)。しかし角運動量が 0 の場合、粒子は原点に向かって落下し、有限の時間で原点に到達します。

積分曲線の話にすると、$M = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 \mid q > 0\}$ 上のベクトル場

$$X = p\frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{q^2}\frac{\partial}{\partial p}$$

の積分曲線の定義域を $(-\infty, \infty)$ に延長できないということです。

初期条件が $t = 0$ で $p = 0$ である場合は、原点に到達する時刻を簡単に求めることができます。落下運動を楕円軌道の角運動量を 0 に近づけたものだと考えると、ケプラーの第 3 法則から落下時間は半径 $r = q/2$ の円運動の周期の半分と等しいことが分かります。円運動の速度を v とすると

$$\frac{v^2}{r} = \frac{1}{r^2}$$

が成り立つので $v = 1/\sqrt{r}$ であり、周期の半分は

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi r}{v} = \pi r^{3/2} = \pi \left(\frac{q}{2}\right)^{3/2}$$

となります。よって、積分曲線の定義域は $(-T/2, T/2)$ までしか延長することができません。

積分曲線は 1 つの状態がどのように時間変化するかを表すものでした。別の見方として、時間を進めたとき全ての状態がどう変化するかを表すのがフローです。

定義 2.43: フロー

M を微分可能多様体とする。開集合 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times M$ がフロー領域であるとは、各点 $p \in M$ に対し $\mathcal{D}^{(p)} = \{t \in \mathbb{R} \mid (t,p) \in \mathcal{D}\}$ が 0 を含む開区間であることをいう。

M 上のフローとは、フロー領域 $\mathcal{D}$ を定義域とする C^∞ 級写像 $\theta : \mathcal{D} \to M$ であって、次の条件を満たすものをいう。

(1) 任意の $p \in M$ に対し $\theta(0,p) = p$ である。
(2) 任意の $p \in M, s \in \mathcal{D}^{(p)}, t \in \mathcal{D}^{(\theta(s,p))}$ に対し $\theta(t, \theta(s,p)) = \theta(t+s, p)$ である。

点 $p \in M$ を固定すると、$\theta^{(p)}(t) = \theta(t,p)$ は C^∞ 級曲線になります。これにより、フローに対してベクトル場を定義できます。

定義 2.44: 無限小生成子

フロー $\theta : \mathcal{D} \to M$ の無限小生成子 X とは、各点 $p \in M$ に対して

$$X_p = \frac{d\theta^{(p)}}{dt}\bigg|_{t=0}$$

で定まるベクトル場のことをいう。

フローの無限小生成子が滑らかになることは証明すべきことですが、省略します。

命題 2.45

フロー $\theta : \mathcal{D} \to M$ の無限小生成子を $X \in \mathfrak{X}(M)$ とする。任意の点 $p \in M$ に対し、C^∞ 級曲線 $\theta^{(p)} : \mathcal{D}^{(p)} \to M$ は X の積分曲線になる。

証明. 証明すべきことは、任意の $p \in M$ と $t_0 \in \mathcal{D}^{(p)}$ に対して

$$X_{\theta^{(p)}(t_0)} = \frac{d\theta^{(p)}}{dt} bigg|_{t=t_0}$$

が成り立つということです。$q = \theta^{(p)}(t_0)$ と置くと、任意の $|t| < \varepsilon$ が $t + t_0 \in \mathcal{D}^{(p)}$ と $t \in \mathcal{D}^{(q)}$ を満たすような実数 $\varepsilon > 0$ をとることができます[*12]。このとき任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$\begin{aligned} X_q f &= \theta^{(q)\prime}(0) f \\ &= \frac{d}{dt} f(\theta^{(q)}(t)) \\ &= \frac{d}{dt} f(\theta^{(p)}(t_0 + t)) \\ &= \theta^{(p)\prime}(t_0) f \end{aligned}$$

となるので $X_{\theta^{(p)}(t_0)} = \theta^{(p)\prime}(t_0)$ が成り立ちます。 □

この命題の逆も成り立ちます。つまり、ベクトル場 V の積分曲線を各点で集めることで、無限小生成子が V であるようなフローを得ることができます。この事実を詳しい証明を省略して次の定理として述べておきます。

[*12] フロー領域の定義から可能です。

定理 2.46

微分可能多様体 M 上のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、X を無限小生成子とするフロー $\theta : \mathcal{D} \to M$ であって、フロー領域 $\mathcal{D}$ をそれ以上に拡張することができないものが一意に存在する。これを X が生成するフロー、あるいは単に X のフローという。

特別なベクトル場に対しては、フロー領域を $\mathbb{R} \times M$ まで拡張することができます。

定義 2.47: 大域フロー・完備なベクトル場

フロー領域が $\mathbb{R} \times M$ であるようなフロー $\theta : \mathbb{R} \times M \to M$ は大域フローであるという。大域フローを生成するようなベクトル場は完備であるという。

例えば例 2.41 のベクトル場は完備です。

2.6 リー微分

ベクトル場が生成するフローを使って微分を定義することができます。

定義 2.48

フロー $\theta : \mathcal{D} \to M$ について、

$$M_t = \{p \in M \mid (t, p) \in \mathcal{D}\}$$

と置くと M_t は M の開集合である。このとき $\theta_t : M_t \to M$ を

$$\theta_t(p) = \theta(t, p)$$

と定義する。

つまり θ_t は時間を t だけ進める写像です。フローの条件から

$$\theta_t \circ \theta_{-t} = \mathrm{Id},\ \ \theta_{-t} \circ \theta_t = \mathrm{Id}$$

が成立するので、θ を使って点 $\theta_t(p)$ と点 p での値を比較することができます。

定義 2.49: 関数のリー微分

$X \in \mathfrak{X}(M)$ が生成するフローを θ とする。このとき $f \in C^\infty(M)$ の X によるリー微分 $L_X f \in C^\infty(M)$ を各点 $p \in M$ で

$$(L_X f)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\theta_t(p)) - f(p)}{t}$$

と定義する。

関数のリー微分の定義は

$$(L_X f)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\theta^{(p)}(t)) - f(\theta^{(p)}(0))}{t} = \theta^{(p)\prime}(0)$$

と書き換えることができ、θ の無限小生成子は X なので

$$L_X f = Xf$$

が成り立ちます。よって関数のリー微分は新しいものではありません。

次に写像の微分を使ってベクトル場のリー微分を定義します。

定義 2.50: ベクトル場のリー微分

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ とし、X が生成するフローを θ とする。このとき Y の X によるリー微分 $L_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ を各点 $p \in M$ で

$$(L_X Y)_p = \lim_{t \to 0} \frac{(\theta_{-t})_{*\theta_t(p)} Y_{\theta_t(p)} - Y_p}{t}$$

とすることで定義する。

実はベクトル場のリー微分も新しいものではなく、括弧積と同じです。

命題 2.51: リー微分は括弧積

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $L_X Y = [X, Y]$ が成り立つ。

証明. X が生成するフローを θ とします。任意の $p \in M$ について

$$(\theta_t^* Y)_p = (\theta_{-t})_{*\theta_t(p)} Y_{\theta_t(p)}$$

と書くことにします。写像の微分の定義から任意の $f \in C^\infty(M)$ について

$$\begin{aligned}
(\theta_t^* Y)_p (f \circ \theta_t) &= Y_{\theta_t(p)} (f \circ \theta_t \circ \theta_{-t}) \\
&= Y_{\theta_t(p)} f \\
&= (Yf)(\theta_t(p))
\end{aligned}$$

が成り立ちます。このとき

$$\begin{aligned}
\{X(Yf)\}(p) &= L_X(Yf) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(Yf)(\theta_t(p)) - (Yf)(p)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(\theta_t^* Y)_p (f \circ \theta_t) - Y_p f}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(\theta_t^* Y)_p (f \circ \theta_t) - (\theta_t^* Y)_p f + (\theta_t^* Y)_p f - Y_p f}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} (\theta_t^* Y)_p \frac{f \circ \theta_t - f}{t} + \lim_{t \to 0} \frac{(\theta_t^* Y)_p - Y_p}{t} f \\
&= Y_p (L_X f) + (L_X Y)_p f \\
&= (Y(Xf) + (L_X Y) f)(p)
\end{aligned}$$

となるので、$L_X Y = XY - YX = [X, Y]$ を得ます。 □

リー微分が通常の微分と同じように定義されていることから、ライプニッツ則が成り立ちます。

命題 2.52: リー微分のライプニッツ則

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ と $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$L_X(fY) = [X, fY] = (Xf)Y + fL_XY$$

が成り立つ。

証明. 任意の $g \in C^\infty(M)$ に対して

$$\begin{aligned}[X, fY]g &= X(fYg) - fY(Xg) \\ &= (Xf)g + fX(Yg) - fY(Xg) \\ &= (Xf)g + f[X, Y]g\end{aligned}$$

となります。 □

リー微分 L_XY は X が生成するフローを θ としたときの $t = 0$ における $(\theta_{-t})_{*\theta_t(p)}Y_{\theta_t(p)}$ の微分係数として定義されていますが、これを用いて他の t における微分係数を求めることもできます。

命題 2.53

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ とし、X が生成するフローを $\theta : \mathcal{D} \to M$ とする。任意の $(t_0, p) \in \mathcal{D}$ について

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (\theta_{-t})_{*\theta_t(p)}Y_{\theta_t(p)} = (\theta_{-t_0})_{*\theta_{t_0}(p)}((L_XY)_{\theta_{t_0}(p)})$$

が成り立つ。

証明. $p \in M$ について、写像 $v : \mathcal{D}^{(p)} \to T_pM$ を

$$v(t) = (\theta_{-t})_{*\theta_t(p)}Y_{\theta_t(p)}$$

と定義します。このとき、

$$\begin{aligned}v'(t_0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} v(t) \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} v(t_0 + s) \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\theta_{-t_0-s})_{*\theta_{t_0+s}(p)}Y_{\theta_{t_0+s}(p)} \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\theta_{-t_0})_{*\theta_{t_0}(p)}\left((\theta_{-s})_{*\theta_s(\theta_{t_0}(p))}Y_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))}\right) \\ &= (\theta_{-t_0})_{*\theta_{t_0}(p)}\left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\theta_{-s})_{*\theta_s(\theta_{t_0}(p))}Y_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))}\right) \\ &= (\theta_{-t_0})_{*\theta_{t_0}(p)}((L_XY)_{\theta_{t_0}(p)})\end{aligned}$$

となります。ただし $(\theta_{-t_0})_{*\theta_{t_0}(p)} : T_{\theta_{t_0}(p)}M \to T_pM$ が線形写像なので、微分 $\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}$ と交換できることを用いました。 □

定義 2.54

$X \in \mathfrak{X}(M)$ がフロー $\theta : \mathcal{D} \to M$ について不変であるとは、任意の $(t,p) \in \mathcal{D}$ について

$$(\theta_t)_{*p}(X_p) = X_{\theta_t(p)}$$

が成り立つことをいう。

命題 2.55

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ とすると次の 2 つは同値である。

(1) $[X, Y] = 0$
(2) X が生成するフロー θ について Y が不変である。

証明. $[X, Y] = 0$ のとき、命題 2.53 から $(\theta_{-t})_{*\theta_t(p)} Y_{\theta_t(p)} = Y_p$ が成り立ちます。よって Y は θ について不変です。

逆に X が生成するフロー θ について Y が不変であれば、リー微分の定義から $L_X Y = [X, Y] = 0$ となります。 □

2.7 余接ベクトル

接ベクトルをとって実数を返す線形写像を余接ベクトルといいます。

定義 2.56: 余接ベクトル

微分可能多様体 M の点 $p \in M$ における余接ベクトルとは、接ベクトル空間上 T_pM の実数値関数 $\xi : T_pM \to \mathbb{R}$ であって、任意の $a, b \in \mathbb{R}$ と $v, w \in T_pM$ に対して

$$\xi(av + bw) = a\xi(v) + b\xi(w)$$

を満たすものをいう。点 p における余接ベクトル全体の集合を余接ベクトル空間といい、T_p^*M と書く。

例 2.57

座標基底 $(U; x^1, \cdots, x^n)$ の点 $p \in U$ における任意の接ベクトル $v \in T_pM$ は

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

と書けます。このとき

$$(dx^i)_p(v) = v^i$$

と定めると $(dx^i)_p$ は余接ベクトルになります。この定義は

$$(dx^i)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right) = \delta^i_j$$

と書くこともできます。

命題 2.58

座標基底 $(U;x^1,\cdots,x^n)$ の点 $p\in U$ において

$$(dx^1)_p,\cdots,(dx^n)_p$$

は余接ベクトル空間 T_p^*M の基底になる。これを座標基底の双対基底という。

証明. 点 $p\in U$ における任意の接ベクトル $v\in T_pM$ を

$$v=\sum_{i=1}^n v^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

と書くと、余接ベクトル $\xi\in T_p^*M$ の作用は

$$\xi(v)=\sum_{i=1}^n v^i\xi\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right)$$

となるので、ξ は座標基底の値だけで定まります。そこで

$$\xi_i=\xi\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right)$$

と置けば、v^i は $(dx^i)_p$ によって取り出せるので

$$\xi=\sum_{i=1}^n \xi_i(dx^i)_p$$

という表示ができます。ξ_i を ξ の成分と呼びます。したがって $(dx^i)_p$ は T_p^*M の基底になります。 □

接束と同じように、余接束を定義することができます。

定義 2.59: 余接束

微分可能多様体 M について、

$$T^*M=\{(p,\xi)\mid p\in M,\xi\in T_p^*M\}$$

を M の余接束と呼ぶ。

接束 TM と同様に、余接束 T^*M も微分可能多様体になります。余接ベクトル場も定義されます。

定義 2.60: 余接ベクトル場

M を微分可能多様体とする。C^∞ 級写像 $\phi:M\to T^*M$ で、任意の点 p に対して

$$\phi_p\in T_p^*M$$

を満たすものを余接ベクトル場という。

余接ベクトルが接ベクトルから実数を得る線形写像だったので、余接ベクトル場はベクトル場から関数を得る線形写像になります。余接ベクトル場 ϕ と関数 $f,g\in C^\infty(M)$、ベクトル場 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\phi(fX+gY)=f\phi(X)+g\phi(Y)\in C^\infty(M)$$

が成立します。逆に、この性質を満たす写像 $\phi : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ は各点で余接ベクトルになるので余接ベクトル場とみなすことができます。

関数から余接ベクトル場を作ることができます。

定義 2.61: 全微分

関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して余接ベクトル場をベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対する作用を

$$(df)(X) = Xf$$

と定めることで定義する。df を f の全微分という。

座標近傍 $(U; x^1, \cdots, x^n)$ において、関数 $x^i \in C^\infty(U)$ の全微分 dx^i は、

$$(dx^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$$

を満たします。よって dx^i は余接ベクトル $(dx^i)_p \in T^*_p M$ を集めたものと一致します。

任意のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ は座標近傍 $(U; x^1, \cdots, x^n)$ 上で式 (5) のように展開できるので、U 上の余接ベクトル場 ϕ は

$$\phi(X) = \sum_{i=1}^n X^i \phi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

と展開できます。dx^i を使うとベクトル場 X の成分 X^i を取り出すことができるので、

$$\phi_i = \phi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

と置くことで

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i dx^i$$

と書けます。

別の局所座標 $(U'; x'^1, \cdots, x'^n)$ では、連鎖律から

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

となるので、$(U'; x'^1, \cdots, x'^n)$ における ϕ の成分は

$$\begin{aligned}
\phi'_i &= \phi\left(\frac{\partial}{\partial x'^i}\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \phi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \phi_j
\end{aligned}$$

と書けます。ベクトル場の成分の変換則とは形が違っています。物理ではこの変換則を共変ベクトルの定義とすることが多いです。

関数 f の全微分 df の局所座標表示は、成分が

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

となるので、

$$df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$$

となります。

2.8 微分形式

余接ベクトル場は 1 つのベクトル場から C^∞ 級関数を得る写像でした。これを一般化した複数のベクトル場をとって C^∞ 級関数を得る写像が微分形式です。

定義 2.62: 微分形式

k 個のベクトル場をとって C^∞ 級関数を返す写像 $\phi:\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$ が、交代性

$$\phi(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_j,\cdots,X_k)=-\phi(X_1,\cdots,X_j,\cdots,X_i,\cdots,X_k),\qquad(1\le i<j\le k)$$

および多重線形性

$$\begin{aligned}&\phi(X_1,\cdots,fX_i+gX_i',\cdots,X_k)\\&=f\phi(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_k)+g\phi(X_1,\cdots,X_i',\cdots,X_k),\quad(f,g\in C^\infty(M),i=1,\cdots,k)\end{aligned}$$

を満たすとき、ϕ は k 次微分形式であるという。M 上の k 次微分形式全体の集合を $\Omega^k(M)$ と書く。また $\Omega^0(M)=C^\infty(M)$ とする。つまり関数は 0 次微分形式とみなす。

定義から 1 次微分形式は余接ベクトル場と同じです。多重線形性の定義では関数 f,g を係数としていることに注意してください。

2 つの微分形式から新しい微分形式を作ることができます。

定義 2.63: ウェッジ積

$\phi\in\Omega^k(M),\psi\in\Omega^l(M)$ に対して

$$(\phi\wedge\psi)(X_1,\cdots,X_{k+l})=\frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}(\operatorname{sgn}\sigma)\phi(X_{\sigma(1)},\cdots,X_{\sigma(k)})\psi(X_{\sigma(k+1)},\cdots,X_{\sigma(k+l)})$$

として $\phi\wedge\psi\in\Omega^{k+l}(M)$ を定義する。ただし S_{k+l} は $k+l$ 個の置換全体の集合である。$\phi\wedge\psi$ を ϕ,ψ のウェッジ積という。

ウェッジ積の定義の係数を $\dfrac{1}{k!l!}$ ではなく $\dfrac{1}{(k+l)!}$ とする流儀もあるので注意してください。ウェッジ積については次の基本的な性質が成り立ちます。

命題 2.64

任意の $\phi \in \Omega^k(M), \psi \in \Omega^l(M), \chi \in \Omega^m(M)$ および $a, b \in \mathbb{R}$ に対して次が成り立つ。

(1) $(a\phi + b\psi) \wedge \chi = a\phi \wedge \chi + b\psi \wedge \chi$
(2) $\phi \wedge \psi = (-1)^{kl}\psi \wedge \phi$
(3) $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi = \phi \wedge (\psi \wedge \chi)$

証明は置換の符号について考えるだけなので省略します。

具体的に座標近傍 $(U; x^1, \cdots, x^n)$ における表示を見てみましょう。ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(U)$ は $X^1, \cdots, X^n \in C^\infty(M)$ を使って式 (5) のように展開できるので、多重線形性から $\phi \in \Omega^k(U)$ は関数

$$\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) \in C^\infty(U)$$

によって定まります。さらに交代性から $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m$ のものだけ考えればよいです。ベクトル場の成分は dx^i によって取り出すことができるので、$\phi_{i_1,\cdots,i_k} \in C^\infty(U)$ を用いて

$$\phi = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \phi_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

と展開できることが分かります。

この表示から明らかなように、$m+1$ 次以上の微分形式は交代性のため 0 になってしまいます。$0 \leq k \leq m$ のときは、${}_mC_k$ 個の $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} (i_1 < \cdots < i_k)$ によって展開されます。

2.9 外微分

全微分は 0 次微分形式から 1 次微分形式を得る操作とみなすことができます。これを一般化して k 次微分形式から $k+1$ 次微分形式を得る方法を考えましょう。$\phi \in \Omega^k(M)$ を使って $X_1, \cdots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ から $C^\infty(M)$ を得る方法としては、

$$X_1\{\phi(X_2, \cdots, X_{k+1})\} \in C^\infty(M)$$

とすることが考えられます。交代性を満たすためにはこれを組み合わせて

$$d_1\phi(X_1, \cdots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i\{\phi(X_1, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, X_{k+1})\}$$

とすればよいでしょう。$\widehat{X_i}$ は X_i を除くという意味です。

しかしこれは多重線形性を満たしていません。実際、X_1 を $f \in C^\infty(M)$ 倍すると

$$\begin{aligned}
&d_1\phi(fX_1, X_2, \cdots, X_{k+1}) \\
&= fX_1\{\phi(X_2, \cdots, X_{k+1})\} + \sum_{i=2}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i\{\phi(fX_1, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, X_{k+1})\} \\
&= fd_1\phi(X_1, \cdots, X_{k+1}) + \sum_{i=2}^{k+1}(-1)^{i+1}(X_i f)\phi(fX_1, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, X_{k+1})
\end{aligned}$$

と余計な項が出てしまいます。

そこで別の方法を考えてみます。括弧積を使ってベクトル場の個数を減らして

$$\phi([X_1, X_2], X_3, \cdots, X_{k+1}) \in C^\infty(M)$$

としてみましょう。交代性を満たすためには

$$d_2\phi(X_1, \cdots, X_{k+1}) = \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \phi([X_i, X_j], X_1, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, \widehat{X_j}, \cdots, X_{k+1})$$

とすればよいです。

しかしこれも多重線形性を満たしていません。実際、X_1 を $f \in C^\infty(M)$ 倍すると

$$\begin{aligned}
&d_2\phi(fX_1, X_2, \cdots, X_{k+1}) \\
&= \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^{j+1} \phi([fX_1, X_j], X_2, \cdots, \widehat{X_j}, \cdots, X_{k+1}) \\
&\quad + \sum_{2 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \phi([X_i, X_j], fX_1, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, \widehat{X_j}, \cdots, X_{k+1}) \\
&= \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^{j+1} \phi(f[X_1, X_j] - (X_j f)X_1, X_2, \cdots, \widehat{X_j}, \cdots, X_{k+1}) \\
&\quad + \sum_{2 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \phi([X_i, X_j], fX_1, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, \widehat{X_j}, \cdots, X_{k+1}) \\
&= f d_2\phi(X_1, \cdots, X_{k+1}) - \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^{j+1} (X_j f) \phi(X_1, X_2, \cdots, \widehat{X_j}, \cdots, X_{k+1})
\end{aligned}$$

となって余計な項が出ます。ですが、よく見るとこの項は $d_1\phi$ の方に出てきた余計な項の符号を変えたものになっています。そこで、$d_1\phi + d_2\phi$ とすれば多重線形性が満たされ $k+1$ 次微分形式になります。

定義 2.65: 外微分

写像 $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ を、$\phi \in \Omega^k(M)$ と $X_1, \cdots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned}
d\phi(X_1, \cdots, X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i\{\phi(X_1, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, X_{k+1})\} \\
&+ \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \phi([X_i, X_j], X_1, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, \widehat{X_j}, \cdots, X_{k+1})
\end{aligned}$$

とすることで定義する。d を外微分という。ただし $k = 0$ のときは全微分 df を $f \in C^\infty(M)$ の外微分とする。

例えば $k = 1$ のときは、$\phi \in \Omega^1(M)$ に対して

$$d\phi(X_1, X_2) = X_1\{\phi(X_2)\} - X_2\{\phi(X_1)\} - \phi([X_1, X_2])$$

となります。

命題 2.66: 外微分の局所座標表示

座標近傍 $(U; x^1, \cdots, x^n)$ において $f \in C^\infty(U)$ とすると、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} d(f dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_k}) &= df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_k} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_k} \end{aligned}$$

証明. 座標基底は U 上の任意のベクトル場を展開できるので、引数が $\dfrac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^{i_{k+1}}}$ である場合に限って示せばよいです。また交代性から $i_1 < \cdots < i_k$ および $j_1, \cdots, j_{k+1}$ の場合に限っても問題ありません。このとき外微分とウェッジ積の定義および括弧積の性質から

$$\begin{aligned} & d(f dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_k}) \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{k+1}}} \right) \\ &= \begin{cases} (-1)^{l+1} \dfrac{\partial f}{\partial x^{j_l}}, & \{i_1, \cdots, i_k\} \cup \{j_l\} = \{j_1, \cdots, j_{k+1}\} \\ 0, & \text{(otherwise)} \end{cases} \\ &= (df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_k}) \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{k+1}}} \right) \end{aligned}$$

となります。したがって $d(f dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_k}) = df \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots dx^{j_k}$ が成り立ちます。 □

例 2.67: 外微分と grad, rot, div

$\mathbb{R}^3$ 上の微分形式においては、外微分とベクトル解析に出てくる grad, rot, div の間に対応があります。例えば $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ に対して

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

となることは、f の勾配

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

と明らかに対応しています。

1 次微分形式 $X dx + Y dy + Z dz$ の外微分は

$$\begin{aligned} & d(X dx + Y dy + Z dz) \\ &= \left(\frac{\partial X}{\partial y} dy + \frac{\partial X}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial z} dz \right) \wedge dy + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy \right) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

となります。これは rot と対応しています。

2 次微分形式 $Xdy \wedge dz + Ydz \wedge dx + Zdx \wedge dy$ の外微分は

$$\begin{aligned}
&d(Xdy \wedge dz + Ydz \wedge dx + Zdx \wedge dy) \\
&= \frac{\partial X}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial Z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

であり、div と対応しています。

外微分の局所座標表示を使うと、外微分の性質を簡単に導けます。

命題 2.68: 外微分のライプニッツ則

任意の $\phi \in \Omega^k(M)$ と $\psi \in \Omega^l(M)$ に対し、

$$d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi + (-1)^k \phi \wedge d\psi$$

が成り立つ。

証明. 多重線形性から座標近傍 $(U; x^1, \cdots, x^n)$ において $\phi = fdx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \psi = gdx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}$ となる場合に限って証明すれば十分です。計算すると確かに

$$\begin{aligned}
d(\phi \wedge \psi) &= d(fg) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\
&= (gdf + fdg) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\
&= (df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \wedge (g \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}) \\
&\quad + (-1)^k (fdx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \wedge (dg \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}) \\
&= d\phi \wedge \psi + (-1)^k \phi \wedge d\psi
\end{aligned}$$

となります。 □

命題 2.69: $d \circ d = 0$

任意の $\phi \in \Omega^k(M)$ に対し、

$$d(d\phi) = 0$$

が成り立つ。

証明. 多重線形性から座標近傍 $(U; x^1, \cdots, x^n)$ において $\phi = fdx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_k}$ となる場合に限って証明すれば十分です。まず全微分 df について

$$\begin{aligned}
d(df) &= d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i
\end{aligned}$$

となりますが、i, j を入れ替えて偏微分の交換可能性を使うと

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}dx^j \wedge dx^i &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}dx^i \wedge dx^j \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}dx^j \wedge dx^i\end{aligned}$$

となるので、$d(df) = 0$ です。同様に $d(dx^i) = 0$ も成り立つので、外微分のライプニッツ則から

$$d(d\phi) = d(df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = 0$$

が成り立ちます。 □

例 2.70

例 2.67 の対応を踏まえると、$\mathbb{R}^3$ 上の微分形式において $d \circ d = 0$ は、ベクトル解析の公式

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathrm{rot} = 0$$

と対応していることが分かります。

また、写像によって微分形式を引き戻すことができます。

定義 2.71: 微分形式の引き戻し

微分可能多様体 M, N の C^∞ 級写像 $F : M \to N$ による $\phi \in \Omega^k(N)$ の引き戻し $F^*\phi \in \Omega^k(M)$ を任意の $p \in M$ と $v_1, \cdots, v_k \in T_pM$ において

$$(F^*\phi)_p(v_1, \cdots, v_k) = \phi_{F(p)}(F_{*p}v_1, \cdots, F_{*p}v_k)$$

とすることで定める。ただし $k = 0$ のときは $F^*\phi \in C^\infty(M)$ を

$$F^*\phi = \phi \circ F$$

とする。

$F : M \to N, G : N \to L$ を C^∞ 級写像とすると、写像の微分は $G_{*F(p)} \circ F_{*p} = (G \circ F)_{*p}$ を満たすので、任意の $\phi \in \Omega^k(L)$ に対して

$$F^*(G^*\phi) = (G \circ F)^*\phi$$

となることが分かります。

命題 2.72: ウェッジ積と引き戻しの可換性

M, N を微分可能多様体、$F : M \to N$ を C^∞ 級写像とする。任意の $\phi \in \Omega^k(N), \psi \in \Omega^l(N)$ に対して

$$F^*(\phi \wedge \psi) = F^*\phi \wedge F^*\psi$$

が成り立つ。

証明. $k=0$ のときは任意の $p \in M$ と $v_1, \cdots, v_l \in T_pM$ に対して

$$\begin{aligned}&\{F^*(\phi\psi)\}_p(v_1, \cdots, v_l)\\ &= \phi(F(p))\psi_{F(p)}(F_{*p}v_1, \cdots, F_{*p}v_l)\\ &= (F^*\phi)(p)(F^*\psi)_p(v_1, \cdots, v_l)\end{aligned}$$

より成り立ちます。$l=0$ のときも同様です。

$k>0, l>0$ のとき、ウェッジ積の定義から任意の $p \in M$ と $v_1, \cdots, v_{k+l} \in T_pM$ に対して

$$\begin{aligned}&\{F^*(\phi \wedge \psi)\}_p(v_1, \cdots, v_{k+l})\\ &= \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\operatorname{sgn}\sigma)\phi_{F(p)}(F_{*p}v_{\sigma(1)}, \cdots, F_{*p}v_{\sigma(k)})\psi_{F(p)}(F_{*p}v_{\sigma(k+1)}, \cdots, F_{*p}v_{\sigma(k+l)})\\ &= \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\operatorname{sgn}\sigma)(F^*\phi)_p(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)})(F^*\psi)_p(v_{\sigma(k+1)}, \cdots, v_{\sigma(k+l)})\\ &= (F^*\phi \wedge F^*\psi)_p(v_1, \cdots, v_{k+l})\end{aligned}$$

となるので成り立ちます。 □

引き戻しの重要な性質は、外微分と可換であることです。

命題 2.73: 外微分と引き戻しの可換性

M, N を微分可能多様体、$F: M \to N$ を C^∞ 級写像とする。任意の $\phi \in \Omega^k(N)$ に対して

$$d(F^*\phi) = F^*(d\phi)$$

が成り立つ。

証明. $k=0$ のときは任意の $p \in M$ と $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned}\{d(F^*\phi)(X)\}(p) &= X_p(\phi \circ F)\\ &= (F_{*p}X_p)(\phi)\\ &= (d\phi)_{F(p)}(F_{*p}X_p)\\ &= \{(F^*(d\phi))(X)\}(p)\end{aligned}$$

が成り立つ。

$k>0$ のときは外微分の局所座標表示を使って証明します。N の座標近傍 $(U; x^1, \cdots, x^n)$ において $\phi = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ と置くと、$k=0$ における証明から $d(F^*x^{i_l}) = F^*(dx^{i_l})$ が成り立つことを用いると

$$\begin{aligned}d(F^*\phi) &= d(F^*f) \wedge d(F^*x^{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(F^*x^{i_1})\\ &= F^*(df) \wedge F^*(dx^{i_1}) \wedge \cdots \wedge F^*(dx^{i_k})\\ &= F^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})\\ &= F^*(d\phi)\end{aligned}$$

となります。 □

2.10　カルタンの公式

関数やベクトル場と同じように、微分形式のリー微分も定義できます。定義には引き戻しを使います。

定義 2.74: 微分形式のリー微分

$X \in \mathfrak{X}(M)$ が生成するフローを θ とする。微分形式 $\phi \in \Omega^k(M)$ の X によるリー微分 $L_X\phi \in \Omega^k(M)$ を各点 $p \in M$ で

$$(L_X\phi)_p = \lim_{t\to 0}\frac{(\theta_t^*\phi)_p - \phi_p}{t}$$

と定義する。

$k=0$ の場合は関数のリー微分と一致します。微分形式のリー微分は次のように書くこともできます。

命題 2.75

$X \in \mathfrak{X}(M)$ と $\phi \in \Omega^k(M)$ について、任意の $Y_1,\cdots,Y_k \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$(L_X\phi)(Y_1,\cdots,Y_k) = X\{\phi(Y_1,\cdots,Y_k)\} - \sum_{i=1}^k \phi(Y_1,\cdots,[X,Y_i],\cdots,Y_k)$$

が成り立つ。

証明.

$$\begin{aligned}
(L_X\phi)_p(Y_1,\cdots,Y_k) &= \lim_{t\to 0}\frac{(\theta_t^*\phi)_p((Y_1)_p,\cdots,(Y_k)_p) - \phi_p((Y_1)_p,\cdots,(Y_k)_p)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\phi_{\theta_t(p)}((\theta_t)_{*p}(Y_1)_p,\cdots,(\theta_t)_{*p}(Y_k)_p) - \phi_p((Y_1)_p,\cdots,(Y_k)_p)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\phi_{\theta_t(p)}((\theta_t)_{*p}(Y_1)_p,\cdots,(\theta_t)_{*p}(Y_k)_p) - \phi_{\theta_t(p)}((Y_1)_{\theta_t(p)},\cdots,(Y_k)_{\theta_t(p)})}{t}\\
&\quad + \lim_{t\to 0}\frac{\phi_{\theta_t(p)}((Y_1)_{\theta_t(p)},\cdots,(Y_k)_{\theta_t(p)}) - \phi_p((Y_1)_p,\cdots,(Y_k)_p)}{t}
\end{aligned}$$

第 1 項は

$$\begin{aligned}
(\text{第 1 項}) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\sum_{i=1}^k\{\phi_{\theta_t(p)}((\theta_t)_{*p}(Y_1)_p,\cdots,(\theta_t)_{*p}(Y_i)_p,(Y_{i+1})_{\theta_t(p)},\cdots,(Y_k)_{\theta_t(p)})\\
&\qquad - \phi_{\theta_t(p)}((\theta_t)_{*p}(Y_1)_p,\cdots,(\theta_t)_{*p}(Y_{i-1})_p,(Y_i)_{\theta_t(p)},\cdots,(Y_k)_{\theta_t(p)})\}\\
&= \lim_{t\to 0}\sum_{i=1}^k \phi_{\theta_t(p)}\left((\theta_t)_{*p}(Y_1)_p,\cdots,\frac{(\theta_t)_{*p}(Y_i)_p - (Y_i)_{\theta_t(p)}}{t},\cdots,(Y_k)_p\right)\\
&= -\sum_{i=1}^k \phi_p((Y_1)_p,\cdots,[X,Y_i]_p,\cdots,(Y_k)_p)
\end{aligned}$$

となります。ただし最後の行で

$$\lim_{t\to 0}\frac{(\theta_t)_{*p}(Y_i)_p - (Y_i)_{\theta_t(p)}}{t} = -\lim_{t\to 0}(\theta_t)_{*p}\frac{(\theta_{-t})_{*\theta_t(p)}(Y_i)_{\theta_t(p)} - (Y_i)_p}{t} = -(L_XY)_p = -[X,Y]_p$$

を用いました。第 2 項は

$$
\begin{aligned}
(\text{第 2 項}) &= \lim_{t\to 0} \frac{\{\phi(Y_1,\cdots,Y_k)\}(\theta_t(p)) - \{\phi(Y_1,\cdots,Y_k)\}(p)}{t} \\
&= L_X\{\phi(Y_1,\cdots,Y_k)\} \\
&= X\{\phi(Y_1,\cdots,Y_k)\}
\end{aligned}
$$

となります。よって主張が成り立ちます。 □

外微分は微分形式の次数を 1 つ上げる演算で、リー微分は微分形式の次数を変えない演算でした。微分形式の次数を 1 つ下げる演算も考えることができます。

定義 2.76: 内部積

微分可能多様体 M 上のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ と微分形式 $\phi \in \Omega^k(M)$ について、$i_X\phi \in \Omega^{k-1}(M)$ を任意の $Y_1,\cdots,Y_{k-1} \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$
(i_X\phi)(Y_1,\cdots,Y_{k-1}) = \phi(X,Y_1,\cdots,Y_{k-1})
$$

とすることで定める。$i_X\phi$ を ϕ の X による内部積という。

内部積も微分としての性質を持ちます。

命題 2.77: 内部積のライプニッツ則

$X \in \mathfrak{X}(M), \phi \in \Omega^k(M), \psi \in \Omega^l(M)$ に対して

$$
i_X(\phi\wedge\psi) = (i_X\phi)\wedge\psi + (-1)^k\phi\wedge(i_X\psi)
$$

が成り立つ。

証明. $D : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ という線形な演算がライプニッツ則

$$
D(\phi\wedge\psi) = (D\phi)\wedge\psi + (-1)^k\phi\wedge(D\psi)
$$

および 1 次微分形式 $\phi \in \Omega^1(M)$ に対して $i_X(\phi) = \phi(X)$ を満たすなら、任意の微分形式 $\phi \in \Omega^k(M)$ に対して帰納的に $i_X\phi$ を計算できるので、このような D は一つに定まります。1 次微分形式に対しては $D = i_X$ が成り立ちます。k 次微分形式まで $D = i_X$ が成り立つなら、$\phi \in \Omega^k(M)$ と $\psi \in \Omega^1(M)$ に対してウェッジ積の定義から

$$
\begin{aligned}
D(\phi\wedge\psi) &= (D\phi)\wedge\psi + (-1)^k\phi(D\psi) \\
&= (i_X\phi)\wedge\psi + (-1)^k\phi(i_X\psi) \\
&= i_X(\phi\wedge\psi)
\end{aligned}
$$

が成り立つので、$k+1$ 次微分形式に対しても $D = i_X$ となります。よって任意の次数について $D = i_X$ であり、i_X はライプニッツ則を満たします。 □

外微分、リー微分、内部積という 3 つの微分形式に関する演算は次の公式で関係しています。

定理 2.78: カルタンの公式

任意の $X \in \mathfrak{X}(M), \phi \in \Omega^k(M)$ に対して

$$L_X\phi = i_X(d\phi) + d(i_X\phi)$$

が成り立つ。

証明. 任意の $Y_1, \cdots, Y_k \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\{i_X(d\phi)\}(Y_1, \cdots, Y_k) \\
&= d\phi(X, Y_1, \cdots, Y_k) \\
&= X\{\phi(Y_1, \cdots, Y_k)\} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i Y_i\{\phi(X, Y_1, \cdots, \widehat{Y_i}, \cdots, Y_k)\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i \phi([X, Y_i], Y_1, \cdots, \widehat{Y_i}, \cdots, Y_k) \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq k}(-1)^{i+j}\phi([Y_i, Y_j], X, Y_1, \cdots, \widehat{Y_i}, \cdots \widehat{Y_j}, \cdots, Y_k)
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
&d(i_X\phi)(Y_1, \cdots, Y_k) \\
&= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1} Y_i\{(i_X\phi)(Y_1, \cdots, \widehat{Y_i}, \cdots, Y_k)\} \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq k}(-1)^{i+j}(i_X\phi)([Y_i, Y_j], Y_1, \cdots, \widehat{Y_i}, \cdots, \widehat{Y_j}, \cdots, Y_k) \\
&= -\sum_{i=1}^{k}(-1)^i Y_i\{\phi(X, Y_1, \cdots, \widehat{Y_i}, \cdots, Y_k)\} \\
&\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq k}(-1)^{i+j}\phi([Y_i, Y_j], X, Y_1, \cdots, \widehat{Y_i}, \cdots, \widehat{Y_j}, \cdots, Y_k)
\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
&\{i_X(d\phi)\}(Y_1, \cdots, Y_k) + d(i_X\phi)(Y_1, \cdots, Y_k) \\
&= X\{\phi(Y_1, \cdots, Y_k)\} - \sum_{i=1}^{k}\phi(Y_1, \cdots, [X, Y_i], \cdots, Y_k) \\
&= L_X\phi(Y_1, \cdots, Y_k)
\end{aligned}$$

が成り立ちます。 □

カルタンの公式から、微分形式のリー微分もライプニッツ則を満たすことが導かれます。

命題 2.79: リー微分のライプニッツ則

$X \in \mathfrak{X}(M), \phi \in \Omega^k(M), \psi \in \Omega^l(M)$ に対して

$$L_X(\phi \wedge \psi) = (L_X\phi) \wedge \psi + \phi \wedge (L_X\psi)$$

が成り立つ。

証明. カルタンの公式から

$$
\begin{aligned}
L_X(\phi\wedge\psi) &= i_X(d(\phi\wedge\psi)) + d(i_X(\phi\wedge\psi)) \\
&= i_X(d\phi\wedge\psi + (-1)^k\phi\wedge d\psi) + d(i_X\phi\wedge\psi + (-1)^k\phi\wedge i_X\psi) \\
&= i_X(d\phi)\wedge\psi + (-1)^{k+1}d\phi\wedge i_X\psi + (-1)^k i_X\phi\wedge d\psi + (-1)^{2k}\phi\wedge i_X(d\psi) \\
&\quad + d(i_X\phi)\wedge\psi + (-1)^{k-1}i_X\phi\wedge d\psi + (-1)^k d\phi\wedge i_X\psi + (-1)^{2k}\phi\wedge d(i_X\psi) \\
&= \{i_X(d\phi) + d(i_X\phi)\}\wedge\psi + \phi\wedge(i_X(d\psi) + d(i_X\psi)) \\
&= (L_X\phi)\wedge\psi + \phi\wedge(L_X\psi)
\end{aligned}
$$

となります。 □

3　シンプレクティック幾何学

3.1　シンプレクティック多様体

これまでに構築した幾何学の枠組みでハミルトン形式を表現します。正準変数 $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ に対して多様体の座標は $2n$ 個必要になるため添字の範囲に混乱が生じる恐れがあるので、多様体の座標の添字は $\mu = 1, \cdots, 2n$ のようにギリシャ文字を使うことにします。

相空間に対応するものはシンプレクティック多様体です。

定義 3.1: シンプレクティック多様体

微分可能多様体 M 上の 2 次微分形式 $\omega \in \Omega^2(M)$ があって次の条件を満たすとする。

(1) ω は非退化である。つまり任意の点 $p \in M$ と接ベクトル $v, w \in T_pM$ に対して、$v \neq 0$ なら $w \neq 0$ が存在して $\omega_p(v, w) \neq 0$ となる。

(2) $d\omega = 0$

このとき、(M, ω) をシンプレクティック多様体と呼び、ω を M 上のシンプレクティック形式と呼ぶ。

ハミルトン形式の文脈ではシンプレクティック形式のことを正準 2 形式と呼ぶこともあります。

ベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ の局所座標 $(U; x^1, \cdots, x^m)$ における成分を X^μ, Y^μ とすると、

$$\begin{aligned}\omega(X, Y) &= \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{m} X^\mu Y^\nu \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \\ &= \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{m} \omega_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu\end{aligned}$$

となります。ただし ω の成分を

$$\omega_{\mu\nu} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)$$

と置きました。2 次微分形式 ω の交代性から $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ が成り立つので、点 $p \in M$ における行列 $(\omega_{\mu\nu})_p$ は交代行列です。非退化性は $(\omega_{\mu\nu})_p$ が正則行列であるという条件と同値です。このとき転置行列の行列式が元の行列式と等しいことを用いると、

$$\det(\omega_{\mu\nu})_p = \det(\omega_{\nu\mu})_p = \det(-(\omega_{\mu\nu})_p) = (-1)^m \det(\omega_{\mu\nu})_p$$

が成り立ちます。よって m が奇数のときは $\det(\omega_{\mu\nu})_p = 0$ となるので、非退化性が成り立ちません。そのためシンプレクティック多様体は必ず偶数次元です。

3.2　余接束

微分可能多様体 N の余接束 T^*N はシンプレクティック多様体とみなすことができます。余接束の点 $\xi \in T^*N$ について、射影 $\pi : T^*N \to N$ を $\xi \in \{p\} \times T^*_pN$ としたとき

$$\pi(\xi) = p$$

によって定義します。N の座標近傍 $(U; q^1, \cdots, q^n)$ において、$\xi \in T^*N$ の座標 $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ を展開

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} p_i (dq^i)_{\pi(\xi)}$$

の係数として定義します。このとき

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$$

は座標近傍の取り方に依らず定まり、シンプレクティック形式になることを示します。

シンプレクティックポテンシャルを次のように定義します。

定義 3.2: シンプレクティックポテンシャル

N を n 次元微分可能多様体とする。1 次微分形式 $\theta \in \Omega^1(T^*N)$ を $\xi \in T^*N$ と $v \in T_\xi(T^*N)$ に対して

$$\theta_\xi(v) = \xi(\pi_{*\xi}(v))$$

として定義する。ただし $\pi_{*\xi} : T_\xi(T^*N) \to T_{\pi(\xi)}N$ は写像の微分である。θ を T^*N のシンプレクティックポテンシャルと呼ぶ。

T^*N の座標近傍 $(T^*U; q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ においてシンプレクティックポテンシャル θ を計算します。$v \in T_\xi(T^*N)$ を $a^1, \cdots, a^n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$ を用いて

$$v = \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)_\xi + \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)_\xi$$

と展開すると、$f \in C^\infty(N)$ に対して

$$\begin{aligned}
\pi_{*\xi}(v)(f) &= v(f \circ \pi) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\frac{\partial f(q^1, \cdots, q^n)}{\partial q^i}\right)_\xi + \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\frac{\partial f(q^1, \cdots, q^n)}{\partial p_i}\right)_\xi \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\frac{\partial f(q^1, \cdots, q^n)}{\partial q^i}\right)_{\pi(\xi)}
\end{aligned}$$

となるので、

$$\pi_{*\xi}(v) = \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)_{\pi(\xi)} \in T_{\pi(\xi)}N$$

です。よって

$$\begin{aligned}
\theta_\xi(v) &= \xi(\pi_{*\xi}(v)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i \xi\left(\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)_{\pi(\xi)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i p_i
\end{aligned}$$

が成り立ちます。v の成分 a^i は $(dq^i)_\xi$ によって取り出すことができるので、

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} p_i dq^i$$

と書けます。そこで $\omega = d\theta$ の局所座標表示は

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$$

となります。よってこれはシンプレクティック形式です。

ω の行列表示は

$$(\omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \end{pmatrix}$$

です。これは正準変換の条件で現れた行列と同じです。正準変換の条件 $A = JAJ^T$ は、別の局所座標 $(U'; q'^1, \cdots, q'^n, p'_1, \cdots, p'_n)$ においても

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp'_i \wedge dq'^i$$

と表される条件だったということです。

正準変換はシンプレクティック形式を保つ写像であることが分かったので、これを一般化してシンプレクティック同相写像を定義します。

定義 3.3: シンプレクティック同相

$(M, \omega), (M', \omega')$ をシンプレクティック多様体とする。微分同相写像 $F : M \to M'$ が

$$\omega = F^*\omega'$$

を満たすとき、シンプレクティック同相写像であるという。

正準変換は (M, ω) から自身へのシンプレクティック同相写像です。

3.3 ダルブーの定理

任意のシンプレクティック多様体でも、局所的には余接束と同じようにシンプレクティック形式 ω を書くことができます。

定理 3.4: ダルブーの定理

(M,ω) を $2n$ 次元シンプレクティック多様体とする。任意の点 $p \in M$ に対して $p \in U$ を満たす局所座標 $(U; q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ が存在して、U 上においてシンプレクティック形式 ω は

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$$

と表される。このような局所座標をダルブー座標と呼ぶ。

ダルブーの定理を証明するために準備をします。まず一点においてはシンプレクティック形式を望むように表せることを示します。

命題 3.5

(M,ω) を $2n$ 次元シンプレクティック多様体とする。任意の点 $p \in M$ に対して $p \in U$ を満たす局所座標 $(U; q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ が存在して、

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$$

が成り立つ。

証明. $p \in M$ を原点とする M の座標近傍 $(V; q'^1, \cdots, q'^n, p'_1, \cdots, p'_n)$ における ω の成分を $\omega_{\mu\nu}$ とすると、行列 $(\omega_{\mu\nu})_p$ は非退化な交代行列になります。よって直交行列 P を用いて

$$P^{-1}(\omega_{\mu\nu})_p P = \begin{pmatrix} & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \end{pmatrix}$$

と区分対角化できます。そこで $(q'^1, \cdots, q'^n, p'_1, \cdots, p'_n)$ を P で回転すれば

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$$

が成り立つような座標 $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ を得ることができます。 $\square$

次の定理は 7 章でド・ラームコホモロジーを使って証明します。

定理 3.6: ポアンカレの補題

$k \geq 1$ とする。微分可能多様体 M 上の微分形式 $\phi \in \Omega^k(M)$ が $d\phi = 0$ を満たすなら、任意の $p \in M$ に対して p を含む開集合 U と $\lambda \in \Omega^{k-1}(U)$ が存在して、U 上で

$$d\lambda = \phi$$

が成り立つ。

ポアンカレの補題を使ってダルブーの定理を証明します。この証明法はモーザーのトリックと呼ばれています。

ダルブーの定理の証明. 命題 3.5 を使って、$p \in M$ を含む座標近傍 $(V; q'^1, \cdots, q'^n, p'_1, \cdots, p'_n)$ を

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} (dq'^i \wedge dp'_i)_p$$

となるように取ります。このとき $\omega_1 = \Omega^2(V)$ を

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{n} dq'^i \wedge dp'_i$$

と定めます。$d\omega_1 = 0$ が成り立つので $\omega_0 = \omega|_V$ とすると $d(\omega_1 - \omega_0) = 0$ であり、ポアンカレの補題から $W \subset V$ と $\sigma \in \Omega^1(W)$ が存在して W 上で

$$\omega_1 - \omega_0 = d\sigma$$

が成り立ちます。σ を定数だけずらすことで、$\sigma_p = 0$ とします。$\omega_t \in \Omega^2(V')$ を

$$\omega_t = \omega_0 + t d\sigma$$

と定めます。$(d\sigma)_p = (\omega_1)_p - (\omega_0)_p = 0$ なので任意の $t \in [0,1]$ において $(\omega_t)_p = (\omega_0)_p$ です。よって ω_t は点 p において非退化なので、必要なら W を小さく取り直すことで W の全体で非退化であるようにできます[*13]。

V' 上のベクトル場 $X_t \in \mathfrak{X}(V')$ を

$$i_{X_t}\omega_t + \sigma = 0$$

が成り立つように定めます[*14]。$\sigma_p = 0$ と ω_t の非退化性より $(X_t)_p = 0$ です。このとき p を含む M の開集合 $U \subset W$ と C^∞ 級写像 $\psi : U \times [0,1] \to W$ が存在して、$\psi_t(x) = \psi^{(x)}(t) = \psi(x,t)$ と置くとき任意の $x \in U$ と $t \in [0,1]$ に対して

$$\psi^{(x)}(0) = x,\ (X_t)_{\psi^{(x)}(t)} = {\psi^{(x)}}'(t)$$

を満たします。実際、局所座標表示するとこれは連立常微分方程式の初期値問題になるので、常微分方程式の解の存在定理から ψ は存在します。ω_t の定義から

$$\frac{d\omega_{t+s}}{ds} = d\sigma$$

が成り立つので、任意の $x \in U$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d(\psi_{t+s}^*\omega_{t+s})_x}{ds}(0) &= \{\psi_t^*(L_{X_t}\omega_t + d\sigma)\}_x \\ &= \{\psi_t^*(d(i_{X_t}\omega_t + \sigma))\}_x \\ &= 0\end{aligned}$$

[*13] 点 p における ω の行列式が 0 でないので、W を小さく取れば W 全体で ω の行列式が 0 でないようにできるということです。

[*14] このような X_t が定められるのは ω_t が非退化だからです。次の節の音楽同型で具体的に説明します。

となります。ただしカルタンの公式を用いました。したがって U 上で $\psi_1^*\omega_1 = \omega_0$ が成立するので、$\phi = \varphi \circ \psi_1$ と置けば、座標近傍 $(U;\phi)$ において

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$$

という形に書くことができます。 □

また、ダルブーの定理はシンプレクティック同相写像を使うと次のように表現することもできます。

定理 3.7: ダルブーの定理の別表現

次元が等しい 2 つのシンプレクティック多様体 $(M, \omega), (M', \omega')$ の任意の点 $p \in M, p' \in M'$ について、p, p' を含む開集合 U, U' およびシンプレクティック同相写像 $\psi : U \to U'$ が存在して $\psi(p) = p'$ を満たす。

ダルブーの定理によって、簡単に次の命題が証明できます。

命題 3.8

$2n$ 次元シンプレクティック多様体 (M, ω) に対して

$$\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$$

は M の任意の点で 0 にならない。

証明. 任意の $p \in M$ に対し、ダルブーの定理より p を含む座標近傍 $(U; q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ が存在して

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i$$

と書くことができます。よって、

$$\omega^n|_U = n! dq^1 \wedge dp_1 \wedge \cdots \wedge dq^n \wedge dp_n$$

となるので $\omega_p^n \neq 0$ です。 □

3.4 ハミルトン形式の幾何学的定式化

シンプレクティック形式 ω の非退化性から、シンプレクティック多様体ではベクトル場と微分形式を対応させることができます。

命題 3.9: 音楽同型

$2n$ 次元シンプレクティック多様体 (M, ω) の点 $p \in M$ ごとに、

$$\omega^\flat(p) : T_pM \to T_p^*M, \quad v \mapsto (w \mapsto \omega_p(v, w)), \quad v, w \in T_pM$$

と定義すると、$\omega^\flat(p)$ はベクトル空間の同型写像になる。M の各点の $\omega^\flat(p)$ を合わせて $\omega^\flat : TM \to T^*M$ が定義される。

また $\omega^\flat$ の逆写像を $\omega^\sharp = (\omega^\flat)^{-1} : T^*M \to TM$ と書く。

証明. T_pM と T_p^*M はどちらも $2n$ 次元ベクトル空間なので、$\omega^\flat(p)$ が単射であることを示せば同型写像であることが従います。$\omega^\flat(p)(v)=0$ であると仮定すると、任意の $w\in T_pM$ に対して

$$0=\{\omega^\flat(p)(v)\}(w)=\omega_p(v,w)$$

となるので ω の非退化性から $v=0$ となります。よって $\omega^\flat(p)$ は単射です。 □

$\omega^\flat,\omega^\sharp$ は音楽同型とも呼ばれます。ダルブー座標 $(U;q^1,\cdots,q^n,p_1,\cdots,p_n)$ を用いると、任意の $p\in U$ と $w\in T_pM$ に対して

$$\begin{aligned}\omega_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)_p,w\right)&=\sum_{j=1}^n(dp_j\wedge dq^j)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)_p,w\right)\\&=-(dp_i)_p(w)\\\omega_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)_p,w\right)&=\sum_{j=1}^n(dp_j\wedge dq^j)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)_p,w\right)\\&=(dq^i)_p(w)\end{aligned}$$

となるので、

$$\omega^\flat\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)=-dp_i,\quad \omega^\flat\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)=dq^i$$

が成り立ちます。$\omega^\sharp$ は $\omega^\flat$ の逆写像なので

$$\omega^\sharp(dq^i)=\frac{\partial}{\partial p_i},\quad \omega^\sharp(dp_i)=-\frac{\partial}{\partial q^i}$$

となります。

全微分と音楽同型を組み合わせることで、関数とベクトル場を対応させることもできます。

定義 3.10: ハミルトンベクトル場

シンプレクティック多様体 (M,ω) 上の関数 $f\in C^\infty(M)$ に対して、ハミルトンベクトル場 $X_f\in\mathfrak{X}(M)$ を

$$X_f=-\omega^\sharp(df)$$

とすることで定義する。

$\omega^\sharp$ の定義から任意の $Y\in\mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\omega(X_f,Y)=-df(Y)=-Yf$$

が成立します。内部積を使えば、

$$i_{X_f}\omega=-df$$

とも書けます。カルタンの公式を用いれば、

$$L_{X_f}\omega=d(i_{X_f}\omega)+i_{X_f}(d\omega)=-d(df)=0$$

となるので、ベクトル場 X_f は ω を保ちます。

ダルブー座標 $(U; q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ においては

$$
\begin{aligned}
X_f &= -\omega^\sharp \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)
\end{aligned}
$$

となります。これはハミルトン形式における式 (3) と同じです。ハミルトン形式は次のように表すことができます。

定義 3.11: 運動

シンプレクティック多様体 (M, ω) 上の関数 $H \in C^\infty(M)$ があるとき、H をハミルトニアンとするときの運動とは、X_H の積分曲線のことをいう。

ダルブー座標 $(U; q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ 上での運動を決める方程式は、正準方程式

$$
\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}
$$

になります。こうしてハミルトン形式を幾何学的に定式化することができました。

3.5 ポアソン括弧

定義 3.12: ポアソン括弧

シンプレクティック多様体 (M, ω) 上の関数 $f, g \in C^\infty(M)$ に対して

$$
\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) \in C^\infty(M)
$$

を f, g のポアソン括弧と呼ぶ。

ポアソン括弧は

$$
\{f, g\} = X_f g = -X_g f
$$

と書くこともできます。

ダルブー座標 $(U; q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ を用いれば、U 上で

$$
\begin{aligned}
\{f, g\} &= \sum_{k=1}^{n} dp_k \wedge dq^k \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right), \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial g}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)
\end{aligned}
$$

となって式 (4) と一致します。

命題 3.13: ポアソン括弧のライプニッツ則

任意の $f, g, h \in C^\infty(M)$ に対して

$$\begin{aligned}\{f, gh\} &= \{f, g\}h + g\{f, h\} \\ \{fg, h\} &= \{f, h\}g + f\{g, h\}\end{aligned}$$

が成り立つ。

証明.

$$\begin{aligned}\{f, gh\} &= X_f(gh) \\ &= (X_f g)h + g(X_f h) \\ &= \{f, g\}h + g\{f, h\}\end{aligned}$$

となります。$\{fg, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$ も同様です。 □

ポアソン括弧はリー代数を作ります。

命題 3.14: ポアソン括弧はリー括弧

ポアソン括弧 $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ をリー括弧として $C^\infty(M)$ はリー代数になる。つまり、

(1) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $\{af + bg, h\} = a\{f, h\} + b\{g, h\}$

(2) $\{f, g\} = -\{g, f\}$

(3) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

が成立する。

証明. (1),(2) はポアソン括弧の定義から明らかです。

(3) は $d\omega = 0$ から従います。$f, g, h \in C^\infty(M)$ に対して外微分の定義より

$$\begin{aligned}0 &= d\omega(X_f, X_g, X_h) \\ &= X_f(\omega(X_g, X_h)) + X_g(\omega(X_h, X_f)) + X_h(\omega(X_f, X_g)) \\ &\qquad - \omega([X_f, X_g], X_h) - \omega([X_g, X_h], X_f) - \omega([X_h, X_f], X_g)\end{aligned}$$

となります。ここで

$$X_f(\omega(X_g, X_h)) = \{f, \omega(X_g, X_h)\} = \{f, \{g, h\}\}$$

および

$$\begin{aligned}\omega([X_f, X_g], X_h) &= [X_f, X_g]h \\ &= X_f(X_g h) - X_g(X_f h) \\ &= X_f\{g, h\} - X_g\{f, h\} \\ &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} \\ &= \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\}\end{aligned}$$

を代入すれば

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$$

を得ます。 □

証明から、シンプレクティック形式の条件 $d\omega=0$ はポアソン括弧がヤコビ律を満たすことと同値だということが分かります。

さらにポアソン括弧のヤコビ律はリー代数の準同型を導きます。

命題 3.15

$$\Phi : C^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad f \mapsto X_f$$

はリー代数の準同型である。つまり Φ は線形写像であり、

$$[\Phi(f),\Phi(g)]=\Phi(\{f,g\})$$

が成り立つ。

証明. 任意の $h \in C^\infty(M)$ に対してヤコビ律を使うと

$$\begin{aligned}
\Phi(\{f,g\})h &= X_{\{f,g\}}h \\
&= \{\{f,g\},h\} \\
&= -\{\{g,h\},f\}-\{\{h,f\},g\} \\
&= X_f(X_gh)-X_g(X_fh) \\
&= [X_f,X_g]h \\
&= [\Phi(f),\Phi(g)]h
\end{aligned}$$

となります。 □

4 多様体の位相

幾何学的量子化に進む前に、位相の議論をしておきます。

4.1 位相空間

$\mathbb{R}^m$ と微分可能多様体の開集合の性質を一般化したものが位相空間です。

定義 4.1: 位相空間

集合 X とその部分集合を元とする集合 $\mathcal{O} \subset 2^X$ が次の条件を満たすとする。

(1) $\varnothing, X \in \mathcal{O}$

(2) 任意の $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ に対して $U \cap V \in \mathcal{O}$

(3) 任意の $\mathcal{O}$ の元の族 $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対して

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$$

が成り立つ。

このとき組 $(X, \mathcal{O})$ は位相空間であるという。$\mathcal{O}$ が明らかなときは単に X は位相空間であるという。$\mathcal{O}$ を開集合系といい、$\mathcal{O}$ の元である X の部分集合は開集合であるという。また、補集合が開集合であるような集合は閉集合であるという。

開集合系を定めて集合を位相空間にすることを、集合に位相を入れるという。

定義から $\varnothing, X$ は開集合でありかつ閉集合でもあります。
位相空間の定義はかなり緩いので、色々な変わった集合が位相空間になります。

例 4.2: 密着位相・離散位相

任意の集合 X は開集合系を

$$\mathcal{O} = \{\varnothing, X\}$$

とすることで位相空間になります。この位相を密着位相と呼びます。

また、任意の集合 X に対して開集合系を

$$\mathcal{O} = 2^X$$

としても位相空間になります。この位相は離散位相と呼ばれます。

$\mathbb{R}^m$ と微分可能多様体の場合はそれぞれ定義 2.3 と定義 2.6 のように位相を入れます。また位相空間の部分集合に対しては次のように位相を入れます。

定義 4.3: 相対位相

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合 A に対して、開集合系を

$$\mathcal{O}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

とすることで $(A, \mathcal{O}_A)$ を位相空間とする。このとき $\mathcal{O}_A$ を X からの相対位相といい、$(A, \mathcal{O}_A)$ は $(X, \mathcal{O})$ の部分空間であるという。

特に断らない限り、位相空間の部分集合に対しては常に相対位相を入れることにします。

4.1.1 連続

位相空間は定義は簡単ですが、様々な概念をその上に定義して議論することができます。例えば連続写像は位相空間に対して定義できます。

定義 4.4: 連続

X, Y を位相空間とする。写像 $f : X \to Y$ が連続であるとは、任意の Y の開集合 U に対して、$f^{-1}(U)$ が X の開集合になることをいう。

閉集合の定義と $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ から次の命題は明らかです。

命題 4.5: 閉集合の連続写像による逆像は閉集合

$f : X \to Y$ が連続写像であるとすると、任意の Y の閉集合 F に対し $f^{-1}(F)$ は X の閉集合である。

さらに $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ から次の命題も明らかです。

命題 4.6: 連続写像の合成は連続写像

$f : X \to Y, g : Y \to Z$ が連続写像であるなら、$g \circ f = X \to Z$ も連続である。

また、相対位相の重要な性質として次の命題があります。

命題 4.7

X, Y を位相空間とし、$f : X \to Y$ を連続写像とする。

(1) A を X の部分空間とすると、f の A への制限 $f|_A = A \to Y$ は連続である。

(2) B を Y の部分空間とし、$f(X) \subset B$ が成り立つとする。f の終域を B に制限したものを $f' : X \to B$ と書くと、f' は連続である。

証明.

(1) 任意の Y の開集合 U に対し、$f^{-1}(U)$ は X の開集合です。よって相対位相の定義から $f^{-1}(U) \cap A$ は A の開集合であり、逆像について

$$f^{-1}(U) \cap A = (f|_A)^{-1}(U)$$

が成り立つので $f|_A$ は連続写像です。

(2) 任意の B の開集合 U' に対し、相対位相の定義から Y の開集合 U が存在して $U' = U \cap B$ を満たします。f は連続なので $f^{-1}(U)$ は X の開集合であり、$f(X) \subset B$ から

$$f^{-1}(U) = f'^{-1}(U')$$

が成り立つので f' は連続写像です。

□

この命題のおかげで、相対位相を使う限り連続写像の定義域と終域を気にする必要はありません。

4.1.2　近傍

次に近傍の概念を定義します。近傍の概念を使うと「ある点の近くである性質が成り立つ」という言明を厳密に定式化できます。

定義 4.8: 近傍

位相空間 X の点 p について、部分集合 $A \subset X$ が p の近傍であるとは、X の開集合 U が存在して $p \in U \subset A$ を満たすことをいう。

開集合であるような近傍を開近傍という。

近傍そのものは開集合であるとは限らないので注意してください。次の命題は開集合の判定によく使われます。

命題 4.9

X を位相空間とする。$U \subset X$ について次の 2 つは同値。

(1) U は開集合である。
(2) 任意の $p \in U$ に対して p の近傍 A が存在して $A \subset U$ を満たす。

証明. U が開集合なら、任意の $p \in U$ に対して U が近傍になります。

(2) が成り立つとすると、任意の $p \in U$ に対して開集合 V_p が存在して $p \in V_p \subset U$ が成立するので、

$$U = \bigcup_{p \in U} V_p$$

と書けます。よって U は開集合の和集合なので開集合となります。 □

4.1.3　閉包・内部・境界

定義 4.10: 閉包

位相空間 X の部分集合 A に対して、A を含む全ての閉集合の共通部分を A の X における閉包と呼び、$\overline{A}$ と書く。

定義から閉包 $\overline{A}$ は $A \subset X$ を含む最小の X の閉集合です。閉包と双対的な概念として内部があります。

定義 4.11: 内部

位相空間 X の部分集合 A に対して、A に含まれる全ての開集合の和集合を A の X における内部と呼び、$\mathrm{Int}\,A$ と書く。

定義から内部 $\mathrm{Int}\,A$ は $A \subset X$ に含まれる最大の X の開集合です。また、閉包と内部の差を境界と呼びます。

定義 4.12: 境界

位相空間 X の部分集合 A に対して、$\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}\,A$ を A の X における境界と呼ぶ。

4.1.4 稠密

定義 4.13: 稠密

位相空間 X の部分集合 A が $\overline{A} = X$ を満たすとき、A は稠密であるという。

定義 4.14: 可分

位相空間 X が可算な稠密部分集合を持つとき、X は可分であるという。

任意の実数はその近傍に有理数を含むので、$\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$ が成立します。よって $\mathbb{R}$ は可分です。

4.1.5 同相

位相空間が同じであるとはどういうことか定義します。

定義 4.15: 同相

写像 $f : X \to Y$ が全単射であって f, f^{-1} がともに連続であるとき、f は同相写像であるという。位相空間 X, Y の間に同相写像が存在するとき、X, Y は同相であるという。

命題 4.16: 同相写像は開写像

$f : X \to Y$ が同相写像なら、任意の X の開集合 U に対して $f(U)$ は Y の開集合である。

証明. $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ と f^{-1} が連続であることから成り立ちます。 □

よって、同相写像 $f : X \to Y$ は X の開集合と Y の開集合を 1 対 1 に対応させるので、位相空間 X, Y が同相なら位相空間としての性質は全て同じになります。厳密に言えば、同相写像で変わらないような性質のことを位相的性質と呼びます。

4.2 位相的性質

4.2.1 コンパクト

最も重要な位相的性質の一つはコンパクト性です。コンパクト性は $\mathbb{R}^m$ における有界閉集合の一般化です。

定義 4.17: コンパクト

位相空間 X の開集合の族 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が X を被覆するとき、つまり

$$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

が成り立つとき $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開被覆であるという。

X の任意の開被覆 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ から有限個の開集合 $U_1, \cdots, U_n$ を取り出して

$$X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$$

が成り立つようにできるとき、X はコンパクトであるという。

コンパクト性は位相空間の性質であることに注意してください。位相空間 X の部分集合 A がコンパクトであるというのは、X からの相対位相について A がコンパクトであるという意味になります。また次のように定義します。

定義 4.18: 相対コンパクト

位相空間 X の部分空間 A がコンパクトなら、A は相対コンパクトであるという。

命題 4.19: コンパクト空間の閉集合はコンパクト

コンパクト空間 X の閉集合 F はコンパクトである。

証明. F の開集合の族 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が F を被覆しているとします。相対位相の定義から X の開集合の族 $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して各 $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$U_\lambda = F \cap V_\lambda$$

を満たします。このとき $X \setminus F$ と $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開被覆になるので、X がコンパクトであることから $X \setminus F$ と有限個の $V_1, \cdots, V_n$ が X の開被覆になります。$i = 1, \cdots, n$ に対して $U_i = F \cap V_i$ と置くと、$U_1, \cdots, U_n$ は F の開集合の族であって F を被覆するので、F はコンパクトです。 □

命題 4.20: コンパクト集合の有限和はコンパクト

位相空間 X のコンパクト部分集合 $K_1, \cdots, K_n$ に対して

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

はコンパクトである。

証明. $n = 1$ なら明らかです。

$n = 2$ のとき、任意の $K = K_1 \cup K_2$ の開被覆 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は K_1, K_2 の開被覆でもあるので、それぞれの有限開被覆が存在します。それらの共通部分は K の有限開被覆になるので K はコンパクトです。

$n \geq 3$ のときは帰納法によって成り立ちます。 □

命題 4.21: コンパクト空間の連続写像による像はコンパクト

X をコンパクト空間、Y を位相空間とし、$f: X \to Y$ を連続写像とする。このとき像 $f(X)$ はコンパクトである。

証明. $f(X)$ の任意の開被覆 $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対して、相対位相の定義からそれぞれの $V_\lambda \subset f(X)$ に対して $V_\lambda = V'_\lambda \cap f(X)$ を満たすような Y の開集合の族 $(V'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が存在します。f は連続なので、$(f^{-1}(V'_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開集合の族であり、X の開被覆になります。X はコンパクトなので $(f^{-1}(V'_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ から X の有限開被覆 $\{f^{-1}(V'_1), \cdots, f^{-1}(V'_n)\}$ をとることができ、逆像の定義から $\{V_1, \cdots, V_n\}$ は $f(X)$ の有限開被覆になります。 □

ユークリッド空間においては次の定理が成り立ちます。

定理 4.22: ハイネ・ボレルの被覆定理

$\mathbb{R}^m$ の部分集合 A について、A がコンパクトであることと、有界閉集合であることは同値である。

証明は実数論の範疇なので省略します。

4.2.2 連結

連結性は「つながっている」という性質の一つの一般化です。

定義 4.23: 連結

空でない位相空間 X の空でない開集合 U, V が存在して

$$U \cap V = \varnothing, U \cup V = X$$

を満たすとき、X は非連結であるという。X が非連結でないとき、連結であるという。

位相空間が空でないことを連結の定義に含めないこともありますが、ここでは含めておくことにします。コンパクト性と同様に、部分空間に対しても連結性は定義されます。

命題 4.24: 連結空間の連続写像による像は連結

X を連結空間、Y を位相空間とし、$f: X \to Y$ を連続写像とする。このとき像 $f(X)$ は連結である。

証明. 対偶を示します。$f(X)$ が連結でないとすると、$f(X)$ の空でない開集合 U, V が存在して $U \cap V = \varnothing, U \cup V = f(X)$ を満たします。命題 4.7(2) から $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ は空でない X の開集合であり、逆像について

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$$
$$f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(f(X)) = X$$

が成り立つので X は連結ではありません。 □

よって連結性は位相的性質です。$[0, 1]$ が連結であることは重要です。

命題 4.25: $[0,1]$ の連結性

$[0,1]$ に $\mathbb{R}$ からの相対位相を入れたものは連結である。

証明は実数論の範疇なので省略します。連結性は次の命題の形で使われることも多いです。

命題 4.26

位相空間 X が連結であることは、X の開かつ閉集合が $\varnothing, X$ のみであることと同値である。

証明. 対偶と裏を示します。

$\varnothing, X$ 以外の開かつ閉集合 $A \subset X$ があるとすれば、$A, X \setminus A$ はどちらも空でない開集合であり、

$$A \cap (X \setminus A) = \varnothing,\ \ A \cup (X \setminus) = X$$

を満たすので、X は連結ではありません。

X が連結でないとすると、空でない開集合 U, V が存在して

$$U \cap V = \varnothing, U \cup V = X$$

を満たし、$V = X \setminus U$ なので U は $\varnothing, X$ 以外の開かつ閉集合です。 □

例えば次のようにこの命題は使われます。

定義 4.27: 局所定数関数

X を位相空間、Y を集合とする。関数 $f : X \to Y$ が局所定数関数であるとは、任意の $p \in X$ に対して p の近傍 A が存在して、f が A 上定数になることをいう。

命題 4.28

位相空間 X が連結なら、局所定数関数 $f : X \to Y$ は定数関数である。

証明. ある $p \in X$ を固定し、点 p での f の値を $x = f(p)$ と置きます。このとき局所定数関数の定義と命題 4.9 から $f^{-1}(x)$ は開集合となります。また

$$X \setminus f^{-1}(x) = \bigcup_{x' \neq x} f^{-1}(x')$$

より $X \setminus f^{-1}(x)$ は開集合の和集合なので開集合です。よって $f^{-1}(x)$ は空でない X の開かつ閉集合であり、X の連結性から $f^{-1}(x) = X$ となります。 □

位相空間は連結成分に分けることができます。

定義 4.29: 連結成分

位相空間 X の点 $p \in X$ について、p を要素に持つ全ての X の連結部分集合の和集合を X における p の連結成分という。

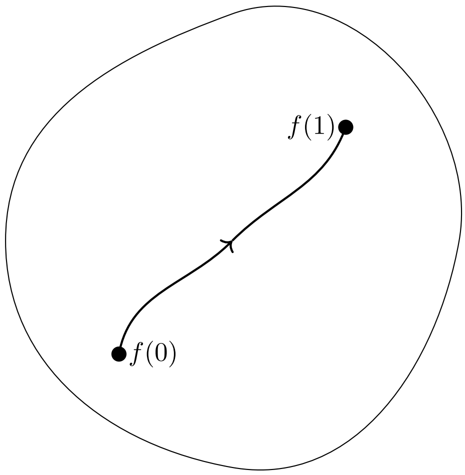
よって連結成分は $p \in X$ の連結成分は、p を要素に持つ最大の X の連結部分集合です。

4.2.3　弧状連結

連結性と似て異なる「つながっている」性質として、弧状連結性があります。

定義 4.30: 道

X を位相空間とする。連続写像 $f:[0,1]\to X$ のことを道という。$f(0),f(1)$ をそれぞれ始点、終点と呼び、始点と終点が一致している道のことをループという。



定義 4.31: 弧状連結

空でない位相空間 X の任意の 2 点 $a,b\in X$ について、$f(0)=a, f(1)=b$ を満たす道 $f:[0,1]\to X$ が存在するとき、X は弧状連結であるという。

連結性は位相空間が開集合に分離できないことを表しており、弧状連結性は任意の 2 点が道で結べることを表しているので別の概念です。ただし弧状連結ならば連結であることは成り立ちます。

命題 4.32: 弧状連結ならば連結

位相空間 X が弧状連結であれば連結である。

証明. 弧状連結な位相空間 X が連結でないと仮定します。このとき X の空でない開集合 U,V が存在して $U\cap V=\varnothing, U\cup V=X$ が成り立ちます。2 点 $a\in U, b\in V$ を取ったとき、X は弧状連結なので道 $f:[0,1]\to X$ が存在して $f(0)=a, f(1)=V$ となるので、$0\in f^{-1}(U), 1\in f^{-1}(V)$ となります。f は連続なので $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ は空でない $[0,1]$ の開集合であり、

$$f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)=f^{-1}(U\cap V)=\varnothing$$
$$f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)=f^{-1}(U\cup V)=[0,1]$$

が成り立ちます。これは $[0,1]$ が連結であることに矛盾します。 □

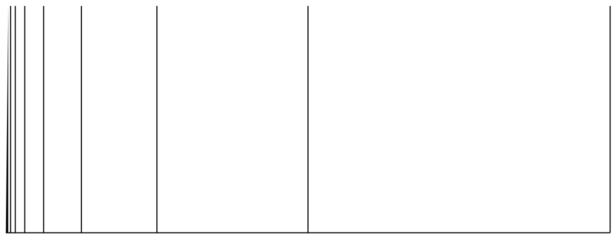
しかし連結な空間が弧状連結になるとは限りません。

定義 4.33: くし空間

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 C を

$$C = [0,1] \times \{0\} \ \cup \ \{0\} \times [0,1] \ \cup \ \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, \cdots \right\} \times [0,1]$$

と定義して $\mathbb{R}^2$ からの相対位相によって位相空間とみなす。C をくし空間という。



命題 4.34

くし空間から原点を除いた $C \setminus \{(0,0)\}$ は連結だが弧状連結ではない。

証明. 原点を除いているため、$C \setminus \{(0,0)\}$ が弧状連結でないことは明らかでしょう。$A = \{0\} \times (0,1]$ と $C \setminus \{(0,0)\}$ から A を除いた部分はどちらも弧状連結なので連結です。このとき $(0,1)$ を含む $C \setminus \{(0,0)\}$ の開集合 U は $\mathbb{R}^2$ の開集合 V によって $U = (C \setminus \{(0,0)\}) \cap V$ と表されるので、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $(1/n, 1) \in U$ となります。よって $C \setminus \{(0,0)\}$ は連結です。 □

4.2.4 ハウスドルフ空間

ハウスドルフ性は開集合が「少なすぎない」ことを保証します。

定義 4.35: ハウスドルフ空間

位相空間 X の任意の異なる 2 点 $p, q \in X$ について、X の開集合 U, V が存在して

$$p \in U, \ q \in V, \ U \cap V = \varnothing$$

を満たすとき、X はハウスドルフ空間であるという。

$\mathbb{R}^m$ と微分可能多様体はハウスドルフ空間です。ハウスドルフ空間でない位相空間は変わっているように思えますがたくさんあります。例えば 2 つ以上の元を含む集合 X に密着位相を入れるとハウスドルフ空間ではない位相空間になります。

ハウスドルフ空間では、$\mathbb{R}^m$ などで成り立つ様々な直感的な性質が成り立ちます。

命題 4.36: ハウスドルフ空間の 1 点集合は閉集合

ハウスドルフ空間 X の 1 点集合は閉集合である。

証明. $p \in X$ を固定します。任意の $q \in X$ について、$p \neq q$ なら X がハウスドルフ空間なので開集合 U_q が存

在して $p \notin U_q, q \in U_q$ を満たします。よって

$$X \setminus \{p\} = \bigcup_{q \neq p} U_q$$

と書けるので $X \setminus \{p\}$ は開集合であり、$\{p\}$ は閉集合です。 □

1 点集合が閉集合であるような位相空間は T_1 空間と呼ばれるので、この命題はハウスドルフ空間は T_1 空間であるとも言い換えられます。

命題 4.37: ハウスドルフ空間のコンパクト部分空間は閉集合

ハウスドルフ空間 X のコンパクトな部分空間 K は X の閉集合である。

証明. $K = \varnothing, X$ であるときは明らかなので、そうでない場合を考えます。$p \in X \setminus K$ を固定します。X はハウスドルフ空間なので、任意の $x \in K$ に対して p, x の X における開近傍 U_x, V_x が存在して $U_x \cap V_x = \varnothing$ を満たします。このとき $(K \cap V_x)_{x \in K}$ は K の開被覆であり、K がコンパクトであることから有限開被覆 $(K \cap V_i)_{i=1,\cdots,n}$ を取り出すことができます。

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

と置くと、U は $\bigcup_{i=1}^{n} V_i$ と交わらない開集合なので、

$$p \in U \subset X \setminus K$$

が成り立ちます。$p \in X \setminus K$ は任意なので、命題 4.9 より $X \setminus K$ は開集合であり、K は閉集合です。 □

相対位相の定義から明らかに、ハウスドルフ空間の部分空間はハウスドルフ空間になります。

4.2.5 第二可算

第二可算性は開集合が「多すぎない」ことを保証します。第二可算性を定義するために、微分可能多様体における開集合の定義の仕方を一般化して開基を定義します。

定義 4.38: 開基

位相空間 X の開集合からなる集合 $\mathcal{B}$ が X の開基であるとは、X の任意の開集合が $\mathcal{B}$ の元の任意個の和集合として表せることをいう。ただし空集合 $\varnothing$ は 0 個の和集合と考える。

例 4.39: $\mathbb{R}^m$ の開基

$\mathbb{R}^m$ においては、全ての開球を集めた集合

$$\mathcal{B} = \{B(\boldsymbol{x}, r) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m, r > 0\}$$

が開基になります。実際、任意の $\mathbb{R}^m$ の開集合 U の各点 $\boldsymbol{x} \in U$ に対し、開集合の定義から $r_{\boldsymbol{x}} > 0$ が存在して $B(\boldsymbol{x}, r_{\boldsymbol{x}}) \subset U$ となるので、U を

$$U = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in U} B(\boldsymbol{x}, r_{\boldsymbol{x}})$$

と表すことができます。さらにどんな実数でも、いくらでも近くに有理数があるので中心と半径を有理数に制限して

$$\mathcal{B} = \{B(\boldsymbol{x}, r) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{Q}^m, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$$

としても開基になります。

例 4.40: 微分可能多様体の開基

m 次元微分可能多様体 M の位相の定義および、上で述べた $\mathbb{R}^m$ の可算な開基の取り方から、可算個の座標近傍 $(U_n, \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を用いて

$$\mathcal{B} = \{\varphi_n^{-1}(B(\boldsymbol{x}, r)) \mid n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{x} \in U_n \cap \mathbb{Q}^m, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$$

とすると、$\mathcal{B}$ は M の開基になります。

定義 4.41: 第二可算

位相空間 X が高々可算な開基を持つとき、X は第二可算であるという。

例 4.39 と例 4.40 から $\mathbb{R}^m$ と微分可能多様体は第二可算です。第一可算という概念もありますが、そんなに出てこないので割愛します。

第二可算な位相空間 X の部分空間 A は第二可算になります。X の開基 $\mathcal{B}$ から A に含まれないものを除いたものが A の開基になるからです。

4.2.6 直積位相

開基の概念を使って位相空間の直積に位相を入れることができます。

定義 4.42: 直積位相

位相空間 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ について、

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$$

を開基としてできる $X \times Y$ の位相を直積位相という。

4.3 位相多様体

微分可能多様体から座標変換が滑らかであるという条件を抜いたものが位相多様体です。

定義 4.43: 局所ユークリッド

位相空間 X の任意の点 $p \in X$ に対し、p の開近傍 U が存在して $\mathbb{R}^m$ の開集合 V と同相になるとき、X は m 次元局所ユークリッドであるという。

定義 4.44: 位相多様体

位相空間 X が次の条件を満たすとする。

(1) X はハウスドルフ空間である。
(2) X は第二可算である。
(3) X は m 次元局所ユークリッドである。

このとき X は m 次元位相多様体であるという。

微分可能多様体の定義 (定義 2.1) の条件 (1)(2)(3) は局所ユークリッド性を、(4) は第二可算性を、(5) はハウスドルフ性を保証しています。よって微分可能多様体は位相多様体です。

実は位相多様体の定義からは、空でない m 次元位相多様体がさらに $n(\neq m)$ 次元位相多様体になる可能性を直ちに否定できません。しかし特異ホモロジー理論やド・ラームコホモロジーなどの高度な道具を使えば、次の定理を示すことができます。

定理 4.45: 次元の位相不変性

空でない m 次元位相多様体は、$n = m$ でない限り n 次元位相多様体と同相にならない。

よって空でない位相多様体の次元は well-defined な位相的性質です。

位相多様体はハウスドルフ空間、第二可算、局所ユークリッドという良い性質によって定義されているので、振る舞いが非常に良いです。

定義 4.46: 局所コンパクト

位相空間 X の任意の点 $p \in X$ に対して、p を含むコンパクトな近傍が存在するとき、X は局所コンパクトであるという。

コンパクト空間が局所コンパクトになるのは定義から明らかです。局所コンパクトの定義には複数の流儀がありますが、局所コンパクトハウスドルフ空間を考える限りは全て同値になります (たぶん)。例えば次の命題の (2) を定義とする場合があります。

命題 4.47

ハウスドルフ空間 X に対して次の 2 つは同値である。

(1) X は局所コンパクトである。
(2) 任意の X の点に対して相対コンパクトな開近傍が存在する。

証明. $p \in X$ の相対コンパクトな開近傍 U があれば、閉包 $\overline{U}$ はコンパクトな p の近傍です。

逆に $p \in X$ のコンパクトな近傍 A があれば、$\mathrm{Int}\, A$ は p の開近傍です。X がハウスドルフ空間であることから A は閉集合なので $\overline{\mathrm{Int}\, A} = A$ が成り立ち、$\mathrm{Int}\, A$ は相対コンパクトな p の開近傍になります。 $\square$

命題 4.48

m 次元局所ユークリッド空間 X は局所コンパクトである。

証明. X が空なら自明なので、X は空でないとします。任意の $p \in X$ に対して局所ユークリッド性から p の開近傍 U が存在して $\mathbb{R}^m$ の開集合 V と同相になります。同相写像を $f: U \to V$ とすると、$\mathbb{R}^m$ における開集合の定義から $r > 0$ が存在して開球

$$B(f(p), r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid |\boldsymbol{x} - f(p)| < r\}$$

が $f(p) \in B(f(p), r) \subset V$ を満たします。このとき $\overline{B(f(p), r/2)}$ はハイネ・ボレルの被覆定理から V のコンパクト部分集合であり、$f(p) \in \overline{B(f(p), r/2)} \subset B(f(p), r) \subset V$ を満たします。また連続写像 $f^{-1}: V \to U$ によるコンパクト集合 $\overline{B(f(p), r/2)}$ の像はコンパクトなので、

$$A = f^{-1}\left(\overline{B(f(p), r/2)}\right)$$

は U のコンパクト部分集合であり、$p \in A \subset U$ を満たします。p は任意なので、X は局所コンパクトです。 □

応用上重要な位相多様体の性質は、パラコンパクトであることです。パラコンパクトはコンパクトの定義で「有限」を「局所有限」に替え、「部分開被覆」を「開細分」に替えて定義されます。

定義 4.49: パラコンパクト

X を位相空間とする。

(1) X の部分集合からなる集合 $\mathcal{X}$ が局所有限であるとは、任意の $p \in X$ に対して p の近傍 A が存在して、高々有限個の $\mathcal{X}$ の元と交わることをいう。
(2) X の開被覆 $\mathcal{V}$ が別の開被覆 $\mathcal{U}$ の開細分であるとは、任意の $V \in \mathcal{V}$ に対して $U \in \mathcal{U}$ が存在して $V \subset U$ を満たすことをいう。
(3) X の任意の開被覆が局所有限な開細分を持つとき、X はパラコンパクトであるという。

コンパクト空間がパラコンパクトになるのは定義から明らかです。さらに位相多様体もパラコンパクトになります。準備として次の命題を示します。

命題 4.50: コンパクト集合による exhaustion

第二可算な局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対し、コンパクトな部分空間の列 $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ であって、次の条件

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$
(2) $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$

を満たすものが存在する。これを X のコンパクト集合による exhaustion と呼ぶ。

証明. X が第二可算であることから、高々可算な開基 $\mathcal{B}$ をとることができます。また X は局所コンパクトハウスドルフ空間なので、任意の点 $p \in X$ に対して相対コンパクトな開近傍 V_p をとることができ、$\mathcal{B}$ は開基なので $U_p \in \mathcal{B}$ が存在して $p \in U_p \subset V_p$ を満たします。このとき $(U_p)_{p\in X}$ は高々可算な集合族 $\mathcal{B}$ から取って作ったものなので可算であり、$(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ と番号付けることができます。またコンパクト空間の閉集合はコンパクトなので、$(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は X の相対コンパクトな開被覆になります。これを使って $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を帰納的に次のように構成します。

(1) $K_0 = \overline{U_0}$ とします。

(2) K_n がコンパクトであり $U_n \subset K_n$ を満たすように構成されているとします。$(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は K_n の被覆なので $m_n \in \mathbb{N}$ が存在して $U_1, \cdots, U_{m_n}$ が K_n の有限開被覆になります。このとき

$$K_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{m_n} \overline{U_i}$$

は有限個のコンパクト集合の和集合なのでコンパクトであり、$K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$ となります。また m_n を $m_n \geq k+1$ を満たすように取れば $U_{n+1} \subset K_{n+1}$ となります。

条件 (1) は構成から明らかで、$(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $U_n \subset K_n$ を満たすので条件 (2) も成り立ちます。 □

定理 4.51

位相多様体 X はパラコンパクトである。

証明. $\mathcal{B}$ を X の開基とし、X のコンパクト集合による exhaustion を $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とします。さらに $i\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} V_i &= K_{i+1} \setminus \operatorname{Int} K_i \\ W_i &= \operatorname{Int} K_{i+2} \setminus K_{i-1}, \qquad (K_{-1} = \varnothing \text{と考える}) \end{aligned}$$

と置きます。するとコンパクト集合の閉部分集合はコンパクトなので $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ はコンパクト集合の列であり、コンパクト集合は閉集合なので $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は開集合の列になります。さらに

$$V_i \subset W_i$$

も成り立ちます。

$\mathcal{U}$ を任意の X の開被覆とすると、任意の $p \in X$ に対して $X_p \in \mathcal{U}$ が存在して $p \in X_p$ となります。$\mathcal{B}$ は開基なので、$B_p \in \mathcal{B}$ が存在して

$$p \in B_p \subset X_p \cap W_i$$

が成り立ちます。$(B_p)_{p\in V_i}$ は V_i の開被覆なので、有限開被覆 $\mathcal{V}_i$ が存在します。このとき

$$\mathcal{V} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_i$$

は可算な M の開被覆であり、$\mathcal{U}$ の開細分です。また $\mathcal{V}_i$ の元は全て W_i の部分集合であり、W_i, W_j は $|i-j| \leq 2$ のとき以外では交わらないので $\mathcal{V}$ は局所有限です。 □

この証明から、位相多様体 X の任意の開基 $\mathcal{B}$ と開被覆 $\mathcal{U}$ に対して、$\mathcal{B}$ の元から成る $\mathcal{U}$ の局所有限な開細分を得ることができます。このことは後で 1 の分割の存在を示すときに使います。

4.4 微分構造

この記事では微分可能多様体を先に定義しましたが、普通は位相多様体に微分構造を加えたものとして微分可能多様体は定義されます。ここでは普通の定義を紹介します。

定義 4.52: 座標近傍

m 次元位相多様体 M の開集合 U と $\mathbb{R}^m$ の開集合 V への同相写像 $\varphi : U \to V$ の組 (U, φ) を座標近傍という。

定義 4.53: 座標近傍系

$1 \leq r \leq \infty$ とする。位相多様体 M の座標近傍の族 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ が次の条件を満たすとする。

(1) 任意の $\alpha, \beta \in A$ に対し、$U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ であるか、座標変換

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{U_\alpha \cap U_\beta} : \varphi_1(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

が C^r 級写像である。

(2) $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ は M の開被覆である。

このとき、$(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ は C^r 級座標近傍系であるという。

定義 4.54: 微分構造

位相多様体 M の C^r 級座標近傍系 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ と座標近傍 (U, α) が両立可能であるとは、$U_\alpha \cap U \neq \varnothing$ であるような任意の $\alpha \in A$ に対して

$$\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}|_{U_\alpha \cap U} : \varphi(U_\alpha \cap U) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U)$$
$$\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{U_\alpha \cap U} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U) \to \varphi(U_\alpha \cap U)$$

が C^r 級写像であることをいう。

位相多様体 M の C^r 級座標近傍系 $\mathcal{A}$ と両立可能な全ての座標近傍を集めて作った座標近傍系を $\mathcal{A}$ から定まる C^r 級微分構造と呼ぶ。

定義 4.55: C^r 級多様体

位相多様体 M と C^r 級微分構造 $\mathcal{A}$ の組 $(M, \mathcal{A})$ を C^r 級多様体と呼ぶ。

位相多様体に対して C^r 級微分構造は一意に定まりません。例えば $\mathbb{R}$ には 2 つの定義域が $\mathbb{R}$ であるような 2 つの座標系

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$$
$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$$

を定義することができますが、$\varphi \circ \psi^{-1}(x) = x^{1/3}$ は原点で微分可能ではありません。よって $r \geq 1$ のとき、座標近傍 $(\mathbb{R}, \varphi)$ と $(\mathbb{R}, \psi)$ は位相多様体 $\mathbb{R}$ に 2 つの違う C^r 級微分構造を定めます。

これでは不便なので、2 つの微分構造が同値であることを定めます。微分同相写像は定義 2.18 のように定義します。

定義 4.56

位相多様体 M の C^r 級微分構造 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が同値であるとは、C^r 級多様体 $(M, \mathcal{A})$ と $(M, \mathcal{B})$ が C^r 級微分同相であることをいう。

$(\mathbb{R}, \varphi), (\mathbb{R}, \psi)$ が定める C^r 級多様体をそれぞれ $\mathbb{R}, \tilde{\mathbb{R}}$ と書くと、これらは

$$F : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}},\ x \mapsto x^{1/3}$$

によって微分同相になります。実際、F の局所座標表示は

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t$$

となるので C^∞ 級です。よって $\mathbb{R}, \tilde{\mathbb{R}}$ の微分構造は同値です。

ここまで $1 \leq r \leq \infty$ として C^r 級多様体を考えてきましたが、実は $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ であるとき、C^r 級座標近傍系が定める C^r 級微分構造には、必ず C^∞ 級座標近傍系が含まれていることが知られています。さらに異なる 2 つの C^∞ 級座標近傍系が含まれていても、それらは C^∞ 級微分同相であることも知られています。よって、実は $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対して C^r 級微分構造を考えることにあまり意味はなく、C^∞ 級微分構造だけを考えてもよいです。このため C^∞ 級微分構造のことを単に微分構造と呼び、C^∞ 級多様体のことを単に微分可能多様体と呼びます。

任意の位相多様体の上に微分構造が存在するか、そして存在すれば 1 つなのかが気になるところですが、3 次元以下の位相多様体には微分構造が存在し、微分同相を除いて一意であることが知られています。一方、4 次元以上の位相多様体には、微分構造が存在しないものや、複数の微分構造が存在するものがあります。

有名な例として、$\mathbb{R}^n$ は $n \neq 4$ のときはちょうど 1 個の微分構造を持ちますが、$n = 4$ のときは非可算無限個の微分構造を持つことが証明されています (エキゾチック $\mathbb{R}^4$)。また、7 次元球面 S^7 はちょうど 28 個の微分構造を持つことが証明されています (エキゾチック球面)。

この節の終わりに、2 章で与えた多様体の定義を正当化しておきます。

命題 4.57: 微分可能多様体の構成

集合 M の部分集合 U_α と写像 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ の族 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ が次の条件を満たすとする。

(1) 任意の $\alpha \in A$ に対し、φ_α は U_α と $\mathbb{R}^n$ の開集合との全単射である。
(2) 任意の $\alpha, \beta \in A$ に対し、$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ と $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。
(3) 任意の $\alpha, \beta \in A$ に対し、$U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ なら、$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^∞ 級写像 (何回でも微分できる写像) である。
(4) 高々可算個の U_α の和集合が M になる。
(5) 任意の $p, q \in M$ に対して、$p, q \in U_\alpha$ を満たす U_α が存在するか、$p \in U_\alpha, q \in U_\beta$ および $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ を満たす U_α, U_β が存在する。

このとき、$(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ が M の C^∞ 級座標近傍系となるような位相および微分構造が M に一意に定まる。

証明. M の位相は定義 2.6 によって定義します。位相の定義から φ_α は U_α と $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ との同相写像なので、M は n 次元局所ユークリッドです。また条件 (5) からハウスドルフ性が、条件 (4) から第二可算性が成

り立ちます。よって M は n 次元位相多様体であり、条件 (3) から $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ は C^∞ 級座標近傍系になります。 □

4.5　1 の分割

定義 4.58: 1 の分割

微分可能多様体 M の開被覆 $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ について、$(\psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が条件

(1) $\psi_\lambda \in C^\infty(M)$ であり、任意の $p \in M$ で $\psi_\lambda(p) \geq 0$ である。

(2) ψ_λ の台を

$$\operatorname{supp} \psi_\lambda = \overline{\{p \in M \mid \psi_\lambda(p) \neq 0\}}$$

と定義すると $\operatorname{supp} \psi_\lambda \subset U_\lambda$ である。

(3) $(\operatorname{supp} \psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は局所有限である。

(4) 任意の点 $p \in M$ で $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(p) = 1$ が成り立つ。

を満たすとき、$(\psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に従属した 1 の分割であるという。

条件 (4) の和は条件 (3) によって有限和になるので、収束性を気にする必要はありません。これが局所有限性を考える理由です。

次の定理から 1 の分割の存在が保証されます。

定理 4.59: 1 の分割の存在

任意の微分可能多様体 M の開被覆 $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し、$(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に従属した 1 の分割 $(\psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が存在する。

証明. 微分可能多様体 M の開集合 U_λ はそれ自身を微分可能多様体とみなすことができます。このとき U_λ の開基 $\mathcal{B}_\lambda$ を例 4.40 のようにとると、$\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda$ は M の開基になります。

ここで、定理 4.51 の証明から M の開被覆 $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対して $\mathcal{B}$ の元から成る局所有限な開細分 $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ が存在します。それぞれの B_α はどれかの $\mathcal{B}_\lambda$ の元なので、$\overline{B_\alpha} \subset B'_\alpha$ を満たす $B'_\alpha \in \mathcal{B}_\lambda$ と C^∞ 級写像 $\varphi : B'_\alpha \to \mathbb{R}^n$ が存在して $r'_\alpha > r_\alpha > 0$ を用いて

$$B_\alpha = \varphi^{-1}(B(0, r_\alpha))$$
$$B'_\alpha = \varphi^{-1}(B(0, r'_\alpha))$$

と書けます。このとき $H_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $B(0, r_\alpha)$ 上で正であり、その他で 0 であるような C^∞ 級関数として、$f_\alpha : M \to \mathbb{R}$ を

$$f_\alpha = \begin{cases} H_\alpha \circ \varphi_\alpha, & (B(0, r'_\alpha)\text{上で}) \\ 0, & (M \setminus \overline{B(0, r_\alpha)}\text{上で}) \end{cases}$$

と定義すると B_α 上で正であり、その他で 0 であるような C^∞ 級関数になります。

$f: M \to \mathbb{R}$ を

$$f = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha$$

と定義します。$(\overline{B_\alpha})_{\alpha \in A}$ は局所有限なので、右辺は各点ごとに有限和となるので収束性を気にする必要はなく、f は C^∞ 級関数になります。また f_α は B_α 上で正なので f は M 上正になります。そこで $g_\alpha: M \to \mathbb{R}$

$$g_\alpha = \frac{f_\alpha}{f}$$

を定義することができ、g_α は C^∞ 級関数になります。

このとき $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ は $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の開細分なので、B_α に対して $B_\alpha \subset U_{\lambda(\alpha)}$ を満たすものが存在します。そこで

$$\psi_\lambda = \sum_{\alpha : \lambda = \lambda(\alpha)} g_\alpha$$

とすれば、局所有限な集合族において和集合と閉包は交換するので

$$\operatorname{supp} \psi_\lambda = \overline{\bigcup_{\alpha : \lambda = \lambda(\alpha)} B_\alpha} = \bigcup_{\alpha : \lambda = \lambda(\alpha)} \overline{B_\alpha} \subset U_\lambda$$

が成り立ちます。さらに $(\operatorname{supp} \psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は局所有限であり、$\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda = 1$ および $0 \leq \psi_\lambda \leq 1$ を満たすので $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に従属した 1 の分割です。 □

1 の分割の存在から、接ベクトルが局所的であることの証明に使った隆起関数が存在することが言えます。

定理 4.60

微分可能多様体 M の閉集合 A と A を含む開集合 U に対し、次の条件を満たす $\psi \in C^\infty(M)$ が存在する。

(1) M 上で $0 \leq \psi \leq 1$ である。
(2) A 上で $\psi = 1$ である。
(3) $\operatorname{supp} \psi \subset U$ である。

このとき ψ を U に台を持つ A の隆起関数と呼ぶ。

証明. $\{U, M \setminus A\}$ は M の開被覆になるのでこれに従属した 1 の分割 $\{\psi_0, \psi_1\}$ が存在します。このとき ψ_0 は条件を満たします。 □

5　境界付き多様体と部分多様体

5.1　境界付き多様体

位相多様体は第二可算なハウスドルフ空間であって、各点が $\mathbb{R}^n$ の開集合と同相であるような近傍を持つものとして定義されていました。この定義を拡張して、「境界」を持つ多様体を定義します。

定義 5.1: 上半空間

$\mathbb{R}^n$ の部分空間

$$\mathbb{H}^n = \{(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}$$

を n 次元上半空間と呼ぶ。

$\mathbb{H}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の部分集合と考えたときの内部と境界を

$$\begin{aligned} \operatorname{Int} \mathbb{H}^n &= \{(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\} \\ \partial \mathbb{H}^n &= \{(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n = 0\} \end{aligned}$$

とします。

定義 5.2: 境界付き多様体

第二可算なハウスドルフ空間 M が n 次元境界付き位相多様体であるとは、M の任意の点が $\mathbb{R}^n$ の開集合か、$\mathbb{H}^n$ の開集合のどちらかと同相であるような近傍を持つことをいう。

定義 5.3: 境界付き多様体の座標近傍

境界付き位相多様体 M の開集合 U と写像 $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ の組 (U, φ) が M の座標近傍であるとは、φ が U から $\mathbb{R}^n$ の開集合あるいは $\mathbb{H}^n$ の開集合への同相写像であることをいう。

M の座標近傍 (U, φ) が M の内部座標近傍であるとは、$\varphi(U)$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることをいう。(U, φ) が境界座標近傍であるとは、$\varphi(U)$ が $\mathbb{H}^n$ の開集合であって、$\varphi(U) \cap \partial \mathbb{H}^n \neq \varnothing$ であることをいう。

M に内部と境界を定義することができます。

定義 5.4: 境界・内部

境界付き位相多様体の点 $p \in M$ が M の内点であるとは、内部座標近傍 (U, φ) が存在して $p \in U$ となることをいう。M の内点の全体を $\operatorname{Int} M$ と書く。

$p \in M$ が境界点であるとは、境界座標近傍 (U, φ) が存在して $p \in U$ かつ $\varphi(p) \in \partial \mathbb{H}^n$ となることをいう。M の境界点の全体を ∂M と書く。

境界付き位相多様体 M が何らかの位相空間の部分集合として定義されている場合、境界付き位相多様体としての境界・内部と位相空間の部分集合としての境界・内部を区別する必要があります。ここでは区別が必要なときは前者を「多様体としての境界」と呼び、後者を「位相的な境界」と呼ぶことにします。

境界付き位相多様体の定義から、全ての点 $p \in M$ が内点と境界点のどちらかになることは明らかなので $M = \operatorname{Int} M \cup \partial M$ が成り立ちます。しかし内点でありかつ境界点であるような点が存在する可能性は、定義から直ちに否定できません。実際にはこのようなことは起こらないのですが、次元の位相不変性と同じく証明にはかなり長い準備が必要です。ここでは事実として次の定理が成り立つことを述べておきます。

定理 5.5: 境界の位相不変性

境界付き位相多様体 M について、$\operatorname{Int} M \cap \partial M = \varnothing$ が成り立つ。

この定理から $\partial M \neq \varnothing$ のとき境界付き位相多様体 M は位相多様体にならないことが分かります。また境界付き位相多様体は $\partial M = \varnothing$ のとき普通の位相多様体になるので、位相多様体よりも広い概念です。

さらに $\operatorname{Int} M$ と ∂M はそれ自体が位相多様体になります。

命題 5.6

M を n 次元境界付き位相多様体とする。

(1) $\operatorname{Int} M$ は M の開集合であり、n 次元位相多様体である。
(2) ∂M は M の閉集合であり、$n-1$ 次元位相多様体である。

証明.

(1) 任意の $p \in \operatorname{Int} M$ に対して内部座標近傍 (U, φ) が存在して $p \in U$ となります。このとき開集合 U の点は全て M の内点なので、$U \subset \operatorname{Int} M$ が成り立ちます。よって命題 4.9 から $\operatorname{Int} M$ は M の開集合になります。また $\operatorname{Int} M$ が n 次元位相多様体になるのは明らかです。
(2) 境界の位相不変性から $\partial M = M \setminus \operatorname{Int} M$ なので、∂M は M の閉集合です。また境界座標近傍 (U, φ) について、$V = \varphi(U) \cap \partial \mathbb{H}^n$ とすると制限 $\varphi|_{\varphi^{-1}(V)} : \varphi^{-1}(V) \to V$ は同相写像になります。よって第 n 成分を無視すれば $(\varphi^{-1}(V), \varphi|_{\varphi^{-1}(V)})$ は $n-1$ 次元座標近傍になるので、∂M は $n-1$ 次元位相多様体になります。

□

次に境界付き位相多様体の上で微分構造を考えます。このとき問題になるのは、境界の微分をどう考えるかです。例えば $A \subset \mathbb{R}^n$ として $f : A \to \mathbb{R}^m$ を考えると、A が開集合でなければ位相的な境界 ∂A 上で f の微分可能性をそのまま定義することはできません。そこで次のように微分可能性を定義します。

定義 5.7

$A \subset \mathbb{R}^n$ 上の関数 $f : A \to \mathbb{R}^m$ が C^∞ 級であるとは、$\mathbb{R}^n$ の開集合 U と C^∞ 級関数 $F : U \to \mathbb{R}^m$ が存在して $A \subset U$ と $F|_A = f$ を満たすことをいう。

つまり $A \subset \mathbb{R}^n$ 上の関数 f が C^∞ 級であることを、f が $\mathbb{R}^n$ の開集合を定義域とする C^∞ 級関数に拡張できることとして定義します。これによって C^∞ 級座標近傍や微分構造を通常の微分可能多様体と同じように定義することができます。ベクトル場や微分形式などの概念も同様に定義されます。

5.2　部分多様体

n 次元境界付き微分可能多様体 M に対し、∂M に微分構造を与えて $n-1$ 次元微分可能多様体にすることができます。このように多様体の部分集合として実現される多様体は部分多様体と呼ばれます。

定義 5.8: はめ込み・沈め込み

M, N をそれぞれ m, n 次元境界付き微分可能多様体とし、$F: M \to N$ を C^∞ 級写像とする。F がはめ込みであるとは、任意の点 $p \in M$ において F の微分 $F_{*p}: T_pM \to T_{F(p)}N$ の階数 $r = \dim(\mathrm{Im}\, F_{*p})$ が一定であるとき、F は一定の階数 r を持つという。

F が一定の階数 r を持つとき次のように定義する。

(1) $r = m$ のとき、F ははめ込みであるという。
(2) $r = n$ のとき、F は沈め込みであるという。

つまり、任意の点 $p \in M$ で F_{*p} が単射であれば F ははめ込みであり、全射であれば F は沈め込みです。

例 5.9

球面 S^n から $\mathbb{R}^{n+1}$ への包含写像 $i: S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ははめ込みです。例えば座標近傍 $(U^+_{n+1}, \varphi^+_{n+1})$ に対して

$$i(x^1, \cdots, x^n) = (x^1, \cdots, x^m, \sqrt{1-(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2})$$

となるので、ヤコビ行列の階数は n です。

行列を階数標準形に変形できることと同様に、一定の階数を持つ C^∞ 級写像も任意の点の近傍上で標準形に変換できます。証明は省略します。

定理 5.10: 一定の階数を持つ写像の局所座標表示

M, N をそれぞれ m, n 次元微分可能多様体とし、$F: M \to N$ を一定の階数 r を持つ C^∞ 級写像とする。このとき任意の点 $p \in M$ において M の座標近傍 (U, φ) と N の座標近傍 (V, ψ) が存在して $p \in U, F(p) \in V$ と $\varphi(p) = (0, \cdots, 0), \psi(p) = (0, \cdots, 0)$ および

$$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x^1, \cdots, x^m) = (x^1, \cdots, x^r, 0, \cdots, 0)$$

が成り立つ。

さらに、位相を保つような埋め込みを埋め込みと呼びます。

定義 5.11: 埋め込み

M, N を境界付き微分可能多様体とする。はめ込み $F: M \to N$ が埋め込みであるとは、F が M から部分空間 $F(M) \subset N$ への同相写像であることをいう。

連続全単射は同相であるとは限らないので、単射なはめ込みは埋め込みであるとは限りません。

例 5.12

包含写像 $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ははめ込みであり、相対位相の定義から $i : S^n \to i(S^n)$ は同相写像なので埋め込みでもあります。

定義 5.13: 埋め込まれた部分多様体

境界付き微分可能多様体 M の部分集合 S が M からの相対位相について (境界を持たない) 位相多様体であり、さらに包含写像 $i : S \to M$ が埋め込みになるような微分構造が定められているとき、S は M に埋め込まれた部分多様体であるという。また M の次元と S の次元の差 $\dim M - \dim S$ を余次元という。

$i : S \to M$ がはめ込みである場合ははめ込まれた部分多様体であるといいます。
S^n は $\mathbb{R}^{n+1}$ に埋め込まれた部分多様体です。一番簡単な埋め込まれた部分多様体は、開部分多様体です。

命題 5.14: 開部分多様体

微分可能多様体 M の開集合 U は、M の座標近傍系のうち定義域が U に含まれるものを U の座標近傍系とすることで微分可能多様体になる。このとき U は M に埋め込まれた部分多様体である。

証明. 包含写像 $i : U \to M$ は相対位相の定義から連続であり、$i : U \to i(U)$ は同相写像になります。任意の $p \in M$ に対して U の座標近傍 (V, φ) は M の座標近傍でもあり、i の局所座標表示は恒等写像 $\mathrm{Id}_V : \varphi(V) \to \varphi(V)$ になるので C^∞ 級であり、i は埋め込みになります。 □

例えば $\mathbb{R}^n$ の開集合は開部分多様体になります。さらに境界付き多様体の境界も部分多様体になります。これを示すために次の定理を示します。

定理 5.15: 部分多様体の座標近傍

M を n 次元微分可能多様体とする。

(1) $S \subset M$ を M に埋め込まれた k 次元部分多様体とすると、任意の点 $p \in S$ に対して M の座標近傍 (U, φ) が存在して $p \in U$ および

$$\varphi(S \cap U) = \{(x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n) \in \varphi(U) \mid x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\}$$

を満たす。

(2) 逆に、部分集合 $S \subset M$ について、任意の点 $p \in S$ に対して M の座標近傍 (U, φ) が存在して $p \in U$ および

$$\varphi(S \cap U) = \{(x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n) \in \varphi(U) \mid x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\}$$

を満たすという条件が成り立つなら、S は M からの相対位相について k 次元位相多様体となる。さらに S が M に埋め込まれた k 次元部分多様体となるような微分構造を S に定めることができる。

証明.

(1) S が M に埋め込まれた k 次元部分多様体であるとします。定理 5.10 から任意の $p \in S$ に対して S の座標近傍 (U, φ) と M の座標近傍 (V, ψ) があって $\varphi(p) = 0, \psi(p) = 0$ を満たし、包含写像 $i : S \to M$ は

$$(\psi \circ i|_U \circ \varphi)(x^1, \cdots, x^k) = (x^1, \cdots, x^k, 0, \cdots, 0)$$

と局所座標表示できます。このとき $\varepsilon > 0$ を小さく取れば、S の開集合 $U_0 = \varphi^{-1}(B^n(\varphi(p), \varepsilon))$ と M の開集合 $V_0 = \psi^{-1}(B^k(\psi(p), \varepsilon))$ が $U_0 \subset U, V_0 \subset V$ を満たすようにできます。S に M からの相対位相が入っていることから M の開集合 W が存在して $S \cap W = U_0$ を満たすので、$V_1 = V_0 \cap W$ とすると $(V_1, \psi|_{V_1})$ は p を含む M の座標近傍です。さらに $S \cap V_1 = U_0$ なので

$$\psi|_{V_1}(S \cap V_1) = \{(x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n) \in \psi(V_1) \mid x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\}$$

が成り立ちます。

(2) S に M からの相対位相を与えると、S はハウスドルフかつ第二可算になります。さらに任意の点 $p \in S$ に対して M の座標近傍 (U, φ) が存在して

$$\varphi(S \cap U) = \{(x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n) \in \varphi(U) \mid x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\}$$

を満たすので、$\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ を最初の k 個の成分への射影とすると $(S \cap U, \pi \circ \varphi)$ は p を含む S の座標近傍になります。よって S は k 次元局所ユークリッドであり、k 次元位相多様体になります。
このとき M の座標近傍 $(U, \varphi), (U', \varphi')$ に対応する S の座標近傍を $(V, \psi), (V', \psi')$ とし、$j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ を $k+1$ 成分から n 成分までを 0 で埋める写像とすれば

$$\psi' \circ \psi^{-1} = \pi \circ \varphi' \circ \varphi^{-1} \circ j$$

が成り立ちます。よって座標変換 $\psi' \circ \psi^{-1}$ は C^∞ 級写像の合成なので C^∞ 級であり、M の座標近傍系によって微分構造が定まります。

□

また、$S \subset M$ が M の埋め込まれた部分多様体になるような S の位相および微分構造は一意であることも示せます。

例 5.16

微分可能多様体 M の接束 TM について、M は TM に埋め込まれた部分多様体になります。実際、M の座標近傍 (U, φ) に対応する TM の座標近傍を $(U \times \mathbb{R}^n, \varphi')$ とすると

$$\varphi'(U) = \{(p, v) \in \varphi'(U \times \mathbb{R}^n) \mid v = 0\}$$

が成り立ちます。

境界付き多様体 M では、境界 ∂M が部分多様体になります。

命題 5.17

n 次元境界付き微分可能多様体 M の境界 ∂M は M に埋め込まれた $n-1$ 次元部分多様体である。

証明. 任意の $p \in \partial M$ に対し、境界座標近傍 (U, φ) が存在して、任意の $q \in \varphi(U) \cap \partial M$ は

$$\varphi(q) = (x^1, \cdots, x^{n-1}, 0)$$

となります。そこで $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ を最初の $n-1$ 成分への射影とすれば、$(\varphi(U) \cap \partial M, \pi \circ \varphi)$ は ∂M の座標近傍になります。以降の証明は境界を持たない微分可能多様体のときと同じです。 $\square$

微分可能多様体 M の部分多様体 S について、包含写像 $i : S \to M$ を用いて $p \in S$ における接ベクトル空間 T_pS を T_pM の部分空間とみなすことができます。つまり、$v \in T_pS$ に対応する $\tilde{v} \in T_pM$ を $\tilde{v} = i_{*p}v$ と定義することができます。言い換えれば、$f \in C^\infty(M)$ に対して

$$\tilde{v}f = v(f \circ i)$$

と定義するということです。このとき次のように定義します。

定義 5.18

微分可能多様体 M の部分多様体 S の点 $p \in S$ における接ベクトル空間 T_pS を T_pM の部分空間とみなしたとき、$v \in T_pM$ が $v \in T_pS$ を満たすなら、v は S に接するという。

これによって、例 2.28 で定義せずに使った曲線 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ の接ベクトル $c'(t)$ が S^1 に接しているという言明を厳密に定義することができました。

6 微分形式の積分

n 次元微分可能多様体 M 上の関数 $f: M \to \mathbb{R}$ の積分を定義することは一般にはできません[*15]。例えば $\mathbb{R}^3$ の単位球

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{x}| \leq 1\}$$

の上で関数 $f \equiv 1$ を積分すると体積 $\dfrac{4}{3}\pi$ が得られるのが自然ですが、別の座標 $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{x}$ ではこの球の半径は 2 になるので、体積は 8 倍になってしまいます。よってユークリッド空間ですら関数の積分を座標に依らず定義することはできません。

しかし、n 次元微分可能多様体上の n 次微分形式の積分を定義することはできます。そのために色々と準備します。

6.1 多様体の向き付け

微分形式には交代性があるので、符号が問題になります。どんな多様体でも全体で一貫した符号をつけて積分ができるわけではありませんが、向き付け可能な多様体では一貫した符号をつけることができます。

まずベクトル空間の向きを定義します。

定義 6.1: ベクトル空間の向き

n 次元ベクトル空間 V の 2 つの基底 $(e_1, \cdots, e_n), (e'_1, \cdots, e'_n)$ について、$(e_1, \cdots, e_n)$ を $(e'_1, \cdots, e'_n)$ に移す行列を A とする。つまり

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} e_j$$

が成り立つとする。このとき A の行列式が正であれば、2 つの基底 $(e_1, \cdots, e_n), (e'_1, \cdots, e'_n)$ は同じ向きを持つという。

同じ向きを持つことは同値関係になり、$n \geq 1$ なら同値類は 2 つあります。2 つの同値類は同等ですが、どちらか一方を正の向きと定め、もう片方を負の向きと定めることができます。このようにしてベクトル空間に向きを定めることで、任意の基底が正の向きか負の向きか定まります。つまりベクトル空間の向きとは、正の向きを持つ基底の全体 $\mathcal{O}$ のことです。

多様体は任意の点の接ベクトル空間に一貫して向きを付けられるとき向き付け可能であるといいます。

定義 6.2: 向き付け可能性

n 次元微分可能多様体 M の任意の点 $p \in M$ における接ベクトル空間 T_pM に向き $\mathcal{O}_p$ が定められているとき、各点の $\mathcal{O}_p$ を集めた $\mathcal{O}$ を M の点ごとの向き付けと呼ぶ。

M の開集合 U 上で定義されたベクトル場 $e_1, \cdots, e_n \in \mathfrak{X}(U)$ が枠場であるとは、任意の点 $p \in M$ で $((e_1)_p, \cdots, (e_n)_p)$ が T_pM の基底であることをいう。さらに $((e_1)_p, \cdots, (e_n)_p)$ が正の向きである

[*15] リーマン計量があればできます。

とき、枠場 $(e_1, \cdots, e_m)$ は (正の向きに) 向き付けられた枠場であるという。

任意の点 $p \in M$ において、p を含む開集合で定義された向き付けられた枠場が存在するとき、点ごとの向き付け $\mathcal{O}$ は連続であるという。連続な点ごとの向き付けを M の向き付けという。M の向き付けが存在するとき、M は向きつけ可能であるという。

微分可能多様体 M と向き付け $\mathcal{O}$ の組 $(M, \mathcal{O})$ を向き付けられた多様体と呼ぶ。単に M のことを向き付けられた多様体と呼ぶこともある。

微分形式を用いて向き付けを扱うことができます。

命題 6.3

n 次元微分可能多様体 M 上の n 次微分形式 $\omega \in \Omega^n(M)$ が任意の点 $p \in M$ で $\omega_p \neq 0$ を満たすとき、ω は一意に M の向き付けを定める。逆に、M が向き付けられていれば任意の点 $p \in M$ で $\omega_p \neq 0$ を満たす n 次微分形式 $\omega \in \Omega^n(M)$ が存在する。

証明. 条件を満たす ω を用いて、点ごとの向き付けを $p \in M$ において

$$\omega_p(e_1, \cdots, e_n) > 0 \tag{8}$$

が成り立つとき T_pM の基底 $(e_1, \cdots, e_n)$ は正の向きであるとして定めることができます。実際、$(e_1, \cdots, e_n)$ を別の基底 $(e'_1, \cdots, e'_n)$ に移す行列を A とすると、

$$\omega_p(e'_1, \cdots, e'_n) = (\det A)\omega_p(e_1, \cdots, e_n)$$

が成立するので、確かに式 (8) は点 p における向きを定めています。

$p \in M$ を含む座標近傍 $(U; x^1, \cdots, x^n)$ を取ると、U 上で $f \in C^\infty(U)$ を使って

$$\omega_p = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

と書くことができます。このとき条件から U 上で $f \neq 0$ なので、p を含む U の連結成分上では $f > 0$ か $f < 0$ が成立します[*16]。$f > 0$ である場合は

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$$

が向き付けられた枠場になります。$f < 0$ のときは $\dfrac{\partial}{\partial x^1}$ を $-\dfrac{\partial}{\partial x^1}$ に替えたものが向き付けられた枠場になるので、ω から定まる点ごとの向き付けは連続であり、M の向き付けになります。 □

命題 3.8 を踏まえると、任意のシンプレクティック多様体には自然な向きが定まります。また 2 次元の向き付け可能多様体 M は、向き付け形式 $\omega \in \Omega^2(M)$ をシンプレクティック形式としてシンプレクティック多様体になります。例えば S^2 はシンプレクティック多様体になります。

次に座標近傍の向きを定義します。

[*16] f の符号が局所定数関数になるからです。

定義 6.4: 座標近傍の向き

微分可能多様体 M の座標近傍 $(U; x^1, \cdots, x^n)$ が正の向きであるとは、

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$

が正の向きに向き付けられた枠場であることをいう。負の向きの座標近傍も同様に定義する。

座標近傍の向きを用いて向き付けを定めることもできます。

命題 6.5

微分可能多様体 M の座標近傍系 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ が一貫して向き付けられているとは、任意の $\alpha, \beta \in A$ に対して座標変換 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ のヤコビアンが $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 上で正の行列式を持つことをいう。

一貫して向き付けられた座標近傍系 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ は、任意の $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ が正の向きであるような M の向き付けを一意に定める。

逆に M が向き付けられていれば、全ての正の向きの座標近傍を集めた集合は一貫して向き付けられた座標近傍系である。

証明. 一貫して向き付けられた座標近傍系 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ があるなら、座標近傍 $(U_\alpha; \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ に対して

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$

が正の向きになるように U_α 内で点ごとの向き付けを定めることができます。座標変換のヤコビアンが正であることから、2 つの座標近傍 $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ が重なっていても、$U_\alpha \cap U_\beta$ 上で点ごとの向き付けは一致します。またこの点ごとの向き付けは明らかに連続なので、M の向き付けになります。

逆に、M が向き付けられているとします。座標近傍 (U, φ) のうち U が連結であるものは、M の向き付けが連続であることから正の向きか負の向きかのいずれかになります。負の向きの座標近傍は x^1 を $-x^1$ にすることで正の向きになるので、正の向きの座標近傍を集めて M を覆うことができます。よって全ての正の向きの座標近傍を集めた集合は座標近傍系になり、座標変換のヤコビアンは正になるので一貫して向き付けられた座標近傍系になります。 □

6.2 境界の向き付け

境界付き微分可能多様体 M に対しても、向き付けの定義を同様にすることができ、命題 6.3 は成り立ちます。しかし命題 6.5 は一貫して向き付けられた座標近傍系が向き付けを定めることはよいのですが、$\partial M \neq \varnothing$ かつ $\dim M = 1$ の場合に全ての正の向きの座標近傍を集めた集合が座標近傍系にならないことがあるので一般には成り立ちません。

例えば $M = [0, 1]$ を考えると、$U_1 = [0, 2/3), U_2 = (1/3, 1]$ に対して

$$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{H}^1,\ x \mapsto x$$
$$\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{H}^1,\ x \mapsto 1 - x$$

と定義することで $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ が座標近傍系になりますが、M の向き付けをどちらに定義しても (U_1, φ_1) と (U_2, φ_2) の向きは必ず逆になります。しかし座標の値域が $\mathbb{H}^1$ になる必要があるので、座標を反転

して向きを変えることができず、正の向きの座標近傍だけを使って M を覆うことはできません。

このような問題はありますが、少し気をつければ境界付き多様体の向き付けも普通の多様体と同様に扱うことができます。さらに、境界付き多様体の向き付けは境界の向き付けを誘導します。これを示すためにいくつか準備します。

命題 6.6: 超曲面の向き付け

M を向き付けられた n 次元境界付き微分可能多様体とし、S を余次元 1 のはめ込まれた境界付き部分多様体 (M の超曲面であるという) とする。このとき M のベクトル場 N であって任意の点で S に接していないものが存在すれば、N によって S に向きが定まる。

証明. $\iota: S \to M$ を包含写像とし、$\omega \in \Omega^n(M)$ を M の向き付け形式とします。このとき S 上の $n-1$ 次微分形式

$$\sigma = \iota^*(i_N\omega)$$

が S の向き付け形式になることを示します。任意の $p \in S$ において、T_pS の基底を $(E_1, \cdots, E_{n-1})$ と取ると、$N_p \notin T_pS$ より $(N_p, E_1, \cdots, E_{n-1})$ は T_pM の基底になるので

$$\sigma_p(E_1, \cdots, E_{n-1}) = \omega(N_p, E_1, \cdots, E_{n-1}) \neq 0$$

が成り立ちます。よって $\sigma_p \neq 0$ であり、σ は向き付け形式になります。 □

境界は埋め込まれた超曲面なので、任意の点で境界に接しないベクトル場を作れば境界に向きを定めることができます。

定義 6.7: 外向きのベクトル

境界付き微分可能多様体 M の境界 ∂M の点 $p \in \partial M$ における接ベクトル $v \in T_pM \setminus T_p\partial M$ が外向きであるとは、$\varepsilon > 0$ と曲線 $c: (-\varepsilon, 0] \to M$ が存在して

$$c(0) = p,\ c'(0) = v$$

を満たすことをいう。

あるベクトルが外向きであるかどうかは、座標表示すれば簡単に確かめられます。

命題 6.8

境界付き微分可能多様体 M の点 $p \in \partial M$ における接ベクトル $v \in T_pM \setminus T_p\partial M$ が外向きであることは、p を含む境界座標近傍 $(U; x^1, \cdots, x^n)$ における v の x^n 成分が負であることと同値である。

証明. $v \in T_pM \setminus T_p\partial M$ の x^n 成分が負であれば、p の座標を $(y^1, \cdots, y^n)$ として

$$c(t) = (y^1, \cdots, y^{n-1}, y^n - vt)$$

が条件を満たします。

外向きのベクトル $v \in T_pM \setminus T_p\partial M$ の x^n 成分が 0 だと $v \in T_p\partial M$ になってしまうので v の x^n 成分は 0 ではありません。v の x^n 成分が正であるとします。v が外向きであることから曲線 $c: (-\varepsilon, 0] \to M$ が存在

して

$$c(0) = p,\ c'(0) = v$$

を満たすので、曲線の接ベクトルの定義から関数 $x^n \in C^\infty(U)$ に対し

$$v^n = v(x^n) = \frac{d(x^n \circ c)}{dt}$$

となります。このとき $x^n \circ c$ は $t = 0$ で 0 となり、$t < 0$ で非負の値をとるので、$t = 0$ における微分係数が正の値になることはありません。よって $v^n \leq 0$ となり矛盾します。 □

命題 6.9: 外向きのベクトル場

境界付き微分可能多様体 M 上のベクトル場であって、∂M 上で外向きであるものが存在する。

証明. M の座標近傍の族 $(U_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を M を被覆するように取ります。このとき $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ が境界座標近傍なら、座標基底の第 n 成分を取れば外向きのベクトル場 $X_\lambda \in \mathfrak{X}(U_\lambda)$ を定めることができます。内部座標近傍なら $X_\lambda = 0$ とします。このとき (U_λ) に従属する 1 の分割を用いて X_λ を貼り合わせれば外向きのベクトル場を作ることができます。 □

命題 6.10: 境界の向き付け

向き付けられた境界付き微分可能多様体 M の境界 ∂M には一意に向きが定まる。これをストークスの向きともいう。

証明. 命題 6.6 より、外向きのベクトル場 $N \in \mathfrak{X}(M)$ を定めれば ∂M に向きが定まります。あとは 2 つの外向きのベクトル場 $N, \tilde{N}$ について同じ向きが定まることを示せばよいです。点 $p \in \partial M$ を任意に取り、p を含む M の境界座標近傍を $(U; x^1, \cdots, x^n)$ とすると、2 つの T_pM の基底

$$\left(N_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right), \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right)\right),\ \left(\tilde{N}_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right), \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right)\right)$$

は $N_p^n < 0, \tilde{N}_p^n < 0$ より同じ向きになります。 □

$\partial \mathbb{H}^n$ に $\mathbb{H}^n$ の境界として向きを定めることを考えます。$-\dfrac{\partial}{\partial x^n}$ は外向きのベクトル場なので、

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right)$$

が $\partial \mathbb{H}^n$ の正の向きであることは

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right)$$

が $\mathbb{H}^n$ の正の向きになることと同値です。これが正の向きになるのは n が偶数のときだけであり、n が奇数のときは負の向きになります。これは後でストークスの定理を証明するときに用います。

6.3 微分形式の積分

微分形式の積分を定義します。まず 1 つの座標近傍で台が覆える場合を考えます。

定義 6.11

M を向き付けられた境界付き n 次元微分可能多様体とし、ω を M 上の n 次微分形式とする。$\operatorname{supp}\omega$ がコンパクトであり、M の向き付けられた座標近傍 $(U;\varphi)$ によって $\operatorname{supp}\omega \subset U$ となるとする。$(U;\varphi)$ 上での ω の局所座標表示を

$$\omega = f dz^1 \wedge \cdots dz^n$$

としたとき、ω の M 上での積分を

$$\int_M \omega = \pm \int_{\varphi(U)} f dz^1 \cdots dz^n$$

と定義する。ただし符号は $(U;\varphi)$ が正の向きであるとき $+$、負の向きであるとき $-$ とする。

この定義が well-defined であることを確かめる必要があります。

命題 6.12

定義 6.11 の積分は座標近傍の選択に依らない。

証明. 別の座標近傍 $(V;\psi)$ によって ω が

$$\omega = g dw^1 \wedge \cdots dw^n$$

と表されるとします。このときヤコビアンを

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z^1}{\partial w^1} & \cdots & \dfrac{\partial z^1}{\partial w^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial z^n}{\partial w^1} & \cdots & \dfrac{\partial z^n}{\partial w^n} \end{pmatrix}$$

とすれば、

$$dz^1 \wedge \cdots dz^n = (\det J) dw^1 \wedge \cdots dw^n$$

となります。よって

$$g = (\det J) f$$

が成り立ちます。積分については

$$\int_{\varphi(U)} f dz^1 \cdots dz^n = \int_{\psi(V)} |\det J| f dw^1 \cdots dw^n$$

が成り立つので、向きによる符号と絶対値がちょうど合います。 $\square$

1 つの座標近傍で台を覆うことができないときは、1 の分割を用いて貼り合わせることで定義します。

定義 6.13: 微分形式の積分

M を向き付けられた境界付き n 次元微分可能多様体とし、ω を台 $\mathrm{supp}\,\omega$ がコンパクトであるような M 上の n 次微分形式とする。向き付けられた有限個の座標近傍 $(U_1, \varphi_1), \cdots, (U_m, \varphi_m)$ によって $\mathrm{supp}\,\omega$ を覆えるとき、$U_1, \cdots, U_m$ に従属する 1 の分割を $\psi_1, \cdots, \psi_m$ とする。このとき ω の M 上での積分を

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{m} \int_M \psi_i \omega$$

と定義する。

well-defined であることを確かめます。

命題 6.14

定義 6.13 の積分は座標近傍と 1 の分割の選択に依らない。

証明. 別の座標近傍 $(U'_1, \varphi'_1), \cdots, (U'_l, \varphi'_l)$ とそれに従属する 1 の分割 $\psi'_1, \cdots, \psi'_l$ を取ります。このとき 1 の分割の定義から

$$\begin{aligned}\int_M \psi_i \omega &= \int_M \psi_i \left(\sum_{j=1}^{l} \psi'_j \right) \omega \\ &= \sum_{j=1}^{l} \int_M \psi_i \psi'_j \omega\end{aligned}$$

が成立します。i を 1 から m まで足すと

$$\sum_{i=1}^{m} \int_M \psi_i \omega = \sum_{i,j} \int_M \psi_i \psi'_j \omega$$

となります。右辺は $\mathrm{supp}(\psi_i \psi'_j \omega) \subset U_i, \mathrm{supp}(\psi_i \psi'_j \omega) \subset U'_j$ なので定義 6.11 によってちゃんと定義されています。さらに

$$\sum_{j=1}^{l} \int_M \psi'_j \omega = \sum_{i,j} \int_M \psi_i \psi'_j \omega$$

も成り立つので、どちらの座標近傍と 1 の分割による定義も一致します。 □

コンパクトでない台を持つ微分形式の積分は一般には定義できません。例えば $\mathbb{R}$ 上の微分形式 $\sin x dx$ の $\mathbb{R}$ 上での積分が定義できないのは明らかです。

積分の基本的な性質は次の通りです。

命題 6.15

M, N を向き付けられた境界付き n 次元微分可能多様体とし、ω, η をコンパクトな台を持つ n 次微分形式とする。

(1) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_M (a\omega + b\eta) = a\int_M \omega + b\int_M \eta$$

(2) $-M$ を M の向き付けを逆にしたものとすると

$$\int_{-M} \omega = -\int_M \omega$$

(3) $F : N \to M$ を微分同相写像とすると

$$\int_N F^*\omega = \pm\int_M \omega$$

となる。ただし符号は F が向きを保つとき $+$、負の向きであるとき $-$ とする。

証明.

(1) 1 つの向き付けられた M の座標近傍 (U, φ) で ω, η の台が覆えるときは、リーマン積分の線形性から成り立ちます。1 つの座標近傍で覆えないときも、1 の分割を用いて足し合わせると線形性は保たれるので成り立ちます。

(2) 1 つの向き付けられた M の座標近傍 (U, φ) で ω の台が覆えるときは定義から成り立ちます。(1) と同様に任意の場合でも成り立ちます。

(3) 1 つの向き付けられた M の座標近傍 (U, φ) で ω の台が覆えるとき、$(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$ は N の座標近傍であって $F^*\omega$ の台を覆います。命題 6.12 と同様にして

$$\int_N F^*\omega = \pm\int_M \omega$$

が成り立ちます。(1)(2) と同様に任意の場合でも成り立ちます。

□

微分形式の積分は定義できましたが、1 の分割を具体的に計算するのは困難なので、この定義は計算の役には立ちません。計算には次の定理が便利です。

定理 6.16

M を向き付けられた境界付き n 次元微分可能多様体とし、ω を M 上の n 次微分形式とする。$D_1, \cdots, D_m$ を $\mathbb{R}^n$ の体積確定な開集合とし、$F_i : \overline{D_i} \to M$ を C^∞ 級写像としたとき次の条件が成り立つとする。

(1) F_i の D_i への制限は M の開集合 W_i への向きを保つ微分同相写像である。

(2) $i \neq j$ なら $W_i \cap W_j = \varnothing$ となる。

(3) $\operatorname{supp}\omega \subset \overline{W_1} \cup \cdots \cup \overline{W_m}$

このとき

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{m} \int_{D_i} F_i^* \omega$$

が成り立つ。

証明は [Lee12] にあります。

6.4 ストークスの定理

微分積分学の基本定理の一つの一般化がストークスの定理です。

定理 6.17: ストークスの定理

境界付き微分可能多様体 M 上のコンパクトな台を持つ $n-1$ 次微分形式 $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ について、

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

が成り立つ。

ただし、∂M にはストークスの向きが定まっているものとし、右辺の ω は $i : \partial M \to M$ を包含写像としたときの $i^*\omega$ の略記です。また $\partial M = \varnothing$ のときは右辺は 0 であるとします。

証明. まず $M = \mathbb{H}^n$ の場合に示します。ω はコンパクトな台を持つので、ハイネ・ボレルの被覆定理より台は有界閉集合なので $R > 0$ が存在して

$$\operatorname{supp} \omega \subset [-R, R] \times \cdots \times [-R, R] \times [0, R]$$

となります。このとき

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

と表されるとすれば

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i=1}^{n} df_i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n
\end{aligned}$$

が成り立ちます。よって積分は

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\int_0^R\int_{-R}^R\cdots\int_{-R}^R \frac{\partial f_i}{\partial x^i}dx^1\cdots dx^n \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\int_0^R\int_{-R}^R\cdots\int_{-R}^R \Big[f_i\Big]_{x^i=-R}^{x^i=R} dx^1\cdots dx^{i-1}dx^{i+1}\cdots dx^n \\
&\qquad + (-1)^{n-1}\int_{-R}^R\cdots\int_{-R}^R \Big[f_n\Big]_{x^n=0}^{x^n=R} dx^1\cdots dx^{n-1} \\
&= (-1)^n\int_{-R}^R\cdots\int_{-R}^R f(x^1,\cdots,x^{n-1},0)dx^1\cdots dx^{n-1}
\end{aligned}$$

となります。ただし ω の台が積分領域に含まれているので、$x^n=0$ を除く積分領域の境界における値は 0 になることを用いました。一方、$i:\partial M\to M$ によって ω を引き戻すと

$$i^*\omega = f_n(x^1,\cdots,x^{n-1},0)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}$$

になります。$\partial\mathbb{H}^n$ において

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right)$$

が正の向きになるのは n が偶数のときなので、

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n} i^*\omega = (-1)^n\int_{-R}^R\cdots\int_{-R}^R f(x^1,\cdots,x^{n-1},0)dx^1\cdots dx^{n-1}$$

となり 2 つの積分は一致します。

次に $M=\mathbb{R}^n$ の場合を考えると、$\mathbb{H}^n$ のときは $x^n=0$ の項が消えませんでしたが、$\mathbb{R}^n$ のときは全て 0 になるので

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0$$

が成り立ちます。

M が任意の境界付き微分可能多様体であり、ω の台が 1 つの正の向きの M の境界座標近傍 $(U;\varphi)$ で覆える場合を考えます。このとき命題 6.15 および外微分と引き戻しは可換であることから

$$\int_M d\omega = \int_{\varphi(\mathbb{H}^n)}(\varphi^{-1})^*(d\omega) = \int_{\mathbb{H}^n} d((\varphi^{-1})^*\omega) = \int_{\partial\mathbb{H}^n}(\varphi^{-1})^*\omega$$

が成り立ちます。最後の等号は $\mathbb{H}^n$ でストークスの定理が成り立つことを用いました。命題 6.8 より各点 $p\in\partial M$ で φ の微分 φ_{*p} は M の外向きのベクトルを $\mathbb{H}^n$ の外向きのベクトルに移すので、$\varphi:\partial M\cap U\to\partial\mathbb{H}^n\cap\varphi(U)$ は向きを保つ微分同相写像になります。よって命題 6.15 より

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n}(\varphi^{-1})^*\omega = \int_{\partial M}\omega$$

となるので成り立ちます。$(U;\varphi)$ が負の向きの座標近傍であるときも同様です。また $(U;\varphi)$ が内部座標近傍であるときも同様にして

$$\int_M d\omega = 0$$

が示されます。

最後に一般の場合を考えます。向き付けられた有限個の座標近傍 $(U_1, \varphi_1), \cdots, (U_m, \varphi_m)$ によって $\operatorname{supp}\omega$ を覆えるとき、$U_1, \cdots, U_m$ に従属する 1 の分割を $\psi_1, \cdots, \psi_m$ とすると積分の定義から

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \omega &= \sum_{i=1}^{m} \int_{\partial M} \psi_i \omega \\
&= \sum_{i=1}^{m} \int_M d(\psi_i \omega) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \int_M (d\psi_i \wedge \omega + \psi_i d\omega) \\
&= \int_M d\left(\sum_{i=1}^{m} \psi_i\right) \wedge \omega + \sum_{i=1}^{m} \int_M \psi_i d\omega \\
&= 0 + \int_M d\omega
\end{aligned}$$

となります。ただし $\sum_{i=1}^{m} \psi_i = 1$ を用いました。 $\square$

$M = [a, b] \subset \mathbb{R}, \omega = f \in C^\infty([a, b])$ の場合のストークスの定理は微分積分学の基本定理

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a)$$

になります。

7　ド・ラームコホモロジー

シンプレクティック幾何学では、シンプレクティック多様体が余接束 T^*M である場合には、シンプレクティックポテンシャル $\theta \in \Omega^1(T^*M)$ が存在して、シンプレクティック形式を

$$\omega = d\theta$$

と表すことができました。実は、一般のシンプレクティック多様体ではこのような θ は存在しません。

そこで一般に、微分形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ に対して

$$\omega = d\theta$$

を満たす $\theta \in \Omega^{k-1}(M)$ が存在するかという問題を考えてみましょう。外微分は 2 回行うと 0 になることから、もし θ が存在するなら

$$d\omega = d(d\theta) = 0$$

となります。よって $d\omega = 0$ は θ が存在する必要条件です。

整理のために用語を定義します。

定義 7.1

微分可能多様体 M 上の微分形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ が完全形式であるとは、

$$\omega = d\theta$$

となる $\theta \in \Omega^{k-1}(M)$ が存在することをいう。

また $\omega \in \Omega^k(M)$ が閉形式であるとは、

$$d\omega = 0$$

となることをいう。

ここまでの議論から、完全形式が閉形式であることが分かっています。実は $\mathbb{R}^n$ では閉形式は完全形式になります (ポアンカレの補題)。しかし一般の微分可能多様体では、完全形式ではない閉形式が存在します。どのくらいの k 次閉形式が完全形式ではないかを測るのがド・ラームコホモロジーです。

コホモロジーの一般論については高間さんの記事 [高間 23] を参照してください。

7.1　ド・ラームコホモロジー群

まず次の命題を示します。

命題 7.2

微分可能多様体 M 上の k 次完全形式全体の集合を $B^k(M)$ とし、k 次閉形式全体の集合を $Z^k(M)$ とすると、$B^k(M), Z^k(M)$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になる。ただし $B^0(M) = 0$ とする。

証明. $\Omega^k(M)$ が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間なので、$B^k(M), Z^k(M)$ が $\Omega^k(M)$ の部分ベクトル空間になることを示せばよいです。$\omega_1, \omega_2 \in B^k(M)$ が

$$\omega_1 = d\theta_1,\ \omega_2 = d\theta_2$$

と書けるとすると、任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$a\omega_1 + b\omega_2 = d(a\theta_1 + b\theta_2)$$

なので $a\omega_1 + b\omega_2 \in B^k(M)$ になります。よって $B^k(M)$ は和とスカラー倍について閉じており、$\Omega^k(M)$ の部分ベクトル空間になります。$Z^k(M)$ についても同様です。 □

完全形式は閉形式なので、$B^k(M)$ は $Z^k(M)$ の部分ベクトル空間です。そこで商ベクトル空間を定義できます。

定義 7.3: ド・ラームコホモロジー群

M を微分可能多様体とする。商ベクトル空間

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}$$

を M の k 次のド・ラームコホモロジー群と呼ぶ。$\omega \in Z^k(M)$ が代表する $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ の中の同値類を $[\omega]$ と書き、ω のコホモロジー類と呼ぶ。

ベクトル空間なのに群と呼ぶのは少し奇妙ですが慣習です。

命題 7.4: 誘導準同型

任意の C^∞ 級写像 $F : M \to N$ に対して、引き戻し $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ は

$$F^*(B^k(N)) \subset B^k(M),\ F^*(Z^k(N)) \subset Z^k(M)$$

を満たす。よって F^* は $H^k_{\mathrm{dR}}(N)$ から $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ への線形写像を誘導する。これも $F^* : H^k_{\mathrm{dR}}(N) \to H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ と書いて $F : M \to N$ の誘導準同型と呼ぶ。

証明. 任意の $\omega \in B^k(N)$ について、$\omega = d\theta$ とすると外微分と引き戻しの可換性から、

$$d(F^*\theta) = F^*(d\theta) = F^*\omega$$

となるので、$F^*\omega \in B^k(N)$ となります。また任意の $\omega \in Z^k(N)$ に対しては

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega) = 0$$

となるので、$F^*\omega \in Z^k(N)$ となります。 □

つまり誘導準同型は $F^*[\omega] = [F^*\omega]$ という写像です。コホモロジーの一般論では、引き戻しが $F^* \circ d = d \circ F^*$ を満たすことを引き戻し F^* がチェイン写像であると言い、一般にチェイン写像は準同型を誘導します。誘導準同型は次の性質を持ちます。

命題 7.5

(1) C^∞ 級写像 $F: M \to N, G; N \to L$ に対して

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^* : H^k_{\mathrm{dR}}(L) \to H^k_{\mathrm{dR}}(M)$$

が成り立つ。

(2) $\mathrm{Id}_M : M \to M$ を恒等写像とすると、$\mathrm{Id}_M^* : H^k_{\mathrm{dR}}(M) \to H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ は $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ の恒等写像である。

証明. 引き戻しの性質から明らかです。 □

この命題からド・ラームコホモロジー群の微分同相写像に対する不変性が導かれます。

定理 7.6: ド・ラームコホモロジーの微分同相不変性

微分可能多様体 M, N が微分同相なら、任意の k について $H^k_{\mathrm{dR}}(M) \cong H^k_{\mathrm{dR}}(N)$ である。

証明. $F: M \to N$ を微分同相写像とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_M^* &= (F^{-1} \circ F)^* = F^* \circ (F^{-1})^* \\ \mathrm{Id}_N^* &= (F \circ F^{-1})^* = (F^{-1})^* \circ F^* \end{aligned}$$

が成り立つので、$F^* : H^k_{\mathrm{dR}}(N) \to H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ と $(F^{-1})^* : H^k_{\mathrm{dR}}(M) \to H^k_{\mathrm{dR}}(N)$ は互いに逆写像です。 □

ストークスの定理からド・ラームコホモロジーの性質が導かれます。

命題 7.7

境界付き n 次元微分可能多様体 M 上のコンパクトな台を持つ $n-1$ 次閉形式 $\omega \in Z^{n-1}(M)$ が M の境界を持たない $n-1$ 次元部分多様体 S で

$$\int_S \omega \neq 0$$

を満たすなら $\omega \notin B^{n-1}(M)$ であり、S は向き付けられたコンパクトな M の部分多様体の境界にならない。

証明. $\omega \in B^{n-1}(M)$ と仮定すると $\eta \in \Omega^{n-2}(M)$ を用いて $\omega = d\eta$ と書けるので

$$\int_S \omega = \int_S d\eta = \int_{\partial S} \eta = 0$$

が成り立ちます。ただしストークスの定理と $\partial S = 0$ を用いました。これは $\int_S \omega \neq 0$ と矛盾します。

S が向き付けられたコンパクトな M の部分多様体 A の境界になると仮定するとストークスの定理より

$$\int_S \omega = \int_A d\omega = 0$$

となるので $\int_S \omega \neq 0$ と矛盾します。 □

7.2 基本的な例

一番簡単な 0 次のド・ラームコホモロジー群を計算してみましょう。まず外微分をして 0 になる関数は局所定数関数に限るので、$Z^k(M)$ は M 上の局所定数関数が成すベクトル空間になります。よって M の連結成分の数を m とすると、

$$Z^0(M) \cong \mathbb{R}^m$$

が成り立ちます。$B^0(M) = 0$ なので、これは

$$H^0_{\mathrm{dR}}(M) \cong \mathbb{R}^m$$

を意味します。

次に 1 次のド・ラームコホモロジー群を考えます。実は $\mathbb{R}^n$ では次の命題が成り立ちます。

命題 7.8

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n) = 0$$

が成り立つ。

証明. $n = 0$ のときは自明なので $n \geq 1$ とします。任意の 1 次閉形式 $\omega \in Z^1(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^n$ の全体で $\omega_1, \cdots, \omega_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ を用いて

$$\omega = \omega_1 dx^1 + \cdots + \omega_n dx^n$$

と書くことができます。このとき

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \omega_i(t\boldsymbol{x}) x^i \right) dt$$

と定義すると、

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n t \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}(t\boldsymbol{x}) x^i + \omega_j(t\boldsymbol{x}) \right) dt$$

となります。このとき $d\omega = 0$ より

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x^j} &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n t \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}(t\boldsymbol{x}) x^i + \omega_j(t\boldsymbol{x}) \right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}(t\omega_j(t\boldsymbol{x})) dt \\
&= \Big[t\omega_j(t\boldsymbol{x}) \Big]_0^1 \\
&= \omega_j(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

となります。よって $\omega = df$ となり、$\omega \in B^1(\mathbb{R}^n)$ です。したがって $Z^k(\mathbb{R}^n) = B^k(\mathbb{R}^n)$ なので

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n) = 0$$

が成り立ちます。 □

$H^1_{\mathrm{dR}}(M) \neq 0$ となるような M の具体例を挙げます。

命題 7.9

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq 0$$

証明. 例えば $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ を

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

と定義すると、

$$d\omega = \left(-\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) dy \wedge dx + \left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) dx \wedge dy = 0$$

なので $\omega \in Z^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ となります。一方 $i : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ を包含写像とすると $i^*\omega$ は極座標 $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ において

$$\begin{aligned} i^*\omega &= -\sin t \cdot (-\sin t dt) + \cos t(\cos t dt) \\ &= dt \end{aligned}$$

と書けます。よって

$$\int_{S^1} i^*\omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

となるので命題 7.7 より $\omega \notin B^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ となり、$[\omega] \in H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \setminus \{0\}$ が成り立ちます。 □

7.3 ホモトピー不変性

ド・ラームコホモロジーは微分同相写像について不変であることが分かりました。実はもっと広いホモトピー同値写像という種類の写像についてド・ラームコホモロジーは不変になります。以下では $I = [0, 1]$ とします。

定義 7.10: ホモトピック

X, Y を位相空間とする。連続写像 $f, g : X \to Y$ がホモトピックであるとは、連続写像 $H : X \times I \to Y$ が存在して任意の $x \in X$ について

$$\begin{aligned} f(x) &= H(x, 0) \\ g(x) &= H(x, 1) \end{aligned}$$

が成り立つことをいう。このとき $f \simeq g$ と書く。H を f を g につなぐホモトピーと呼ぶ。

命題 7.11

X, Y, Z を位相空間とする。連続写像 $f_1, g_1 : X \to Y$ と $f_2, g_2 : Y \to Z$ について $f_1 \simeq g_1$ かつ $f_2 \simeq g_2$ なら $f_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ g_1$ が成り立つ。

証明. $f_1 \simeq g_1, f_2 \simeq g_2$ より、f_1 を g_1 につなぐホモトピー $H_1 : X \times I \to Y$ と f_2 を g_2 につなぐホモトピー $H_2 : Y \times I \to Z$ が存在します。このとき $H : X \times I \to Y$ を

$$H(x,t) = H_2(H_1(x,t),t)$$

と定義します。H が連続であることは、$H_1 : X \times I \to Y, \mathrm{id}_I : I \to I$ が連続であることから $(x,t) \mapsto (H_1(x,t),t)$ が連続であり、H がこれと連続写像 $H_2 : Y \times \to Z$ の合成であることから成り立ちます。

このとき任意の $x \in X, t \in I$ に対して

$$(f_2 \circ f_1)(x) = H(x,0)$$
$$(g_2 \circ g_1)(x) = H(x,1)$$

となるので H は $f_2 \circ f_1$ を $g_2 \circ g_1$ につなぐホモトピーです。 □

境界付き微分可能多様体 M の場合にこのホモトピーの定義を使うと、$\partial M \neq \varnothing$ である場合に $M \times I$ が境界付き多様体にならない[*17]という問題があります。また C^∞ 級写像でないホモトピーを考えても引き戻しなどを行うことができません。そこで次のように定義します。

定義 7.12: 滑らかにホモトピック

M, N を境界付き微分可能多様体とする。C^∞ 級写像 $f, g : M \to N$ が滑らかにホモトピックであるとは、C^∞ 級写像 $H : M \times \mathbb{R} \to N$ が存在して任意の $x \in X$ について

$$f(x) = H(x,t), \qquad (\forall t \leq 0)$$
$$g(x) = H(x,t), \qquad (\forall t \geq 1)$$

が成り立つことをいう。

実はホイットニーの埋め込み定理を使った議論によって、次の 2 つの定理を示すことができます。

定理 7.13

連続写像 $f : M \to N$ に対して、C^∞ 級写像 $\tilde{f} : M \to N$ が存在して $f, \tilde{f}$ はホモトピックになる。

定理 7.14

C^∞ 級写像 $f, g : M \to N$ がホモトピックなら滑らかにホモトピックである。

この 2 つの定理があるので、滑らかさについて心配する必要はありません。詳細は [Lee12] に載っています。

*17 角付き多様体というものになります。

命題 7.15

C^∞ 級写像 $f, g : M \to N$ が滑らかにホモトピックであるとき、誘導準同型 $f^*, g^* : H^k_{\mathrm{dR}}(N) \to H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ は等しい。

証明. $i_t : M \to M \times \mathbb{R}$ を

$$i_t(x) = (x, t)$$

と定義します。このとき f と g をつなぐ滑らかなホモトピーを $H : M \times \mathbb{R} \to M$ とすると、

$$f = H \circ i_0, \ \ g = H \circ i_1$$

なので誘導準同型 $f^*, g^* : H^k_{\mathrm{dR}}(N) \to H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ は

$$f^* = i_0^* \circ H^*, \ \ g^* = i_1^* \circ H^*$$

と書けます。そこで $i_0^* = i_1^*$ を示せばよいことになります。

誘導準同型が等しいことを示すためには、引き戻し $i_0^*, i_1^* : \Omega^k(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^k(M)$ と任意の $\omega \in Z^k(N)$ に対し、

$$i_1^*\omega - i_0^*\omega = d\eta$$

を満たす $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ が存在することを示せばよいです。ここではもう少し一般に、各 $m \geq 1$ に対して写像 $K^m : \Omega^m(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^{m-1}(M)$ が存在して、任意の $\omega \in \Omega^k(M \times \mathbb{R})$ に対して

$$i_1^*\omega - i_0^*\omega = d(K^k\omega) - K^{k+1}(d\omega)$$

を満たすことを示します。

ベクトル場 $S \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{R})$ を $f \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ に対し

$$(Sf)_{(p,t)} = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=t} f(p, s)$$

とすることで定義します。このとき $K^m : \Omega^m(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^{m-1}(M)$ を

$$K^m\omega = \int_0^1 i_t^*(i_S\omega)dt$$

によって定義します。外微分と引き戻しの可換性およびカルタンの公式から

$$\begin{aligned} d(K^m\omega) - K^{m+1}(d\omega) &= \int_0^1 i_t^*(d(i_S\omega) - i_S(d\omega))dt \\ &= \int_0^1 i_t^*(L_S\omega)dt \end{aligned}$$

が成り立ちます。S が生成するフローは明示的に $\theta_t(p, s) = (p, t + s)$ と書くことができ、$i_t = \theta_t \circ i_0$ が成り

立つので、

$$\begin{aligned}
i_t^*(L_S\omega) &= \lim_{s\to 0} i_0^* \circ \theta_t^* \left(\frac{\theta_s^*\omega - \omega}{s} \right) \\
&= \lim_{s\to 0} i_0^* \left(\frac{\theta_{t+s}^*\omega - \theta_t^*\omega}{s} \right) \\
&= \frac{d}{dt} i_0^*(\theta_t^*\omega) \\
&= \frac{d}{dt} i_t^*\omega
\end{aligned}$$

となります。よって微分積分学の基本定理より

$$d(K^m\omega) - K^{m+1}(d\omega) = i_1^*\omega - i_0^*\omega$$

であり、証明が完了します。 □

この命題によって、ホモトピー同値写像というものに対してド・ラームコホモロジーが不変になります。

定義 7.16: ホモトピー同値

X, Y を位相空間とする。連続写像 $f : X \to Y$ に対して連続写像 $g : Y \to X$ が存在して $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y, g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ を満たすとき、f はホモトピー同値写像であるという。また X, Y の間にホモトピー同値写像が存在するとき、X, Y はホモトピー同値であるという。

定理 7.17: ド・ラームコホモロジーのホモトピー不変性

境界付き微分可能多様体 M, N がホモトピー同値であれば、ド・ラームコホモロジー群は同型である。

証明. M, N がホモトピー同値なので、連続写像 $f : M \to N, g : N \to M$ が存在して $f \circ g \simeq \mathrm{id}_N, g \circ f \simeq \mathrm{id}_M$ を満たします。このとき C^∞ 級写像 $\tilde{f} : M \to N, \tilde{g} : N \to M$ が存在して $f \simeq \tilde{f}, g \simeq \tilde{g}$ となります。そこで

$$\begin{aligned}
\tilde{f} \circ \tilde{g} \simeq f \circ g \simeq \mathrm{id}_N \\
\tilde{g} \circ \tilde{f} \simeq g \circ f \simeq \mathrm{id}_M
\end{aligned}$$

であり、誘導準同型について

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_{H_{\mathrm{dR}}(N)} = \mathrm{id}_N^* = (\tilde{f} \circ \tilde{g})^* = \tilde{g}^* \circ \tilde{f}^* \\
\mathrm{id}_{H_{\mathrm{dR}}(M)} = \mathrm{id}_M^* = (\tilde{g} \circ \tilde{f})^* = \tilde{f}^* \circ \tilde{g}^*
\end{aligned}$$

が成り立つので、誘導準同型 $\tilde{f}^*, \tilde{g}^*$ は互いに逆写像となるので $H_{\mathrm{dR}}(M) \cong H_{\mathrm{dR}}(N)$ が成り立ちます。 □

この定理から、さらにド・ラームコホモロジーが同相写像によって変わらないことも言えます。

定理 7.18: ド・ラームコホモロジーの位相不変性

境界付き微分可能多様体 M, N が同相であれば、ド・ラームコホモロジー群は等しい。

証明. 同相写像は定義から明らかにホモトピー同値写像です。 □

この定理はド・ラームコホモロジー群が微分可能多様体の微分構造には依存せず、位相だけに依存して決まることを表しています。

7.4 ポアンカレの補題

3 章でダルブーの定理を証明するのに使ったポアンカレの補題を証明します。

定義 7.19: 可縮

位相空間 X が 1 点から成る位相空間 $\{*\}$ とホモトピー同値であるとき、X は可縮であるという。

1 点から成る位相空間 $\{*\}$ は 0 次元微分可能多様体なので、1 次以上のド・ラームコホモロジーは 0 になります。また連結成分は 1 個なので 0 次のド・ラームコホモロジーは $\mathbb{R}$ と同型です。よって

$$H^k_{\mathrm{dR}}(\{*\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & (k=0) \\ 0, & (k \geq 1) \end{cases}$$

が成り立ちます。これとド・ラームコホモロジーのホモトピー不変性から次の命題が成り立ちます。

命題 7.20

可縮な境界付き微分可能多様体 M のド・ラームコホモロジー群は

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & (k=0) \\ 0, & (k \geq 1) \end{cases}$$

となる。

次のようにすると応用しやすいです。

命題 7.21: 星型領域におけるポアンカレの補題

$\mathbb{R}^n$ の開集合 U が $p \in U$ について星型領域であるとは、任意の $q \in U$ に対し p と q を結ぶ線分が U に含まれることをいう。

このとき、任意の星型領域 U は可縮である。したがってド・ラームコホモロジー群は

$$H^k_{\mathrm{dR}}(U) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & (k=0) \\ 0, & (k \geq 1) \end{cases}$$

となる。

証明. U が $p \in U$ について星型領域であるとき、$i : \{p\} \to U$ を包含写像とし、$f : U \to \{p\}$ を全ての点を p に移す写像とします。$f \circ i = \mathrm{id}_{\{p\}}$ なので i, f がホモトピー同値写像であることを示すためには $i \circ f \simeq \mathrm{id}_U$ を示せばよいです。このとき $H : U \times I \to U$ を

$$H(x,t) = p + (x-p)t$$

とすれば、H は $i \circ f$ を id_U につなぐホモトピーです。 □

$\mathbb{R}^n$ そのものは星型領域なので、

$$H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & (k=0) \\ 0, & (k \geq 1) \end{cases}$$

が成り立ちます。

定理 7.22: ポアンカレの補題

$k \geq 1$ とする。微分可能多様体 M 上の微分形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ が $d\omega = 0$ を満たすなら、任意の $p \in M$ に対して p を含む開集合 U と $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ が存在して、U 上で

$$d\eta = \omega$$

が成り立つ。

証明. 任意の点 $p \in M$ に対して、p を含む座標近傍 $(V;\varphi)$ を取ります。このとき $\varphi(V)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合なので、$r > 0$ が存在して $B(\varphi(p), r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x} - \varphi(p)| < r\} \subset V$ となります。$B(\varphi(p), r)$ は $\mathbb{R}^n$ の星型領域なので 1 次以上のド・ラームコホモロジー群は 0 であり、M の開集合 $U = \varphi^{-1}(B(\varphi(p), r))$ の 1 次以上のド・ラームコホモロジー群も 0 になります。よって $\omega \in \Omega^k(M)$ が U 上で閉形式であれば完全形式なので、$\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ が存在して、U 上で

$$d\eta = \omega$$

が成り立ちます。 □

7.5 マイヤー・ヴィートリス完全列

ド・ラームコホモロジーを簡単に計算するために、多様体 M を 2 つの M の開集合 U, V によって $M = U \cup V$ と表したとき、M のド・ラームコホモロジーを U, V のド・ラームコホモロジーで表す方法を与えます。

まず U と V の非交和 $U \sqcup V$ に対して

$$\Omega^n(U \sqcup V) \cong \Omega^n(U) \oplus \Omega^n(V)$$

が成り立つことに注意します。そこで $i_1, i_2 : U \cap V \to U \sqcup V$ をそれぞれ $U \cap V$ から U, V への包含写像と定義すれば、引き戻し

$$i_1^*, i_2^* : \Omega^n(U) \oplus \Omega^n(V) \to \Omega^n(U \cap V)$$

が得られます。また、$j_1 : U \to M, j_2 : V \to M$ を包含写像とすると、引き戻し

$$j_1^* \oplus j_2^* : \Omega^n(M) \to \Omega^n(U) \oplus \Omega^n(V)$$

が定義されます。このとき次の命題が成り立ちます。

命題 7.23

(1) $j_1^* \oplus j_2^* : \Omega^n(M) \to \Omega^n(U) \oplus \Omega^n(V)$ は単射である。
(2) $i_2^* - i_1^* : \Omega^n(U) \oplus \Omega^n(V) \to \Omega^n(U \cap V)$ は全射である。
(3) 任意の $\omega \in \Omega^n(M)$ に対して $(i_2^* - i_1^*)(j_1^* \oplus j_2^*(\omega)) = 0$ が成り立つ。

証明.

(1) $\omega \in \mathrm{Ker}(j_1^* \oplus j_2^*)$ とします。任意の $p \in M$ に対して $M = U \cup V$ より $p \in U$ または $p \in V$ となります。$p \in U$ であるとき、$j_1^*\omega = 0$ より $\omega_p = 0$ です。$p \in V$ であるときも同様に $\omega_p = 0$ となるので、$\mathrm{Ker}(j_1^* \oplus j_2^*) = 0$ です。よって $j_1^* \oplus j_2^*$ は単射です。

(2) U, V に従属する 1 の分割を ρ_U, ρ_V とすると、任意の $\omega \in \Omega^n(U \cap V)$ に対して $\rho_V\omega \in \Omega^n(U), \rho_U\omega \in \Omega^n(V)$ となるので $(i_2^* - i_1^*)(-\rho_V\omega, \rho_U\omega) = \omega$ となります。よって $i_2^* - i_1^*$ は単射です。

(3) $\tilde{i}_1 : U \cap V \to U, \tilde{i}_2 : U \cap V \to V$ を包含写像とします。任意の $\omega \in \Omega^n(M)$ に対して

$$\begin{aligned}(i_2^* - i_1^*)(j_1^* \oplus j_2^*(\omega)) &= (i_2^* - i_1^*)(j_1^*\omega, j_2^*\omega) \\ &= \tilde{i}_2^*(j_2^*\omega) - \tilde{i}_1^*(j_1^*\omega) \\ &= (j_2 \circ \tilde{i}_2)^*\omega - (j_1 \circ \tilde{i}_1)^*\omega -\end{aligned}$$

となりますが、$j_1 \circ \tilde{i}_1 = j_2 \circ \tilde{i}_2$ なのでこれは 0 になります。

□

コホモロジーの一般論の言葉を使うと、この命題は

$$0 \to \Omega^*(M) \xrightarrow{j_1^* \oplus j_2^*} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{i_2^* - i_1^*} \Omega^*(U \cap V) \to 0$$

がコチェイン複体の短完全列であると言い換えられます。用語の定義は高間さんの記事を参照してください。さらにコホモロジーの一般論によって、次の定理が成り立ちます。

定理 7.24: マイヤー・ヴィートリス完全列

$$\begin{aligned}0 \xrightarrow{f} H^0_{\mathrm{dR}}(M) &\xrightarrow{j_1^* \oplus j_2^*} H^0_{\mathrm{dR}}(U) \oplus H^0_{\mathrm{dR}}(V) \xrightarrow{i_2^* - i_1^*} H^0_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \\ \xrightarrow{d^*} H^1_{\mathrm{dR}}(M) &\xrightarrow{j_1^* \oplus j_2^*} H^1_{\mathrm{dR}}(U) \oplus H^1_{\mathrm{dR}}(V) \xrightarrow{i_2^* - i_1^*} H^1_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \to \cdots\end{aligned}$$

は完全列になる。これをマイヤー・ヴィートリス完全列と呼ぶ。ただし $0 \to H^0_{\mathrm{dR}}(M)$ は $0 \mapsto 0$ であり、

$$\begin{aligned}j_1^* &: H^n_{\mathrm{dR}}(M) \to H^n_{\mathrm{dR}}(U) \\ j_2^* &: H^n_{\mathrm{dR}}(M) \to H^n_{\mathrm{dR}}(U) \\ i_1^*, i_2^* &: H^n_{\mathrm{dR}}(U) \oplus H^n_{\mathrm{dR}}(V) \to H^n_{\mathrm{dR}}(U \cap V)\end{aligned}$$

は誘導準同型であり、$d^* : H^n_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \to H^{n+1}_{\mathrm{dR}}(M)$ は $\omega \in Z^n(U \cap V)$ に対して

$$d^*[\omega] = \begin{cases} [-d(\rho_V\omega)], & U\text{上で} \\ [d(\rho_U\omega)], & V\text{上で} \end{cases}$$

と定義する。ただし ρ_U, ρ_V は U, V に従属する 1 の分割とする。ベクトル空間 $A_1, A_2, \cdots$ と線形写像 $f_n : A_n \to A_{n+1}$ の列

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_{n+2} \xrightarrow{f_{n+2}} \cdots$$

が完全列であるとは、$\mathrm{Im}\, f_n = \mathrm{Ker}\, f_{n+1}$ が成り立つことをいう。

$\omega \in Z^n(U \cap V)$ のとき $d\omega = 0$ なので、$U \cap V$ 上で $d(\rho_U\omega) = d(\rho_V\omega) = 0$ が成立します。よって d^* は well-defined です。

例 7.25: S^1 のド・ラームコホモロジー

マイヤー・ヴィートリス完全列を用いて S^1 のド・ラームコホモロジーを計算してみましょう。S^1 の開被覆を

$$U = \{(x, y) \in S^1 \mid x < 1/2\},\ V = \{(x, y) \in S^1 \mid x > -1/2\}$$

と取ります。U, V は $\mathbb{R}$ と同相なのでポアンカレの補題より

$$H^n_{\mathrm{dR}}(U) \cong H^n_{\mathrm{dR}}(V) = \begin{cases} \mathbb{R}, & (n = 0) \\ 0, & (n \geq 1) \end{cases}$$

が成り立ちます。また $U \cap V$ は 2 つの連結成分を持つので

$$H^0_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$

です。

そこでマイヤー・ヴィートリス完全列は

$$0 \to H^0_{\mathrm{dR}}(S^1) \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta_2} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{d^*} H^1_{\mathrm{dR}}(S^1) \to 0$$

となります。ただし

$$\begin{aligned} \delta_1([\omega]) &= ([\omega], [\omega]) \\ \delta_2([\omega], [\tau]) &= ([\tau - \omega], [\tau - \omega]) \end{aligned}$$

です。煩わしいので引き戻しは省略しました。

完全列の定義から δ_1 は単射であり、d^* は全射なので、

$$\begin{aligned} H^0_{\mathrm{dR}}(S^1) &\cong \operatorname{Im} \delta_1 = \operatorname{Ker} \delta_2 \\ H^1_{\mathrm{dR}}(S^1) &= \operatorname{Im} d^* \cong (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})/\operatorname{Ker} d^* = \operatorname{Coker} \delta_2 \end{aligned}$$

が成り立ちます。δ_2 の定義から $\operatorname{Ker} \delta_2, \operatorname{Im} \delta_2$ はどちらも 1 次元なので、

$$\begin{aligned} H^0_{\mathrm{dR}}(S^1) &\cong \mathbb{R} \\ H^1_{\mathrm{dR}}(S^1) &\cong \mathbb{R} \end{aligned}$$

が成り立ちます。

7.6 チェックコホモロジー

ド・ラームコホモロジー群が多様体の位相だけに依存して決まることをさらに明らかにするために、チェックコホモロジーを定義します。ド・ラームコホモロジーとチェックコホモロジーについては [BT82] が詳しいです。

まず前層を定義します。

定義 7.26: 前層

$\mathcal{F}$ が位相空間 M 上の前層であるとは、次の条件を満たすことを言う。

(1) M の開集合 U に対して集合 $\mathcal{F}(U)$ が対応する。
(2) M の開集合 U, V が $V \subset U$ を満たすとき、制限写像と呼ばれる写像 $\rho_{V,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ が定まり次の条件を満たす。
  (a) $\rho_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$
  (b) M の開集合 $W \subset V \subset U$ に対し $\rho_{W,V} \circ \rho_{V,U} = \rho_{W,U}$

前層の典型的な例は次のものです。

定義 7.27: 微分形式の層

微分可能多様体 M において、M の開集合 U に対して U 上の n 次微分形式全体の集合 $\Omega^n(U)$ を対応させ、$V \subset U$ に対し $\rho_{V,U} : \Omega^n(U) \to \Omega^n(V)$ を通常の写像の制限とした前層を微分形式の層と呼び、Ω^n と書く。

定義 7.28: 定数層

G をアーベル群とする。位相空間 M の開集合 U に対して

$$\{f : U \to G \mid g\text{は局所定数関数}\}$$

を対応させ、$V \subset U$ に対し $\rho_{V,U} : \Omega^n(U) \to \Omega^n(V)$ を通常の写像の制限とした前層を定数層と呼び、単に G と書く。

アーベル群を知らない場合は $G = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ を考えればよいです。微分形式の層や定数層は (名前から明らかなように) 前層であるだけでなく層というものにもなりますが、ここでは深入りしません。層とチェックコホモロジーについては小原さんの解説記事 [小原 23] にも詳しい解説が載っています。

定義 7.29

$\mathcal{U}$ を位相空間 M の開被覆とする。

(1) $U_0, U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ が $U_0 \cap U_1 \cap \cdots U_n \neq \varnothing$ を満たすとき、$\sigma = (U_0, U_1, \cdots, U_n)$ および

$$|\sigma| = U_0 \cap U_1 \cap \cdots U_n$$

と書き、σ を n 次元単体、$|\sigma|$ を σ の台と呼ぶ。n 次元単体全体の集合を $\Sigma_b(n)$ と書く。
(2) 有限個の n 次元単体の形式的な線形結合の全体の集合を

$$\Sigma(n) = \left\{ \sum_{\mu} n^{\mu} \sigma_{\mu} \;\middle|\; \sigma_{\mu} \in \Sigma_{\mu}, n^{\mu} \in \mathbb{Z}\text{は有限個を除いて}0 \right\}$$

と書く。
(3) n 次元単体 $\sigma = (U_0, \cdots, U_n)$ に対して

$$\partial_k \sigma = (U_0, \cdots, U_{k-1}, U_{k+1}, \cdots, U_n)$$

と定義し、σ の境界 $\partial\sigma \in \Sigma(n-1)$ を

$$\partial\sigma = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \partial_k \sigma$$

と定義する。さらに

$$\partial\left(\sum_{\mu} n^{\mu}\sigma_{\mu}\right) = \sum_{\mu} n^{\mu}\partial\sigma_{\mu}$$

によって $\partial : \Sigma(n) \to \Sigma(n-1)$ を定義する。

定義 7.30

定義 7.29 の記号はそのまま使う。$\mathcal{F}$ を M 上の前層とする。

(1) n 次元単体 σ に対して $\mathcal{F}(|\sigma|)$ の元 η_σ を対応させるようなもの η を n–コチェインと呼ぶ。ただし、$\sigma = (U_1, \cdots, U_i, \cdots, U_j, \cdots, U_n)$ と $\sigma' = (U_1, \cdots, U_j, \cdots, U_i, \cdots, U_n)$ に対しては $\eta_\sigma = -\eta_{\sigma'}$ が成り立つものとする。n コチェイン全体の集合を $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ と書く。$C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ はアーベル群になる。

(2) コバウンダリー作用素 $\delta^n : C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ を $\eta \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \sigma \in \Sigma_b(n+1)$ に対し

$$(\delta^n \eta)(\sigma) = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k \rho_{|\sigma|,|\partial_k\sigma|}(\eta(\partial_k \sigma))$$

と定義する。

(3) アーベル群

$$Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\delta^n : C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$$
$$B^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathrm{Im}(\delta^{n-1} : C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{n}(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$$

を定義し、$Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}), B^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ の元をそれぞれ n 次元コサイクル、n 次元コバウンダリーと呼ぶ。

コチェインが単体を構成する集合の交換について符号を変えるという定義を採用しないこともあります。その場合コチェイン全体の集合は変わりますが、最終的に得られるチェックコホモロジーは変わらないことが知られています。

$Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}), B^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ の記号が類似していることから分かるように、n 次元コサイクルと n 次元コバウンダリーはそれぞれ閉形式と完全形式に対応しており、コバウンダリー作用素 δ は外微分 d に対応しています。

n が小さいときの具体例を見ておきましょう。具体的な表示をするときは $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ と添字付けて置くと便利です。また $i_1, \cdots, i_n \in I$ に対して $U_{i_1\cdots i_n} = U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_n}$ と書きます。

例 7.31: 0–コチェイン

0–コチェイン η は $i \in I$ に対して $\eta_i \in \mathcal{F}(U_i)$ を対応させるものです。コバウンダリー $\delta^0\eta$ は 1 次元単体 (U_i, U_j) に対して

$$(\delta^0\eta)_{ij} = \eta_j - \eta_i$$

と定義されるので (ρ は省略しました)、$\delta^0\eta = 0$ となるのは任意の $i, j \in I$ に対して $U_{ij} \neq \varnothing$ であれば U_{ij} 上で

$$\eta_i = \eta_j$$

が成り立つときです。そこで $Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(M)$ が成り立ちます。また -1 次元単体はないため $B^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ です。

例 7.32: 1–コチェイン

1–コチェインは $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ を満たす $i, j \in I$ に対して $\eta_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ を対応させるものです。2 次元単体 (U_i, U_j, U_k) に対して 1–コチェイン η のコバウンダリー $\delta^1\eta$ は

$$(\delta^1\eta)_{ijk} = \eta_{jk} - \eta_{ik} + \eta_{ij}$$

と定義されるので (ρ は省略しました)、$\delta^1\eta = 0$ となるのは任意の $i, j, k \in I$ に対して $U_{ijk} \neq \varnothing$ であれば U_{ijk} 上で

$$\eta_{jk} - \eta_{ik} + \eta_{ij} = 0$$

が成り立つときです。$\eta_{ik} = -\eta_{ki}$ を使うと $\delta^1\eta = 0$ となる条件をきれいに

$$\eta_{ij} + \eta_{jk} + \eta_{ki} = 0$$

と書くことができます。

このとき、$\alpha \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ に対して

$$(\delta^0\alpha)_{ij} = \alpha_j - \alpha_i$$

となるので、

$$\begin{aligned}(\delta^0\alpha)_{ij} + (\delta^0\alpha)_{jk} + (\delta^0\alpha)_{ki} &= \alpha_j - \alpha_i + \alpha_k - \alpha_j + \alpha_i - \alpha_k \\ &= 0\end{aligned}$$

が成り立ちます。よって $\delta^1(\delta^0\alpha) = 0$ となります。

1–コチェインの例から $\delta^1 \circ \delta^0 = 0$ が成り立つことが分かりましたが、これは一般に成り立ちます。

命題 7.33

$\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$、つまり $B^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subset Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ が成立する。

証明. 定義から $\eta \in C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}), \sigma \in \Sigma_b(n+2)$ に対し

$$\begin{aligned}(\delta^{n+1}(\delta^n\eta))(\sigma) &= \sum_{k=0}^{n+2}(-1)^k\rho_{|\sigma|,|\partial_k\sigma|}((\delta^n\eta)(\partial_k\sigma)) \\ &= \sum_{k=0}^{n+2}\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^{k+j}\rho_{|\sigma|,|\partial_k\sigma|}(\rho_{|\partial_k\sigma|,|\partial_j\partial_k\sigma|}\eta(\partial_j\partial_k\sigma)) \\ &= \sum_{k=0}^{n+2}\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^{k+j}\rho_{|\sigma|,|\partial_j\partial_k\sigma|}(\eta(\partial_j\partial_k\sigma))\end{aligned}$$

となります。このとき

$$\partial_j\partial_k\sigma = \begin{cases}\partial_{k-1}\partial_j\sigma, & (j<k) \\ \partial_k\partial_j\sigma, & (j\geq k)\end{cases}$$

が成立するので、

$$\begin{aligned}(\delta^{n+1}(\delta^n\eta))(\sigma) &= \sum_{j=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}\rho_{|\sigma|,|\partial_j\partial_k\sigma|}(\eta(\partial_j\partial_k\sigma)) + \sum_{j=0}^{n+1}\sum_{k=j+1}^{n+2}(-1)^{k+j}\rho_{|\sigma|,|\partial_j\partial_k\sigma|}(\eta(\partial_j\partial_k\sigma)) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}\rho_{|\sigma|,|\partial_j\partial_k\sigma|}(\eta(\partial_j\partial_k\sigma)) + \sum_{j=0}^{n+1}\sum_{k=j+1}^{n+2}(-1)^{k+j}\rho_{|\sigma|,|\partial_{k-1}\partial_j\sigma|}(\eta(\partial_{k-1}\partial_j\sigma)) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}\rho_{|\sigma|,|\partial_j\partial_k\sigma|}(\eta(\partial_j\partial_k\sigma)) - \sum_{j=0}^{n+1}\sum_{k=j}^{n+1}(-1)^{k+j}\rho_{|\sigma|,|\partial_k\partial_j\sigma|}(\eta(\partial_k\partial_j\sigma)) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}\rho_{|\sigma|,|\partial_j\partial_k\sigma|}(\eta(\partial_j\partial_k\sigma)) - \sum_{k=0}^{n+1}\sum_{j=k}^{n+1}(-1)^{k+j}\rho_{|\sigma|,|\partial_j\partial_k\sigma|}(\eta(\partial_j\partial_k\sigma)) \\ &= 0\end{aligned}$$

を得ます。 □

そこで、ド・ラームコホモロジーと同様にコホモロジーを定義できます。

定義 7.34

$\check{H}^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \dfrac{Z^n(\mathcal{U},\mathcal{F})}{B^n(\mathcal{U},\mathcal{F})}$ と定義して n 次チェックコホモロジー群と呼ぶ。

このままではチェックコホモロジー群 $\check{H}^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$ は特定の開被覆 $\mathcal{U}$ に依存しているのであまりよくありません。そこで別の開被覆を選ぶとどうなるかを調べます。

命題 7.35

位相空間 M の開被覆 $\mathcal{V} = (V_\beta)_{\beta\in A}$ が開被覆 $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$ の細分であるとき、写像 $\phi : B \to A$ を $V_\beta \subset U_{\phi(\beta)}$ となるように選ぶと $\phi^{*n} : C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^n(\mathcal{V},\mathcal{F})$ が

$$(\phi^{*n}\eta)(V_{\beta_0},\cdots,V_{\beta_n}) = \eta(U_{\phi(\beta_0)},\cdots,U_{\phi(\beta_n)})$$

によって定まる。このとき

$$\phi^{*n+1} \circ \delta^n = \delta^n \circ \phi^{*n}$$

が成り立つ。また別の写像 $\psi : B \to A$ を $V_\beta \subset U_{\psi(\beta)}$ を満たすように選ぶと、$K^n : C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{n-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ を

$$\psi^{*n} - \phi^{*n} = \delta^{n-1} \circ K^n + K^{n+1} \circ \delta^n$$

が成り立つように取れる。

証明. $\eta \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ と $\mathcal{V}$ の $n+1$ 次元単体 $\sigma = (V_{\beta_0}, \cdots, V_{\beta_{n+1}})$ に対して

$$\begin{aligned}
(\phi^{*n+1} \circ \delta^n \eta)(\sigma) &= (\delta^n \eta)(U_{\phi(\beta_0)}, \cdots, U_{\phi(\beta_{n+1})}) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \eta(U_{\phi(\beta_0)}, \cdots, U_{\phi(\beta_{k-1})}, U_{\phi(\beta_{k+1})}, \cdots, U_{\phi(\beta_{n+1})}) \\
(\delta^n \circ \phi^{*n} \eta)(\sigma) &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (\phi^{*n} \eta)(V_{\beta_0}, \cdots, V_{\beta_{k-1}}, V_{\beta_{k+1}}, \cdots, V_{\beta_n}) \\
&== \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \eta(U_{\phi(\beta_0)}, \cdots, U_{\phi(\beta_{k-1})}, U_{\phi(\beta_{k+1})}, \cdots, U_{\phi(\beta_{n+1})})
\end{aligned}$$

となるので $\phi^{*n+1} \circ \delta^n = \delta^n \circ \phi^{*n}$ は成り立ちます。

$K^n : C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{n-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ は

$$(K^n \eta)(V_{\beta_0}, \cdots, V_{\beta_{n-1}}) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \eta(U_{\phi(\beta_0)}, \cdots, U_{\phi(\beta_k)}, U_{\psi(\beta_k)}, \cdots, U_{\psi(\beta_{n-1})})$$

と定義すれば $\eta \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ と $\mathcal{V}$ の n 次元単体 $\sigma = (V_{\beta_0}, \cdots, V_{\beta_n})$ に対して

$$\begin{aligned}
&((\delta^{n-1} \circ K^n)\eta)(\sigma) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j (K^n \eta)(V_{\beta_0}, \cdots, V_{\beta_{j-1}}, V_{\beta_{j+1}}, \cdots, V_{\beta_n}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^{j+k} \eta(U_{\phi(\beta_0)}, \cdots, U_{\phi(\beta_k)}, U_{\psi(\beta_k)}, \cdots, U_{\psi(\beta_{j-1})}, U_{\psi(\beta_{j+1})}, \cdots, U_{\psi(\beta_n)}) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^{j+k} \eta(U_{\phi(\beta_0)}, \cdots, U_{\phi(\beta_{j-1})}, U_{\phi(\beta_{j+1})}, \cdots, U_{\phi(\beta_{k+1})}, U_{\psi(\beta_{k+1})}, \cdots, , U_{\psi(\beta_n)})
\end{aligned}$$

および

$$
\begin{aligned}
&((K^{n+1}\circ\delta^n)\eta)(\sigma)\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\delta^n\eta)(U_{\phi(\beta_0)},\cdots,U_{\phi(\beta_k)},U_{\psi(\beta_k)},\cdots,U_{\psi(\beta_n)})\\
&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+k}\eta(U_{\phi(\beta_0)},\cdots,U_{\phi(\beta_{j-1})},U_{\phi(\beta_{j+1})},\cdots,U_{\phi(\beta_k)},U_{\psi(\beta_k)},\cdots,U_{\psi(\beta_n)})\\
&\quad+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k+1}^{n+1}(-1)^{j+k}\eta(U_{\phi(\beta_0)},\cdots,U_{\phi(\beta_k)},U_{\psi(\beta_k)},\cdots,U_{\psi(\beta_{j-2})},U_{\psi(\beta_j)},\cdots,U_{\psi(\beta_n)})
\end{aligned}
$$

となるので、ほとんどの項が打ち消し合って

$$
\begin{aligned}
((\delta^{n-1}\circ K^n+K^{n+1}\circ\delta^n)\eta)(\sigma)&=\sum_{j=0}^{n}\eta(U_{\phi(\beta_0)},\cdots,U_{\phi(\beta_{j-1})},U_{\psi(\beta_j)},\cdots,U_{\psi(\beta_n)})\\
&\quad-\sum_{j=0}^{n}\eta(U_{\phi(\beta_0)},\cdots,U_{\phi(\beta_j)},U_{\psi(\beta_{j+1})},\cdots,U_{\psi(\beta_n)})\\
&=\eta(U_{\psi(\beta_0)},\cdots,U_{\psi(\beta_n)})-\eta(U_{\phi(\beta_0)},\cdots,U_{\phi(\beta_n)})\\
&=(\psi^{*n}\eta)(\sigma)-(\phi^{*n}\eta)(\sigma)
\end{aligned}
$$

が成り立ちます。 □

この命題から、ド・ラームコホモロジーのときと同じ議論によって M の開被覆 $\mathcal{V}$ が開被覆 $\mathcal{U}$ の細分であるとき群準同型

$$f_{\mathcal{V},\mathcal{U}}:\check{H}(\mathcal{U},\mathcal{F})\to\check{H}(\mathcal{V},\mathcal{F})$$

が well-defined に定まります。これは

$$f_{\mathcal{U},\mathcal{U}}=\mathrm{id}_{\check{H}(\mathcal{U},\mathcal{F})}$$

という性質を満たしています。さらに M の開被覆 $\mathcal{W}$ が $\mathcal{V}$ の細分であれば

$$f_{\mathcal{W},\mathcal{V}}\circ f_{\mathcal{V},\mathcal{U}}=f_{\mathcal{W},\mathcal{U}}$$

も成り立ちます。これを使って、全ての開被覆を考慮することができます。

定義 7.36

M の全ての開被覆の集合を $\mathfrak{U}$ と書き、非交和

$$A^n=\coprod_{\mathcal{U}\in\mathfrak{U}}H^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

を取る。このとき A^n の同値関係 $\sim$ を M の開被覆 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ が共通の開細分 $\mathcal{W}$ を持っていて、$x\in\check{H}^n(\mathcal{U},\mathcal{F}),y\in\check{H}^n(\mathcal{V},\mathcal{F})$ について

$$f_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(x)=f_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(y)$$

が成り立つとき $x \sim y$ であるとして定める。このとき

$$\check{H}^n(M, \mathcal{F}) = A^n/\!\sim$$

として M の $\mathcal{F}$ 係数の n 次チェックコホモロジー群と呼ぶ。

命題 7.37

$\mathcal{F}$ に群構造が定義されていれば、$\check{H}^n(M, \mathcal{F})$ は群になる。

証明. $x \in \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}), y \in \check{H}^n(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ について、$\mathcal{U}, \mathcal{V}$ の共通の開細分 $\mathcal{W}$ に対して

$$[x] + [y] = [f_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(x) + f_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(y)]$$

とすることで $\check{H}^n(M, \mathcal{F})$ に和を定義したいです。これが well-defined であることを示します。

まず $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ の他の共通の開細分 $\mathcal{W}'$ を取ったとき和が同じになることを示します。$\mathcal{W}, \mathcal{W}'$ の共通の開細分 $\mathcal{W}''$ を取ると

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{W}'',\mathcal{W}}(f_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(x) + f_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(y)) &= f_{\mathcal{W}'',\mathcal{W}}(f_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(x)) + f_{\mathcal{W}'',\mathcal{W}}(f_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(y)) \\ &= f_{\mathcal{W}'',\mathcal{U}}(x) + f_{\mathcal{W}'',\mathcal{V}}(x) \\ &= f_{\mathcal{W}'',\mathcal{W}'}(f_{\mathcal{W}',\mathcal{U}}(x) + f_{\mathcal{W}',\mathcal{V}}(y)) \end{aligned}$$

が成立するので $[f_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(x) + f_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(y)] = [f_{\mathcal{W}',\mathcal{U}}(x) + f_{\mathcal{W}',\mathcal{V}}(y)]$ です。

次に別の代表元を取ったとき和が同じになることを示します。$x \in \check{H}^n(\mathcal{U}', \mathcal{F}), y \in \check{H}^n(\mathcal{V}', \mathcal{F})$ について $[x] = [x'], [y] = [y']$ となるとすると、$\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ の共通の開細分 $\mathcal{U}''$ および $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ の共通の開細分 $\mathcal{V}''$ が存在して

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{U}'',\mathcal{U}}(x) &= f_{\mathcal{U}'',\mathcal{U}'}(x') \\ f_{\mathcal{V}'',\mathcal{V}}(y) &= f_{\mathcal{V}'',\mathcal{V}'}(y') \end{aligned}$$

となります。このとき $\mathcal{U}'', \mathcal{V}''$ の共通の開細分 $\mathcal{W}'''$ を取ると

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{W}''',\mathcal{U}}(x) + f_{\mathcal{W}''',\mathcal{V}}(y) &= f_{\mathcal{W}''',\mathcal{U}''}(f_{\mathcal{U}'',\mathcal{U}}(x)) + f_{\mathcal{W}''',\mathcal{V}''}(f_{\mathcal{V}'',\mathcal{V}}(y)) \\ &= f_{\mathcal{W}''',\mathcal{U}''}(f_{\mathcal{U}'',\mathcal{U}'}(x')) + f_{\mathcal{W}''',\mathcal{V}''}(f_{\mathcal{V}'',\mathcal{V}'}(y')) \\ &= f_{\mathcal{W}''',\mathcal{U}'}(x') + f_{\mathcal{W}''',\mathcal{V}'}(y') \end{aligned}$$

となるので $[x] + [y] = [x'] + [y']$ が成り立ちます。

和について交換法則が成り立つことは明らかです。結合法則が成り立つことも示すことができます。単位元については $0_{\mathcal{U}} \in \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}), 0_{\mathcal{V}} \in \check{H}^n(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ とすれば、$\mathcal{U}, \mathcal{V}$ の共通の開細分 $\mathcal{W}$ に対して

$$f_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(0_{\mathcal{U}}) = 0_{\mathcal{W}} = f_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(0_{\mathcal{V}})$$

となるので $[0_{\mathcal{U}}] = [0_{\mathcal{V}}]$ です。任意の $x \in \check{H}^n(\mathcal{U}, G)$ に対して

$$[x] + [0_{\mathcal{U}}] = [x + 0_{\mathcal{U}}] = [x]$$

となるので $[0_{\mathcal{U}}]$ は単位元になります。$[x]$ の逆元は $[-x]$ とすればよいです。 □

7.7 良い被覆とチェック–ド・ラームの定理

こうしてチェックコホモロジー群 $\check{H}(M, \mathcal{F})$ を定義できましたが、定義通り計算を行うのは難しいです。そこでチェックコホモロジー群を計算するためにある種の性質の良い被覆を定義します。

定義 7.38: 良い被覆

位相空間 M の開被覆 $\mathcal{U}$ が良い被覆であるとは、任意の $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ に対して $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ が空であるか $\mathbb{R}^n$ と同相になることをいう。

良い被覆においては $\check{H}^n(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \cong H^n_{\mathrm{dR}}(M)$ が成り立ちます。これを示すためにいくつかの準備をします。まず 1 の分割によって微分形式の層を係数とする高次のチェックコホモロジーが消えることを示します。

命題 7.39

位相空間 M が開被覆 $\mathcal{U}$ に従属する 1 の分割を持つとすると、

$$\check{H}^n(\mathcal{U}, \Omega^m) = \begin{cases} \Omega^m(M), & (n = 0) \\ 0, & (n \geq 1) \end{cases}$$

である。

証明. $n = 0$ の場合は例 7.31 から分かります。$n \geq 1$ の場合を示します。開被覆 $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ に従属する 1 の分割を $(\varphi_i)_{i \in I}$ とします。$\omega \in Z^n(\mathcal{U}, \Omega^m)$ について、$\delta\omega = 0$ は $n+1$ 次元単体 $(U_{i_0}, \cdots, U_{i_{n+1}})$ に対し

$$\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \omega_{i_0 \cdots i_{j-1} i_{j+1} \cdots i_{n+1}} = 0$$

と書けます (ρ は省略しました)。このとき $\eta \in C^{n-1}(\mathcal{U}, \Omega^m)$ を

$$\eta_{i_1 \cdots i_n} = \sum_{i \in I} \varphi_i \omega_{i_1 \cdots i_n i}$$

と定義すれば、

$$\begin{aligned}
(\delta\eta)_{i_0 \cdots i_n} &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \eta_{i_0 \cdots i_{j-1} i_{j+1} \cdots i_n} \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sum_{i \in I} \varphi_i \omega_{i_0 \cdots i_{j-1} i_{j+1} \cdots i_n i}
\end{aligned}$$

となります。このとき $\delta\omega = 0$ を使うと

$$(\delta\eta)_{i_0 \cdots i_n} = \sum_{i \in I} (-1)^n \varphi_i \omega_{i_0 \cdots i_n} = (-1)^n \omega_{i_0 \cdots i_n}$$

より $\eta = \delta((-1)^n \omega)$ が成り立ちます。したがって $\omega \in B^n(\mathcal{U}, \Omega^m)$ であり、$\check{H}^n(\mathcal{U}, \Omega^m) = 0$ を得ます。 □

定数層の場合は局所定数関数に 1 の分割をかけると局所定数関数ではなくなってしまうので同じ証明はできません。

外微分は線形なので次の命題が成り立ちます。

命題 7.40

$\delta\circ d = d\circ\delta : C^p(\mathcal{U},\Omega^q)\to C^{p+1}(\mathcal{U},\Omega^{q+1})$ が成り立つ。

$\delta\circ d$ は $d : C^p(\mathcal{U},\Omega^q)\to C^p(\mathcal{U},\Omega^{q+1})$ と $\delta : C^p(\mathcal{U},\Omega^{q+1})\to C^{p+1}(\mathcal{U},\Omega^{q+1})$ の合成であり、$d\circ\delta$ は $\delta : C^p(\mathcal{U},\Omega^q)\to C^{p+1}(\mathcal{U},\Omega^q)$ と $d : C^{p+1}(\mathcal{U},\Omega^q)\to C^{p+1}(\mathcal{U},\Omega^{q+1})$ の合成であることに注意してください。

命題 7.41

$(C^*(\mathcal{U},\Omega^*))^n = \bigoplus_{p+q=n} C^p(\mathcal{U},\Omega^q)$ と置き、$D : (C^*(\mathcal{U},\Omega^*))^n \to (C^*(\mathcal{U},\Omega^*))^{n+1}$ を $\omega\in C^p(\mathcal{U},\Omega^q)$ に対して

$$D\omega = \delta\omega + (-1)^p d\omega$$

とすることで定義すると $D\circ D = 0$ が成り立つ。

証明. $\delta\circ d = d\circ\delta$ および $\delta\circ\delta = 0, d\circ d = 0$ より $\omega\in C^p(\mathcal{U},\Omega^q)$ に対して

$$\begin{aligned} D\circ D(\omega) &= D(\delta\omega) + (-1)^p D(d\omega) \\ &= (\delta + (-1)^{p+1} d)(\delta\omega) + (-1)^p(\delta + (-1)^p d)(d\omega) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となります。 □

この命題から、次のようにコホモロジーを定義できます。

定義 7.42: チェック–ド・ラーム複体

$(C^*(\mathcal{U},\Omega^*))^n$ をチェック–ド・ラーム複体と呼び、$\mathrm{Ker}\,(D : (C^*(\mathcal{U},\Omega^*))^n \to (C^*(\mathcal{U},\Omega^*))^{n+1})$ の元をチェック–ド・ラームコサイクル (あるいは短く D–コサイクル) と呼び、$\mathrm{Im}(D : (C^*(\mathcal{U},\Omega^*))^{n-1} \to (C^*(\mathcal{U},\Omega^*))^n)$ をチェック–ド・ラームコバウンダリー (あるいは D–コバウンダリー) と呼ぶ。またチェック–ド・ラームコホモロジー (あるいは D–コホモロジー) を商ベクトル空間

$$H_D^n(\mathcal{U}) = \frac{\mathrm{Ker}(D : (C^*(\mathcal{U},\Omega^*))^n \to (C^*(\mathcal{U},\Omega^*))^{n+1})}{\mathrm{Im}(D : (C^*(\mathcal{U},\Omega^*))^{n-1} \to (C^*(\mathcal{U},\Omega^*))^n)}$$

と定義する。

命題 7.43

微分可能多様体 M の開被覆 $\mathcal{U}$ について、$r : \Omega^q(M)\to C^0(\mathcal{U},\Omega^q)$ を $\omega\in\Omega^q(M)$ と $U\in\mathcal{U}$ に対し

$$(r(\omega))(U) = \omega|_U$$

と定義すると、r は同型 $H_{\mathrm{dR}}^n(M)\cong H_D^n(\mathcal{U})$ を誘導する。

証明. まず r が準同型を誘導することを示します。定義から $\delta\circ r = 0, d\circ r = r\circ d$ なので

$$D\circ r = (\delta + d)\circ r = d\circ r = r\circ d$$

が成り立つので r は準同型 $r^* : H_{\mathrm{dR}}^n(M)\to H_D^n(\mathcal{U})$ を誘導します。

r^* が全射であることを示します。$q \geq 1$ に対して、q 次の D–コサイクル ϕ の $C^q(\mathcal{U}, \Omega^0)$ 成分を ϕ_0 とすると、$D\phi = 0$ より $\delta\phi_0 = 0$ となります。このとき $\check{H}^q(\mathcal{U}, \Omega^0) = 0$ なので $\phi_0 = \delta\psi_0$ を満たす $\psi_0 \in C^{q-1}(\mathcal{U}, \Omega^0)$ が存在します。このとき ϕ と $\phi - D\psi_0$ は同じ D–コホモロジー類に属し、$\phi - D\psi_0$ は $C^q(\mathcal{U}, \Omega^0)$ 成分を持ちません。$C^{q-1}(\mathcal{U}, \Omega^1)$ 成分も同様にして除くことができ、繰り返すと ϕ の D–コホモロジー類はある $\psi \in C^0(\mathcal{U}, \Omega^q)$ の D–コホモロジー類に等しいことが分かります。このとき $D\psi = 0$ より $\delta\psi = 0, d\psi = 0$ なので、M 全体で定義された閉形式 $\omega \in \Omega^q(M)$ によって $r(\omega) = \psi$ と表せます。よって $[\phi] = [\psi] = r^*[\omega]$ であり、r^* は全射です。

r^* が単射であることを示します。$\omega \in \Omega^q(M)$ に対し $r(\omega) = D\phi$ であるとすれば、r^* が全射であることを示した議論と同様に $\phi \in C^0(\mathcal{U}, \Omega^{q-1})$ に取ることができます。$\delta\phi = 0$ なので ϕ は M 全体で定義された微分形式 η によって $r(\eta) = \phi$ と表すことができ、$(-1)^{q-1}d\phi = r(\omega)$ であることから $\omega = (-1)^{q-1}d\eta$ であり、ω は完全形式になります。 □

証明から、2 重複体 $C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$ に対して $\check{H}^n(\mathcal{U}, \Omega^m) = 0 (n \geq 1)$ が成り立っていることから $H^n_{\mathrm{dR}}(M) \cong H^n_D(\mathcal{U})$ が成り立つことが分かります。

そこで同様にして、

$$i : C^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \to C^q(\mathcal{U}, \Omega^0)$$

を実数値の局所定数関数を C^∞ 級関数とみなす写像と定義します。$d \circ i = 0$ と $\delta \circ i = i \circ \delta$ が成り立つことから $D \circ i = i \circ \delta$ となるので i は準同型 $i^* : \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \to H^n_D(\mathcal{U})$ を誘導します。このとき i^* が同型になるためには、任意の $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ と $q \geq 1$ に対して

$$H^q_{\mathrm{dR}}(U_1 \cap \cdots \cap U_n) = 0$$

が成り立てばよいです。これは $\mathcal{U}$ が良い被覆であればポアンカレの補題から成り立ちます。そこで次の定理が成り立ちます。

定理 7.44

微分可能多様体 M の良い被覆 $\mathcal{U}$ に対して

$$\check{H}^n(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \cong H^n_{\mathrm{dR}}(M)$$

が成り立つ。

任意の微分可能多様体には良い被覆が存在し、しかも任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対してその細分となる良い被覆が存在することが知られています[*18]。そこで任意の $\eta \in \check{H}^n(M, G)$ に対して良い被覆 $\mathcal{U}$ と $x \in \check{H}^n(\mathcal{U}, G)$ が存在して $\eta = [x]$ を満たすので、チェックコホモロジーの計算の上では良い被覆だけを考えればよいです。さらに良い被覆のチェックコホモロジー群は全てド・ラームコホモロジー群と同型です。このとき M の良い被覆 $\mathcal{U}$ の細分であるような良い被覆 $\mathcal{V}$ について、ド・ラームコホモロジー群とチェックコホモロジーの同型は細分と両立します。つまり $\varphi : \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \to H^n_{\mathrm{dR}}(M), \varphi' : \check{H}^n(\mathcal{V}, \mathbb{R}) \to H^n_{\mathrm{dR}}(M)$ を同型とすると

$$\varphi = \varphi' \circ f_{\mathcal{V},\mathcal{U}}$$

が成り立ちます。そこで次の定理が成り立ちます。

[*18] M にリーマン計量を取って議論することで証明できます。

定理 7.45: チェック–ド・ラームの定理

微分可能多様体 M について、

$$\check{H}^n(M, \mathbb{R}) \cong H^n_{\mathrm{dR}}(M)$$

が成り立つ。

こうして位相空間の開被覆から定まっているチェックコホモロジーとド・ラームコホモロジーが同じであることが分かりました。よってド・ラームコホモロジーは微分可能多様体の微分構造に依存せず、位相だけに依存して決まることが分かります。

また良い被覆を取ってチェックコホモロジーを計算すればド・ラームコホモロジーが計算できることも分かりました。チェックコホモロジーは簡単に具体的な計算ができるので、マイヤー・ヴィートリス完全列を使った抽象的な議論をせずに S^1, S^2 などのド・ラームコホモロジーを求めることができます。

8　葉層構造

量子力学の議論を始める前の最後の数学的準備として、葉層構造を定義しておきます。

8.1　分布

定義 8.1: 分布

M を微分可能多様体とする。$p \in M$ に対してベクトル空間 $D_p \subset T_pM$ を対応させるもの D が M の r 次元の分布であるとは、次の条件を満たすことをいう。

(1) D_pM は T_pM の r 次元部分ベクトル空間である。
(2) 任意の $p \in M$ に対して p の開近傍 U と $X_1, \cdots, X_r \in \mathfrak{X}(U)$ が存在して、任意の $q \in U$ に対して $X_{1q}, \cdots, X_{rq}$ が D_q の基底になる。

このとき M の開集合 U に対して $\Gamma(U, D) = \{X \in \mathfrak{X}(U) \mid \forall p \in M, X_p \in D_p\}$ と書く。

つまり分布とは、微分可能多様体の各点に接ベクトル空間の部分空間が滑らかに対応しているものです。

定義 8.2: 積分可能

D を微分可能多様体 M の分布とする。M にはめ込まれた部分多様体 N が任意の $p \in N$ において $T_pN = D_p$ を満たすとき、N は D の積分多様体であるという。

任意の点 $p \in M$ に対して p を含む D の積分多様体が存在するとき、D は積分可能であるという。

例 8.3: 垂直分布

$\mathbb{R}^n$ の開集合 Q の余接束 T^*Q の自然な座標を $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ とします。T^*Q の垂直分布 D を

$$D_p = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial p_1} \right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial p_n} \right)_p \right\}$$

と定義します。このとき $q \in Q$ を固定すると

$$N_q = \{(q, p) \in T^*Q \mid p \in T_q^*Q\}$$

は N_p は D の積分多様体になります。よって D は積分可能です。

定義 8.4: 包合的

微分可能多様体 M の分布 D が包合的であるとは、任意の $X, Y \in \Gamma(M, D)$ に対して $[X, Y] \in \Gamma(M, D)$ となることをいう。

命題 8.5: 積分可能なら包合的

微分可能多様体 M の分布 D が積分可能なら包合的である。

証明. 任意の点 $p \in M$ を通る D の積分多様体を N とすると、$D_p = T_pN$ より任意の $X_1, X_2 \in \Gamma(M, D)$ はベクトル場 $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ と包含写像 $i : N \to M$ について i–関係にあります。よって括弧積の自然性より $[X_1, X_2]$ と $[Y_1, Y_2] \in \mathfrak{X}(N)$ も i–関係にあるので、$[X, Y]_p \in D_p$ です。 □

積分可能よりも強い条件として、完全積分可能があります。

定義 8.6: 完全積分可能

D を n 次元微分可能多様体 M の k 次元の分布とする。任意の点 $p \in M$ について座標近傍 $(U; \varphi)$ が存在して次の条件を満たすとする。

(1) $\varphi(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の立方体である。
(2) $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots \dfrac{\partial}{\partial x^k}$ は U 上で D を張る。
(3) $c^1, \cdots, c^{n-k}$ を定数としたとき、$N_q = \{q \in M \mid \varphi(q) = (x^1, \cdots, x^k, c^1, \cdots, c^{n-k})\}$ は D の積分多様体である。

このとき D は完全積分可能であるという。

つまり、各点を通る積分多様体があるというだけでなく、各点の近傍で積分多様体がうまく重なりあっている分布は完全積分可能です。

分布について包合的、積分可能、完全積分可能という 3 つの性質を定義しましたが、実はこれらは同値になります。

定理 8.7: フロベニウスの定理

分布 D が包合的なら完全積分可能である。

証明は省略しますが、[Lee12] に載っています。

8.2 葉層構造

次の命題が成り立ちます。証明は [Lee12] を参照してください。

命題 8.8

微分可能多様体 M の分布 D の連結な積分多様体の族 $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が点 $p \in M$ を共有しているとき、

$$N = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$$

には N が D の積分多様体となるような微分構造が一意に定まる。

N を真に含む D の連結な積分多様体が存在しないような積分多様体は極大であるといいます。この命題から積分可能な分布の極大連結積分多様体は M を分割するので、次のように定義します。

定義 8.9: 葉層構造

微分可能多様体の積分可能な分布 D を葉層構造と呼ぶ。D の極大連結部分多様体を D の葉と呼ぶ。

例 8.10

微分可能多様体 Q の余接束 T^*Q の垂直分布を D とすると、D は積分可能なので葉層構造になります。D の葉は $q \in Q$ ごとに

$$N_q = \{(q,p) \in T^*Q \mid p \in T_q^*Q\}$$

です。つまり N_q は点 q における余接ベクトル空間です。この例では余接束 T^*Q が各点での余接ベクトル空間に分割されています。D のことを垂直葉層構造とも呼びます。

8.3 ラグランジュ部分多様体

定義 8.11: ベクトル空間の型

ベクトル空間 V 上の双線型写像 $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ が交代的かつ非退化であるとする。V の部分ベクトル空間 W に対して W の ω 補空間を

$$W^\omega = \{v \in V \mid \forall w \in W, \omega(v,w) = 0\}$$

と定義したとき、W について次のように定義する。

(1) $W \subset W^\omega$ であるとき、W はアイソトロピック部分空間であるという。
(2) $W^\omega \subset W$ であるとき、W はコアイソトロピック部分空間であるという。
(3) $W \cap W^\omega = \{0\}$ であるとき、W はシンプレクティック部分空間であるという。
(4) $W = W^\omega$ であるとき、W はラグランジュ部分空間であるという。

ω は非退化なので、任意の $w \in W$ に対して $\omega(v,w) = 0$ となるという条件は $\dim W$ 個の条件です。よって W^ω の次元は $\dim W^\omega = \dim V - \dim W$ となります。そこでラグランジュ部分空間について次の命題が成り立ちます。

命題 8.12

$W \subset V$ がラグランジュ部分空間であることは、W がアイソトロピック部分空間であって $\dim W = \dim W^\omega = \dfrac{1}{2}\dim V$ を満たすことと同値である。

定義 8.13

シンプレクティック多様体 (M,ω) の部分多様体 S がアイソトロピック部分多様体、コアイソトロピック部分多様体、シンプレクティック部分多様体、ラグランジュ部分多様体であるとは、各点 $p \in S$ において T_pS がそれぞれ T_pM のアイソトロピック部分空間、コアイソトロピック部分空間、シンプレクティック部分空間、ラグランジュ部分空間であることをいう。

定義 8.14: 実偏極

$2n$ 次元シンプレクティック多様体 (M,ω) 上の実偏極とは、ラグランジュ部分多様体による M の n 次元葉層構造 P のことをいう。つまり P とは M 上の分布であって、条件

(1) $X, Y \in \Gamma(M,P)$ に対して $[X,Y] \in \Gamma(M,P)$ となる。
(2) 任意の $p \in M$ において P_p は T_pM のラグランジュ部分空間である。

を満たすものをいう。

例 8.15

微分可能多様体 Q の余接束 T^*Q の垂直葉層構造は実偏極です。そこで垂直偏極と呼ぶこともあります。

9　量子力学

9.1　波動力学

ハミルトン形式における状態とは、相空間上の点のことです。例えば 3 次元空間を運動する粒子の状態は、ある時刻における位置と運動量という 6 個の実数によって指定されます。

一方、量子力学では 3 次元空間を運動する粒子の状態は波動関数と呼ばれる関数 $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ によって表されます。量子力学の黎明期には、波動関数は粒子が流体のように広がって存在している様子を表しているものだと思われていました。例えば位置 $\boldsymbol{x}_0$ にある粒子の波動関数は、

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^2}{2\sigma}\right)$$

のように $\boldsymbol{x}_0$ のまわりに局在した形をしていると考えられていました。しかし、ボルンは粒子が原子核などに当たると、波動関数が全方向に出ていくことを発見しました。もし波動関数が粒子の広がりを表しているなら、これは粒子が部分として観測されることはなく、1 つの粒子としてのみ観測されるという事実と矛盾します。

そこでボルンは波動関数 $\psi(x)$ が表すのは、粒子が位置 $\boldsymbol{x}$ に見いだされる確率密度であると提案しました。つまり、粒子が位置 $\boldsymbol{x}$ を中心とする微小な体積 dV の中にある確率は

$$dP \propto |\psi(\boldsymbol{x})|^2 d^3x$$

となるということです。確率の和は 1 になる必要があるため、この解釈ができるためには、全空間における積分が

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\boldsymbol{x})|^2 d^3x < \infty$$

を満たす必要があります。そこで状態は次のように定義されます。

定義 9.1: 粒子の状態

$\mathbb{R}^3$ を運動する粒子の状態は

$$L^2(\mathbb{R}^3) = \left\{\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\boldsymbol{x})|^2 d^3x < \infty\right\}$$

の元として定義される。

$L^2(\mathbb{R}^3)$ には内積を

$$\langle \psi, \xi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(\boldsymbol{x})}\xi(\boldsymbol{x}) d^3x$$

と定義することができます。状態 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ のノルム $\|\psi\|$ を

$$\|\psi\|^2 = \langle \psi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\boldsymbol{x})|^2 d^3x$$

と定義すれば、粒子が位置 $\boldsymbol{x}$ を中心とする体積 d^3x の中にある確率は

$$dP = \frac{|\psi(\boldsymbol{x})|^2 d^3x}{\|\psi\|^2}$$

となります。よって状態 ψ における粒子の位置の期待値は

$$\frac{1}{\|\psi\|^2}\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{x}|\psi(\boldsymbol{x})|^2 d^3x$$

です。

このとき $L^2(\mathbb{R}^3)$ の線形写像 $\boldsymbol{X}$ を

$$(\boldsymbol{X}\psi)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\psi(\boldsymbol{x})$$

と定義する[*19]と

$$\frac{\langle\psi,\boldsymbol{X}\psi\rangle}{\|\psi\|^2} = \frac{1}{\|\psi\|^2}\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{x}|\psi(\boldsymbol{x})|^2 d^3x$$

となります。これは粒子の位置の期待値と一致しているので、線形写像 $\boldsymbol{X}$ は粒子の位置を表しており、

$$E(\boldsymbol{X}) = \frac{\langle\psi,\boldsymbol{X}\psi\rangle}{\|\psi\|^2}$$

が状態 ψ における期待値を与えると解釈することにします。

さらに位置だけでなく、任意の観測可能量が何らかの線形写像 A によって表され、その期待値が

$$E(A) = \frac{\langle\psi,A\psi\rangle}{\|\psi\|^2}$$

によって表されると仮定します。

波動関数の大きさ $|\psi(\boldsymbol{x})|^2$ は位置を表しているので、運動量は波動関数の空間的な変化によって表されていると考えてみましょう。平面波

$$\psi(\boldsymbol{x}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$

が波数 $\boldsymbol{k}$ に比例する運動量を持つとするのが自然でしょう。比例定数は慣習としてディラック定数 $\hbar$ とされているので、この波動関数は運動量 $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}$ を持つということになります。

一般の波動関数に対しては、フーリエ変換

$$\tilde{\psi}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\psi(\boldsymbol{x})d^3x$$
$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\tilde{\psi}(\boldsymbol{k})d^3k$$

を用いて運動量を定義します。フーリエ変換の一般論から

$$\|\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3}|\psi(\boldsymbol{x})|d^3x = \int_{\mathbb{R}^3}|\tilde{\psi}(\boldsymbol{k})|^2 d^3k$$

が成立するので、運動量が $\hbar\boldsymbol{k}$ である確率密度が $\dfrac{|\tilde{\psi}(\boldsymbol{k})|^2}{\|\psi\|^2}$ によって表されると考えることができます。つまり運動量の期待値は

$$\frac{1}{\|\psi\|^2}\int_{\mathbb{R}^3}\hbar\boldsymbol{k}|\tilde{\psi}(\boldsymbol{k})|^2 d^3k$$

[*19] 後で議論しますが、$\psi\in L^2(\mathbb{R}^3)$ に対して $X_i\psi$ は $L^2(\mathbb{R}^3)$ の元になるとは限りません。よって $\boldsymbol{X}$ は $L^2(\mathbb{R}^3)$ の部分集合を定義域とする線形写像です。

で与えられるとします。元の ψ でこれを実現するためには

$$(\boldsymbol{P}\psi)(\boldsymbol{x}) = -i\hbar(\nabla\psi)(\boldsymbol{x})$$

とすればよいです[*20]。実際 $\boldsymbol{P}\psi$ のフーリエ変換は $\hbar\boldsymbol{k}\tilde{\psi}$ になるので、

$$\langle\psi, \boldsymbol{P}\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \hbar\boldsymbol{k}|\tilde{\psi}(\boldsymbol{k})|^2 d^3k$$

が成り立ちます。

ここまでの議論によって次のことが分かりました。

定義 9.2: 位置演算子と運動量演算子

系の位置と運動量は

$$(\boldsymbol{X}\psi)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\psi(\boldsymbol{x})$$
$$(\boldsymbol{P}\psi)(\boldsymbol{x}) = -i\hbar(\nabla\psi)(\boldsymbol{x})$$

と定義される線形写像 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}$ によって表される。

演算子はかける順番によって結果が変わることがあります。例えば

$$(X_1P_1\psi)(\boldsymbol{x}) = -i\hbar x_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})$$
$$(P_1X_1\psi)(\boldsymbol{x}) = -i\hbar x_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - i\hbar\psi(\boldsymbol{x})$$

となります。このような関係を表すために交換子を定義します。

定義 9.3: 交換子

演算子 A, B に対して交換子 $[A, B]$ という演算子を

$$[A, B]\psi = A(B\psi) - B(A\psi)$$

によって定義する。

位置演算子と運動量演算子では

$$[X_i, X_j] = 0$$
$$[P_i, P_j] = 0$$
$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

が成り立ちます。ただし

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

としました。このような交換子についての関係を交換関係と呼びます。交換子については次の命題が成り立ちます。

[*20] $\boldsymbol{P}\psi$ が定義できるためには ψ は少なくとも微分可能でなければなりません。よって $\boldsymbol{P}$ も $L^2(\mathbb{R}^3)$ の部分集合に対してしか定義できません。

命題 9.4

任意の演算子 A, B, C と複素数 $k \in \mathbb{C}$ に対して

$$
\begin{aligned}
[A, B] &= -[B, A] \\
[A, kB] &= [kA, B] = k[A, B] \\
[A, B + C] &= [A, B] + [A, C] \\
[A + B, C] &= [A, C] + [B, C] \\
[AB, C] &= [A, C]B + A[B, C] \\
[A, BC] &= [A, B]C + B[A, C] \\
[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] &= 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

ここまで感覚的な議論だけで進んできたので、これ以降の節では量子力学の数学的定式化を見ていくことにします。

9.2 有限次元の系

いきなり $L^2(\mathbb{R}^3)$ という無限次元の状態空間を行うのは困難です。そこでまず、状態空間が $\mathbb{H} = \mathbb{C}^n$ であるような系、つまり有限次元の系を考えます。

公理 1

状態は複素ベクトル空間 $\mathbb{H} = \mathbb{C}^n$ の元で表される。$\mathbb{H}$ に内積を

$$\langle \psi, \psi' \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\psi_i} \psi'_i$$

と定義する。また ψ のノルムを $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$ と書く。

また、2 つの状態 $\psi, \psi' \in \mathbb{H}$ について、複素数 $c \neq 0$ が存在して $\psi' = c\psi$ となるなら、ψ, ψ' は同じ状態を表すものとする。

ハミルトン形式においては観測量は相空間 M 上の関数 $f \in C^\infty(M)$ で表されました。量子力学においては観測量は線形写像 $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ によって表されます。

公理 2

観測量はエルミートな線形写像 $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ によって表される。

T がエルミートであるとは、任意の $\psi, \psi' \in \mathbb{H}$ に対して

$$\langle \psi, T\psi' \rangle = \langle T\psi, \psi' \rangle$$

が成立するということです。この条件は次の確率解釈がうまくいくために必要です。

公理 3

状態 $\psi \in \mathbb{H}$ について観測量 T を測定したときの値は、T の固有値のどれかになる。T の固有値 λ が得られる確率は、λ に属する T の固有空間への射影演算子を $\mathcal{P}_\lambda$ とすると

$$P(\lambda) = \frac{\|\mathcal{P}_\lambda \psi\|^2}{\|\psi\|^2}$$

となる。

この公理が物理的におかしくないことを確認していきます。

命題 9.5: エルミートな線形写像の固有値は実数

エルミートな線形写像 $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ の任意の固有値は実数である。

証明. $\lambda \in \mathbb{C}$ が T の固有値であるとし、$T\psi = \lambda\psi$ であるような固有ベクトル $\psi \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ を取ります。このときエルミート性から

$$\lambda\|\psi\|^2 = \langle \psi, \lambda\psi \rangle = \langle \psi, T\psi \rangle = \langle T\psi, \psi \rangle = \langle \lambda\psi, \psi \rangle = \overline{\lambda}\|\psi\|^2$$

が成立するので $\lambda = \overline{\lambda}$ であり、λ は実数です。 □

よって、観測量の値は実数になることが保証されます。次に確率の和が 1 になることを確認します。

命題 9.6

任意の状態 $\psi \in \mathbb{H}$ とエルミートな線形写像 $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ について、T の異なる固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ とすると

$$\sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) = 1$$

が成り立つ。

証明. エルミート行列はユニタリ行列によって対角化できるので、T の固有値 λ_i に対応する固有ベクトルを $\psi_{ij} \in \mathbb{H}$ とラベル付けすると、任意の状態 $\psi \in \mathbb{H}$ を

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j} \psi_{ij} \langle \psi_{ij}, \psi \rangle$$

と展開できます。そこで射影演算子は

$$\mathcal{P}_{\lambda_i}\psi = \sum_{j} \psi_{ij} \langle \psi_{ij}, \psi \rangle$$

と表せるので、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) &= \frac{1}{\|\psi\|^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j} |\langle \psi_{ij}, \psi \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{\|\psi\|^2} \langle \psi, \sum_{i=1}^{n} \sum_{j} \psi_{ij} \langle \psi_{ij}, \psi \rangle \rangle \\ &= \frac{1}{\|\psi\|^2} \langle \psi, \psi \rangle \\ &= 1\end{aligned}$$

となります。 □

さらに、次の公理を置きます。

公理 4

状態 $\psi \in \mathbb{H}$ について観測量 T を測定して固有値 λ が得られた場合、測定によって状態は ψ から $\mathcal{P}_\lambda \psi$ に変化する。

この公理は観測量 T を測定した直後にもう一度 T を測定しても、状態は変化せず前と同じ値が必ず得られるということを表しています。

状態の時間変化は次の公理によって与えられます。

公理 5

状態 $\psi \in \mathbb{H}$ はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = H\psi$$

に従って時間変化する。ただし $\hbar$ はプランク定数であり、$H : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ はエルミートな線形写像でハミルトニアンと呼ばれる。

以上の 5 つの公理によって、有限次元の系の量子力学が定まります。公理 3 における確率の意味や、公理 4 と公理 5 が全く異なる 2 種類の状態の変化を決めているように見えることについては様々な議論がありますが、ここでは深入りしません。

例 9.7: 状態の振動

原子に光を当てたとき、エネルギーの間隔が光のエネルギーに近い 2 つの状態の間で遷移を繰り返すラビ振動という現象を簡単にしたモデルを考えます。ハミルトニアンが $\omega \in \mathbb{R}$ によって

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\omega \\ \hbar\omega & 0 \end{pmatrix}$$

という行列表示を持つとします。状態 $\psi(t) = (a(t), b(t))$ はシュレーディンガー方程式

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{da}{dt} &= \hbar\omega b \\ i\hbar \frac{db}{dt} &= \hbar\omega a \end{aligned}$$

に従って時間変化します。このとき

$$i\frac{d}{dt}(a+b) = \omega(a+b)$$
$$i\frac{d}{dt}(a-b) = -\omega(a-b)$$

より $a(t)+b(t) = (a_0+b_0)e^{-i\omega t},\ a(t)-b(t) = (a_0-b_0)e^{i\omega t}$ となるので

$$a(t) = a_0\cos\omega t - ib_0\sin\omega t$$
$$b(t) = -ia_0\sin\omega t + b_0\cos\omega t$$

となります。そこで状態は

$$\psi(t) = a_0\cos\omega t - ib_0\sin\omega t, -ia_0\sin\omega t + b_0\cos\omega t$$

と求まります。簡単のために $a_0 = 1, b_0 = 0$ とすると

$$\psi(t) = \cos\omega t - i\sin\omega t$$

となります。

線形写像 T の行列表示を

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば、T の固有値は $1, 0$ で、それぞれの固有ベクトルは $\psi_1 = (1,0), \psi_2 = (0,1)$ なので、T を測定して $1, 0$ を得る確率はそれぞれ

$$P_1(t) = \cos^2\omega t,\ P_2 = \sin^2\omega t$$

です。これは最初に $\psi(0) = \psi_1$ だった状態を時刻 t に測定した結果が ψ_1 になる確率が $\cos^2\omega t$ であり、ψ_2 になる確率が $\sin^2\omega t$ であることを表しています。この計算では相互作用の大きさ $\hbar\omega$ がそのまま状態の角振動数 ω になりましたが、ラビ振動でも遷移の振動数は光の強度に比例します。

9.3 無限次元の系

状態空間が無限次元のときでも量子力学を定式化するために、まず有限次元の複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の一般化としてヒルベルト空間を定義します。

定義 9.8: ヒルベルト空間

複素ヒルベルト空間 $\mathbb{H}$ とは、複素ベクトル空間であって、完備な内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を持つものをいう。具体的には、写像

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{H}\times\mathbb{H} \to \mathbb{C}$$

が存在して任意の $\psi, \phi, \xi \in \mathbb{H}$ に対して以下の条件を満たすものをいう。

(1) $\langle \psi + \phi, \xi \rangle = \langle \psi, \xi \rangle + \langle \phi, \xi \rangle$, $\langle \psi, \phi + \xi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle + \langle \psi, \xi \rangle$

(2) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\langle \lambda\psi, \phi \rangle = \overline{\lambda} \langle \psi, \phi \rangle$, $\langle \psi, \lambda\phi \rangle = \lambda \langle \psi, \phi \rangle$

(3) $\langle \psi, \phi \rangle = \overline{\langle \phi, \psi \rangle}$

(4) $\psi \neq 0$ なら $\langle \psi, \psi \rangle > 0$

(5) ノルム $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$ について、任意のコーシー列 $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathbb{H}$ で収束する。ただし $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列であるとは、

$$\lim_{n,m\to\infty} \|\psi_n - \psi_m\| = 0$$

が成り立つことをいう。

数学よりの文献では、(2) の条件が $\langle \lambda\psi, \phi \rangle = \lambda \langle \psi, \phi \rangle$, $\langle \psi, \lambda\phi \rangle = \overline{\lambda} \langle \psi, \phi \rangle$ になっていることがあるので注意してください。

$L^2(\mathbb{R}^3)$ は無限次元複素ヒルベルト空間になります。ただし非退化性の条件 (4) を満たすためには、

$$\|\psi - \psi'\| = 0$$

を満たすような $\psi, \psi' \in L^2(\mathbb{R}^3)$ は同一視されなければなりません。また完備性の条件 (5) を満たすためには、$L^2(\mathbb{R}^3)$ の定義の積分はルベーグ積分と解釈する必要があります。

有限次元のときと同じく観測量は線形写像として定義します。

定義 9.9: 演算子

(線形) 演算子とは、複素ヒルベルト空間 $\mathbb{H}$ の部分ベクトル空間 $D(T)$ を定義域とする $\mathbb{C}$-線形写像 $T : D(T) \to \mathbb{H}$ のことをいう。

定義域 $D(T)$ が $\mathbb{H}$ の稠密部分集合であるような演算子は稠密に定義されているという。

演算子の定義域は必ずしもヒルベルト空間全体になっていなくてもよいです。これは $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}$ の定義域が $L^2(\mathbb{R}^3)$ 全体にならないことから、これらを演算子とみなすために必要です。

さらに有限次元におけるエルミートな線形写像に対応する概念として、対称演算子を定義します。

定義 9.10: 対称演算子

演算子 T が対称であるとは、任意の $\psi, \phi \in D(T)$ に対して

$$\langle \psi, T\phi \rangle = \langle T\psi, \phi \rangle$$

が成り立つことをいう。

位置演算子と運動量演算子は適切な条件の下で対称演算子になります。対称演算子は次の性質が成り立ちます。

命題 9.11: 対称演算子の性質

T を $\mathbb{H}$ 上の対称演算子とすると、次が成り立つ。

(1) 任意の $\psi \in D(T)$ に対して $\langle \psi, T\psi \rangle$ は実数である。また $\psi, T\psi, \cdots, T^{m-1}\psi \in D(T)$ が成り立

つなら $\langle\psi, T^m\psi\rangle$ は実数である。

(2) $\lambda\in\mathbb{C}$ が T の固有値である、つまり 0 でない $\psi\in D(T)$ が存在して $T\psi=\lambda\psi$ を満たすなら λ は実数である。

証明. A は対称演算子なので、任意の $\psi\in D(T)$ に対して

$$\langle\psi, T\psi\rangle = \langle T\psi, \psi\rangle = \overline{\langle\psi, T\psi\rangle}$$

となります。よって $\langle\psi, T\psi\rangle$ は実数です。また $\psi, T\psi, \cdots, T^{m-1}\psi\in D(T)$ が成り立つなら、T が対称演算子であることを繰り返し使うことで

$$\langle\psi, T^m\psi\rangle = \langle T^m\psi, \psi\rangle = \overline{\langle\psi, T^m\psi\rangle}$$

が成り立つので、$\langle\psi, T^m\psi\rangle$ は実数です。

また λ を T の固有値とすると、0 でない $\psi\in D(T)$ が存在して $T\psi=\lambda\psi$ となるので

$$\lambda\langle\psi,\psi\rangle = \langle\psi, \lambda\psi\rangle = \langle\psi, T\psi\rangle = \langle T\psi, \psi\rangle = \langle\lambda\psi, \psi\rangle = \overline{\lambda}\langle\psi,\psi\rangle$$

が成り立ちます。よって $\lambda=\overline{\lambda}$ であり、λ は実数です。 □

このことから観測量は対称演算子として表されるとして有限次元と同じように確率解釈を行いたいところですが、実は無限次元ではうまくいきません。例えば位置演算子は固有値を持ちません。実際、ある関数 $\psi\in L^2(\mathbb{R}^3)$ に対して

$$X_i\psi = \lambda\psi$$

が成立すると仮定すると、任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ に対して

$$\lambda\psi(\boldsymbol{x}) = x_i\psi(\boldsymbol{x})$$

が成立するということになりますが、これは $x_i\neq\lambda$ のとき $\psi(x)=0$ であることを意味します。よって $\langle\psi,\psi\rangle=0$ なので $\psi=0$ になってしまいます。

そこで物理量を表すのは演算子の固有値ではなく、固有値の概念を一般化したスペクトルというものだと考えます。さらにスペクトルが実数であるためには演算子が対称であるだけでは足りず、自己共役であることが必要になります。演算子の共役が次のように定義されます。

命題 9.12: 共役演算子

稠密に定義された演算子 $T: D(T)\to\mathbb{H}$ に対して

$$D(T^*) = \{\psi\in\mathbb{H} \mid 任意の\phi\in D(T)に対して\ \langle\xi,\phi\rangle=\langle\psi, T\phi\rangle\ を満たす\xi\in\mathbb{H}が存在する\}$$

とすると、$\psi\in D(T^*)$ に対し、任意の $\phi\in D(T)$ について $\langle\xi,\phi\rangle=\langle\psi,T\phi\rangle$ を満たす $\xi\in\mathbb{H}$ は一意に定まる。このとき $T^*\psi=\xi$ と定め、$T^*: D(T^*)\to\mathbb{H}$ を T の共役演算子と呼ぶ。

証明. $\psi\in D(T^*)$ を固定します。任意の $\phi\in D(T)$ に対して

$$\langle\xi_1,\phi\rangle = \langle\xi_2,\phi\rangle = \langle\psi, T\phi\rangle$$

が成り立つような $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{H}$ が存在するとします。このとき $D(T)$ は稠密なので、任意の $\chi \in \mathbb{H}$ に対して χ に収束する $D(T)$ の点列 $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在します。任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$\langle \xi_1 - \xi_2, \phi_n \rangle = \langle \xi_1, \phi_n \rangle - \langle \xi_1, \phi_n \rangle = 0$$

が成立するので、$n \to \infty$ とすると内積の連続性から

$$\langle \xi_1 - \xi_2, \chi \rangle = 0$$

となります。特に $\chi = \xi_1 - \xi_2$ の場合を考えると、$\xi_1 - \xi_2 = 0$ が導かれます。 □

定義 9.13: 自己共役演算子

演算子 T が自己共役であるとは、T が稠密に定義されていて、$D(T) = D(T^*)$ および、任意の $\psi \in D(T) = D(T^*)$ に対し $T\psi = T^*\psi$ が成り立つことをいう。

定義から明らかに自己共役演算子は対称演算子になりますが、その逆は一般には成り立ちません。対称演算子 T について、$D(T) \subset D(T^*)$ および $D(T)$ 上で $T = T^*$ にはなりますが、一般には $D(T) \neq D(T^*)$ だからです。

確率解釈を行うためには演算子が自己共役演算子であるか、あるいは適当に拡張すると自己共役演算子になること (本質的自己共役という) を仮定しなければなりません。位置演算子は自己共役であり、運動量演算子は本質的自己共役であることが知られています。

このあたりの詳しい議論は数学的には重要ですが物理的にはそこまで重要ではないので付録に回します。物理的には任意の関数 $f(\boldsymbol{x})$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{x})\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')d^3x = f(\boldsymbol{x}')$$

を満たすデルタ関数 $\delta^3(\boldsymbol{x})$ が存在すると仮定して形式的な議論をすることが多いです。

9.4 調和振動子

1 次元空間を運動する粒子 (つまりヒルベルト空間は $\mathbb{H} = L^2(\mathbb{R})$) について、ハミルトニアンが

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$

である系を考えます。この系を調和振動子と呼びます。

$\psi \in \mathbb{H}$ に対してシュレーディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\psi(x,t)$$

となるので、状態の変化はこの偏微分方程式を解けば求まります。しかし実は、もっと簡単な方法があります。

それは、位置演算子 X と運動量演算子 P の交換関係

$$[X, P] = i\hbar$$

を用いることです。

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X + \frac{i}{m\omega}P\right) \\
a^* &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X - \frac{i}{m\omega}P\right)
\end{aligned}
$$

と定義すると、交換関係から

$$
\begin{aligned}
a^*a &= \frac{1}{2m\hbar\omega}P^2 + \frac{1}{2\hbar}m\omega X^2 + \frac{i}{2\hbar}(XP - PX) \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}P^2 + \frac{1}{2\hbar}m\omega X^2 - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
H = \hbar\omega\left(a^*a + \frac{1}{2}\right)
$$

とハミルトニアンを「因数分解」することができます。また

$$
[a, a^*] = 1
$$

および、任意の $\phi, \psi \in \mathbb{H}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\langle \phi, a\psi \rangle &= \langle a^*\phi, \psi \rangle \\
\langle \phi, a^*\psi \rangle &= \langle a\phi, \psi \rangle
\end{aligned}
$$

が成り立ちます。

ここまでの議論からすぐに分かることがいくつかあります。

命題 9.14

ハミルトニアン H の固有値は全て正である。

証明. ϕ がハミルトニアンの固有値 λ の固有状態であるとすると、

$$
\begin{aligned}
\lambda\|\phi\|^2 &= \langle \phi, H\phi \rangle \\
&= \hbar\omega \langle \phi, a^*a\phi \rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega\|\phi\|^2 \\
&= \hbar\omega \langle a\phi, a\phi \rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega\|\phi\|^2 \\
&= \hbar\omega\left(\|a\phi\|^2 + \frac{1}{2}\|\phi\|^2\right) \\
&> 0
\end{aligned}
$$

となるので、$\lambda > 0$ です。 □

この証明から、ϕ がハミルトニアンの固有値 λ の固有状態なら

$$
\|a\phi\|^2 = \left(\frac{\lambda}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right)\|\phi\|^2 \tag{9}
$$

となることが分かります。また同様の計算により

$$\|a^*\phi\|^2 = \left(\frac{\lambda}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}\right)\|\phi\|^2 \tag{10}$$

も成り立ちます。

命題 9.15

ハミルトニアン H の固有値 λ の固有状態 ϕ が存在すれば次が成り立つ。

(1) $a^*\phi$ は H の固有値 $\lambda + \hbar\omega$ の固有状態である。
(2) $a\phi$ は 0 でなければ H の固有値 $\lambda - \hbar\omega$ の固有状態である。
(3) λ はある自然数 n を用いて $\lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ と書ける。
(4) 任意の自然数 m に対して H の固有値 $\left(m + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ の固有状態が存在する。

証明.

(1) $[H, a^*] = \hbar\omega a^*$ から $H(a^*\phi) = a^*(H\phi + \hbar\omega\phi) = (\lambda + \hbar\omega)a^*\phi$ です。また式 (10) と $\lambda > 0$ から $a^\phi \neq 0$ も成り立ちます。
(2) $[H, a] = -\hbar\omega a$ から $H(a\phi) = a(H\phi - \hbar\omega\phi) = (\lambda - \hbar\omega)a^*\phi$ です。
(3) (2) より自然数 k に対し、$a^k\phi$ は 0 でなければ H の固有値 $\lambda - k\hbar\omega$ の固有状態ですが、H の固有値は正なので十分大きい k に対して $a^k\phi$ は 0 になります。$a^n\phi \neq 0, a^{n+1}\phi = 0$ を満たす自然数 n をとると、式 (9) から $a^n\phi$ の固有値は $\frac{1}{2}\hbar\omega$ なので、$\lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ となります。
(4) (3) の証明から H の固有値 $\frac{1}{2}\hbar\omega$ の固有状態が存在するので、(1) から明らかです。

□

よって、1 つでもハミルトニアン H の固有状態が存在すれば、a, a^* を用いて無限個の固有状態を作ることができます。そこで

$$a\phi_0 = 0,\ \|\phi_0\| = 1$$

を満たす状態 ϕ_0 が存在すると仮定します。ϕ_0 は H の固有値 $\frac{1}{2}\hbar\omega$ の固有状態になります。ϕ_n を

$$\phi_n = (a^*)^n\phi_0$$

と定義すれば、式 (10) から

$$\|\phi_n\| = \sqrt{n!}$$

が成り立ちます。異なる固有値を持つ固有状態は直交するので、

$$\langle\phi_n, \phi_m\rangle = n!\delta_{nm}$$

も成り立ちます。

ここまでの議論は演算子 X, P の具体形は全く使わず、ハミルトニアンの形と $[X, P] = i\hbar$ だけを使ってきたことに注意してください。

具体的に ϕ_0 を求めるためには X, P の具体形を使う必要があります。$a\phi_0 = 0$ は

$$\frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}\phi_0 + x\phi_0 = 0$$

と書けるので、A を複素数の定数として

$$\phi_0(x) = A\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$$

が解になります。ノルムは

$$\begin{aligned}\|\phi_0\|^2 &= |A|^2\int_{-\infty}^{\infty} dx\exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)\\ &= |A|^2\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}}\end{aligned}$$

となるので、$\|\phi_0\| = 1$ とするためには

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$$

と取ればよいです。後は a^* をかけていくことで全ての固有状態 ϕ_n が求まります。

調和振動子のハミルトニアンは分子の振動などのモデルとして用いられます。ハミルトニアンの固有値が等間隔 $\hbar\omega$ で分布することは実験とよく一致します。

10　正準量子化

現実の系では、量子論に対応する古典論がある (と信じられている) 系があります。そのような系で量子論を構成する有力な方法が正準量子化です。まず古典論をハミルトン形式で表します。次に正準変数 q^i, p_i をヒルベルト空間上の自己共役演算子 Q_i, P_i に変え、正準交換関係

$$\begin{aligned}[Q_i, P_j] &= i\hbar\delta_{ij} \\ [Q_i, Q_j] = [P_i, P_j] &= 0\end{aligned}$$

が成立すると仮定します。ハミルトニアンなどの相空間上の関数 $f(q^i, p_i)$ は q^i, p_i を適当に Q_i, P_i に置き換えることで自己共役演算子 F にします。これが正準量子化です。

10.1　正準交換関係の表現

正準変数 q^i, p_i を正準交換関係を満たす自己共役演算子 Q_i, P_i に置き換えると言っても、そのような演算子を具体的にどう作ればよいでのしょうか。

ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^n)$ においては、

$$\begin{aligned}(Q_i^S\psi)(\boldsymbol{x}) &= x_i\psi(\boldsymbol{x}) \\ (P_i^S\psi)(\boldsymbol{x}) &= -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

とすることで正準交換関係が実現できます。これを物理では座標表示と呼びます。

定義 10.1: 正準交換関係と表現

代数的な対象 $Q_1, \cdots, Q_n, P_1, \cdots, P_n$ の間の交換関係

$$\begin{aligned}[Q_i, Q_j] = [P_i, P_j] &= 0 \\ [Q_i, P_j] &= i\hbar\delta_{ij}\end{aligned}$$

を自由度 n の正準交換関係と呼ぶ。

ヒルベルト空間 $\mathbb{H}$ と $\mathbb{H}$ の稠密な部分空間 D 上で自由度 n の正準交換関係を満たす自己共役演算子 $Q_1, \cdots, Q_n, P_1, \cdots, P_n$ の組 $(\mathbb{H}, D, Q_1, \cdots, Q_n, P_1, \cdots, P_n)$ を正準交換関係の表現と呼ぶ。

よって、$(L^2(\mathbb{R}^n), C_0^1(\mathbb{R}^n), Q_1^S, \cdots, Q_n^S, P_1^S, \cdots, P_n^S)$ は正準交換関係の表現です。ただし台が有界であるような C^1 級関数全体の集合を $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ としました。

別の正準交換関係の表現として

$$\begin{aligned}(Q_i\tilde{\psi})(\boldsymbol{p}) &= i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(\boldsymbol{p}) \\ (P_i\tilde{\psi})(\boldsymbol{p}) &= p_i\tilde{\psi}(\boldsymbol{p})\end{aligned}$$

も考えられます。これは物理では運動量表示と呼ばれます。座標表示と運動量表示は合わせてシュレーディン

ガー表現と呼ばれます。座標表示と運動量表示はフーリエ変換

$$
\begin{aligned}
\tilde{\psi}(\boldsymbol{p}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\boldsymbol{i}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}/\hbar} \psi(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\
\psi(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{i}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}/\hbar} \tilde{\psi}(\boldsymbol{p}) d\boldsymbol{p}
\end{aligned}
$$

によって

シュレーディンガー表現とは全く別の正準交換関係の表現もあります。ヒルベルト空間を $l^2(\mathbb{N})$ としたとき、調和振動子のように消滅演算子 A を

$$
\begin{aligned}
D(A) &= \left\{ z \in l^2(\mathbb{N}) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\infty} |\sqrt{n} z_n|^2 < \infty \right\} \\
(Az)_n &= \sqrt{n+1} z_{n+1}
\end{aligned}
$$

と定義します。共役演算子は

$$
\begin{aligned}
D(A^*) &= \left\{ z \in l^2(\mathbb{N}) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\infty} |\sqrt{n} z_{n-1}|^2 < \infty \right\} \\
(A^* z)_n &= \begin{cases} \sqrt{n} z_{n-1}, & (n \geq 1) \\ 0, & (n = 0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

となります。このとき $l_0(\mathbb{N})$ をある番号以降の値がすべて 0 になっているような複素数列の集合とすれば、$l_0(\mathbb{N})$ 上で交換関係

$$
[A, A^*] = 1
$$

が成り立ちます。このとき $m, \omega > 0$ を定数として

$$
\begin{aligned}
Q_0 &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (A^* + A) \\
P_0 &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (A^* - A)
\end{aligned}
$$

とすれば $l_0(\mathbb{N})$ 上で

$$
\begin{aligned}
[Q_0, P_0] &= \frac{i\hbar}{2} [A^* + A, A^* - A] \\
&= i\hbar [A, A^*] \\
&= i\hbar
\end{aligned}
$$

が成り立ちます。Q_0, P_0 は本質的自己共役であることが示せるので、Q_0, P_0 を適切に拡張したもの (閉包) を Q^H, P^H とすれば、これらは自己共役演算子になります。よって $(l^2(\mathbb{N}), l_0(\mathbb{N}), Q^H, P^H)$ は自由度 1 の正準交換関係の表現になります。これをボルン・ハイゼンベルク・ヨルダン表現と呼ぶこともあります。

逆に、正準交換関係を満たす演算子 Q, P があるなら

$$
\begin{aligned}
A &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} Q + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} P \\
A^* &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} Q - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} P
\end{aligned}
$$

と定義すれば調和振動子と同じような議論によってヒルベルト空間を $l^2(\mathbb{N})$ とみなすことができるのではないかという期待ができますが、残念ながら A^* が有界でなければ $A^*\psi$ が $D(A^*)$ に入らない可能性があるためこれは正しくありません。しかしワイル型の交換関係という正準交換関係よりも強いもの (この記事では定義しません) については次の定理が成り立ちます。

定理 10.2: ストーン・フォンノイマンの定理

ワイル型の交換関係の既約表現は互いにユニタリ変換で移り合う。つまり全て同値である。

この定理によって、シュレーディンガー表現とボルン・ハイゼンベルク・ヨルダン表現は同値であり、量子論的に等価であることが保証されます。

10.2 正準量子化のあいまいさ

q^i, p_i を正準交換関係を満たす自己共役演算子 Q^i, P_i に置き換えることができたとしても、まだ相空間上の関数 $f(q^i, p_i)$ を自己共役演算子に置き換える方法を考える必要があります。

簡単のために 1 次元の場合を考えます。$f(q,p) = qp$ を単に QP としてしまうと、

$$\langle \psi, QP\phi \rangle = \langle Q\psi, P\phi \rangle = \langle PQ\psi, \phi \rangle$$

となるので $QP \neq PQ$ より QP は対称演算子にすらなりません。対称演算子にするには

$$Q(qp) = \frac{1}{2}(QP + PQ)$$

とすればよいです。

q, p の 3 次以上の多項式ではどうやって対称演算子にするかにあいまいさが生じます。例えば

$$Q(q^n p^m) = \frac{1}{2}(Q^n P^m + P^m Q^n)$$

とすることが考えられます。あるいは q, p の全ての並び替えを考慮して例えば

$$Q_{\mathrm{Weyl}}(q^2 p) = \frac{1}{3}(Q^2 P + QPQ + PQ^2)$$

とすることが考えられます。後者はワイルの量子化と呼ばれます。

正準量子化を一意に定めるために、条件

$$[Q(f), Q(g)] = -i\hbar Q(\{f, g\})$$

を課すことを提案されました。つまり、古典論におけるポアソン括弧 $\{f, g\}$ が、量子論における交換関係に置き換わるということです。ワイルの量子化はこの条件を 2 次以下の多項式に対して満たしています。

命題 10.3

f を q, p の 2 次以下の多項式とし、g を q, p の任意の次数の多項式とする。このとき

$$[Q_{\mathrm{Weyl}}(f), Q_{\mathrm{Weyl}}(g)] = -i\hbar Q_{\mathrm{Weyl}}(\{f, g\})$$

が成り立つ。

しかし 3 次以上の多項式に対してはワイルの量子化は条件を満たしません。例えば $f = qp^2, g = q^2p$ とすると合いません。

実はどんな量子化も条件を満たすことはできません。

定理 10.4: グレーネヴォルトの定理

次の条件を満たす Q は存在しない。

(1) Q は 4 次以下の q, p の多項式を微分演算子の多項式に移す。

(2) $Q(1) = 1$

(3) $Q(q^i) = Q_i^S, Q(p_i) = P_i^S$

(4) 任意の q, p の 3 次以下の多項式 f, g に対して

$$[Q(f), Q(g)] = -i\hbar Q(\{f, g\})$$

が成り立つ。

証明は長いので省略しますが、[Hal13] に載っています。

11 ユークリッド空間での幾何学的量子化

グレーネヴォルトの定理によると、相空間 $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ において量子化を行うとき、次の条件

(1) $\mathbb{R}^{2n}$ 上の実数値 C^∞ 級関数 f はあるヒルベルト空間 $\mathbb{H}$ 上の自己共役演算子 $Q(f)$ に置き換えられる。
(2) 定数関数 $\mathbf{1}$ に対して $Q(\mathbf{1}) = 1$
(3) $Q(\{f, g\}) = \dfrac{i}{\hbar}[Q(f), Q(g)]$
(4) $\mathbb{H}$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ である。

を満たすのは不可能でした。普通の正準量子化では条件 (3) を諦めています。正準交換関係を実現するためには条件 (2) を諦めることはできないので、残りの可能性は条件 (4) を諦め、ヒルベルト空間を大きく取って $\mathbb{H} = L^2(\mathbb{R}^{2n})$ とすることです。

リー代数の準同型 $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$ を用いると、条件 (3) を満たすためには

$$f \mapsto -i\hbar X_f$$

とすればよいです。しかしこれでは $Q(\mathbf{1}) = 0$ になるので (2) が満たされません。

そこで関数 f をかける演算子を加えて

$$f \mapsto f - i\hbar X_f$$

とすると、(3) が満たされなくなります。実際、

$$\begin{aligned}
[f - i\hbar X_f, g - i\hbar X_g] &= -i\hbar[X_f, g] - i\hbar[f, X_g] - \hbar^2[X_f, X_g] \\
&= -i\hbar(X_f g) + i\hbar(X_g f) - \hbar^2 X_{\{f,g\}} \\
&= -2i\hbar\{f, g\} - \hbar^2 X_{\{f,g\}} \\
&= -i\hbar(\{f, g\} - i\hbar X_{\{f,g\}}) - i\hbar\{f, g\}
\end{aligned}$$

となるので余計な項 $-i\hbar\{f, g\}$ が出てしまいます。

これを打ち消すために 1 次微分形式 $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n})$ を加えて

$$Q(f) = f - i\hbar X_f - \theta(X_f)$$

としてみます。条件 (2) は満たされているので、(3) を確かめます。

$$\begin{aligned}
[Q(f), Q(g)] &= [f - i\hbar X_f - \theta(X_f), g - i\hbar X_g - \theta(X_g)] \\
&= -i\hbar(\{f, g\} - i\hbar X_{\{f,g\}}) - i\hbar\{f, g\} + i\hbar[X_f, \theta(X_g)] + i\hbar[\theta(X_f), X_g] \\
&= -i\hbar(\{f, g\} - i\hbar X_{\{f,g\}}) - i\hbar\{f, g\} + i\hbar X_f\{\theta(X_g)\} - i\hbar X_g\{\theta(X_f)\}
\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}
d\theta(X_f, X_g) &= X_f\{\theta(X_g)\} - X_g\{\theta(X_f)\} - \theta([X_f, X_g]) \\
&= X_f\{\theta(X_g)\} - X_g\{\theta(X_f)\} - \theta(X_{\{f,g\}})
\end{aligned}$$

となるので、

$$[Q(f), Q(g)] = -i\hbar Q(\{f, g\}) + i\hbar(d\theta(X_f, X_g) - \{f, g\})$$

を得ます。よって条件 (3) が満たされることは

$$\{f, g\} = d\theta(X_f, X_g)$$

と同値です。$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$ なので、これは

$$\omega = d\theta$$

が成立することを意味します。つまり、θ がシンプレクティックポテンシャルであることが条件 (2)(3) が満たされる必要十分条件です。

$\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n})$ には任意性がありますが、とりあえず $\mathbb{R}^{2n}$ の座標 $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ を用いて

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} p_i dq^i$$

と取ることにしましょう。このとき

$$X_f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

なので、

$$X_{q^i} = -\frac{\partial}{\partial p_i},\ X_{p_i} = \frac{\partial}{\partial q^i}$$

となります。よって

$$Q(q^i) = q^i + i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i}$$
$$Q(p_i) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^i}$$

を得ます。これらの演算子が $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 上で本質的自己共役であることを示すことができます。

シンプレクティックポテンシャル θ には任意性があるので、この量子化は一意に定まりません。別のシンプレクティックポテンシャル θ' をとると $d(\theta - \theta') = \omega - \omega = 0$ なので、ポアンカレの補題より $u \in C^\infty(M)$ を用いて $\theta' = \theta + du$ と書くことができます。量子化の差は $Q'(f) - Q(f) = -du(X_f) = -X_f u$ ですが、

$$Q'(f)\{e^{iu/\hbar}\psi\} = e^{iu/\hbar}(Q'(f)\psi + (X_f u)\psi) = e^{iu/\hbar} Q(f)\psi$$

となるので、シンプレクティックポテンシャルを取り替えたときは波動関数の位相を $\psi \mapsto e^{iu/\hbar}\psi$ と変えればよいです。

ここまでの議論によって条件 (1)(2)(3) を満たす量子化を行うことができました。しかし、ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ は大きすぎます。正準量子化で扱ったように、n 次元の古典系に対応するヒルベルト空間は $L^2(\mathbb{R}^n)$ であるはずです。よって $Q(f)$ は本当の量子化ではないので前量子化と呼ばれます。

例 11.1: 調和振動子の前量子化

ヒルベルト空間が大きいことによる問題を具体的に見るために、調和振動子のハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

を前量子化します。

$$X_H = \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q} - m\omega^2 q\frac{\partial}{\partial p}$$

なので、$\theta = pdq$ とした場合は

$$Q(H) = -\frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 - i\hbar\frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q} + i\hbar m\omega^2 q\frac{\partial}{\partial p}$$

となります。これは複雑なので、代わりに

$$\theta = \frac{1}{2}(pdq - qdp)$$

としましょう。こうすると $\theta(X_H)$ が H と打ち消し合って

$$Q(H) = -i\hbar\frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q} + i\hbar m\omega^2 q\frac{\partial}{\partial p}$$

となります。極座標

$$\begin{aligned} q &= \frac{r}{m\omega}\cos\phi \\ p &= r\sin\phi \end{aligned}$$

を取れば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\phi} &= \frac{\partial q}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial p}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial p} \\ &= -\frac{r}{m\omega}\sin\phi\frac{\partial}{\partial q} + r\cos\phi\frac{\partial}{\partial p} \\ &= -\frac{p}{m\omega}\frac{\partial}{\partial q} + m\omega q\frac{\partial}{\partial p} \end{aligned}$$

となるので、

$$Q(H) = i\hbar\omega\frac{\partial}{\partial\phi}$$

と表せます。固有ベクトルは f を任意の (無限遠で 0 になる) 関数とすると

$$\psi(r,\phi) = f(r)e^{-in\phi}$$

であり、固有値は $n\hbar\omega$ です。n は任意の整数にとることができるので、これはハミルトニアンの固有値が下に有界でないことを表しており不合理です。

調和振動子の例からも分かるように、前量子化は正しい量子化ではありません。しかし前量子化によって得られたヒルベルト空間を小さくすることができれば、正しい量子化を得ることができます。このような一連の操作を行って一般のシンプレクティック多様体 M 上での量子化を与えるのが幾何学的量子化です。

12　直線束

ユークリッド空間での前量子化ではシンプレクティックポテンシャルを変えたとき、波動関数の位相を変える必要がありました。これは波動関数ではなく各点に 1 次元の複素ベクトルが対応しているようなものを考え、ベクトル空間の基底を変えたため成分の位相が変わっているのだと考えると自然です。そこで直線束とその切断という概念を導入します。

12.1　ベクトル束と切断

直線束はベクトル束の特別な場合なので、この節ではベクトル束で議論することにします。$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とします。

定義 12.1: ベクトル束

E, M を微分可能多様体とし、C^∞ 級写像 $\pi : E \to M$ が次の条件を満たすとする。

(1) 任意の $p \in M$ に対し、$\pi^{-1}(p)$ は $\mathbb{K}$ 上の r 次元ベクトル空間である。

(2) 任意の $p \in M$ に対して p を含む M の開集合 U と、局所自明化と呼ばれる微分同相写像 $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{K}^r$ が存在して次の条件を満たす。

  (a) $p_1 : U \times \mathbb{K}^r \to U$ を射影とすると、$p_1 \circ \phi = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$ が成り立つ。

  (b) $p_2 : U \times \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^r$ を射影とすると、各 $q \in U$ に対し $p_2 \circ \phi|_{\pi^{-1}(q)} : \pi^{-1}(q) \to \mathbb{K}^r$ はベクトル空間としての同型写像である。

このとき π は階数 r のベクトル束であるという。$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときは実ベクトル束であるといい、$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のときは複素ベクトル束であるという。また M の開集合 U に対し $\pi^{-1}(U)$ のことを $E|_U$ と書き、$p \in M$ に対して $\pi^{-1}(p)$ を E_p と書いて p における E のファイバーという。E を全空間と呼ぶ。

特に、階数が 1 のベクトル束を直線束という。

つまりベクトル束は各点ごとにベクトル空間が対応しており、局所的には $U \times \mathbb{K}^r$ と同じだとみなせるようなものです。今までに出てきた概念では、接束 TM と余接束 T^*M は実ベクトル束です。

定義 12.2: ベクトル束の準同型

$\pi : E \to M$ と $\pi' : E' \to M$ をベクトル束とする。C^∞ 級写像 $\psi : E \to E'$ が次の条件を満たすとする。

(1) $\pi = \pi' \circ \psi$

(2) 任意の $p \in M$ に対し、E_p への制限 $\psi|_{E_p} : E_p \to E'_p$ はベクトル空間の準同型写像である。

このとき $\psi : E \to E'$ はベクトル束の準同型であるという。

ベクトル束の準同型 $\psi : E \to E'$ が全単射で $\psi^{-1} : E' \to E$ もベクトル束の準同型であるとき、ψ はベクトル束の同型写像であるという。ベクトル束の同型写像 $\psi : E \to E'$ が存在するとき、ベクトル束 $\pi : E \to M$ と $\pi : E' \to M$ は同型であるという。

最も簡単なベクトル束は全空間が $E = M \times \mathbb{K}^r$ であり、$\pi : E \to M$ が射影であるようなものです。$\pi : M \times \mathbb{K}^r \to M$ と同型であるようなベクトル束は自明束であるといいます。

定義 12.3: 切断

ベクトル束 $\pi : E \to M$ の開集合 $U \subset M$ 上の切断とは、C^∞ 級写像 $s : U \to E$ であって

$$\pi \circ s = \mathrm{Id}|_U$$

を満たすものをいう。U 上の切断の全体を $\Gamma(U, E)$ と書く。

ベクトル場は接束 TM の切断であり、1 次微分形式は余接束 T^*M の切断です。

切断 $s, t \in \Gamma(U, E)$ の和を各点ごとに

$$(s + t)(p) = s(p) + t(p)$$

と定義できます。また複素数値 C^∞ 級関数 $f \in C^\infty(U)$ 倍を

$$(fs)(p) = f(p)s(p)$$

と定義できます。

命題 12.4

直線束 $\pi : L \to M$ が自明束であることは、切断 $s \in \Gamma(M, E)$ が存在して任意の $p \in M$ において $s(p) \neq 0$ を満たすことと同値である。

証明. 直線束 $\pi : L \to M$ が自明束であれば、ベクトル束の同型 $\psi : L \to M \times \mathbb{K}$ が存在します。$p \in M$ に対して切断 $s \in \Gamma(M, L)$ を

$$s(p) = \psi^{-1}(p, 1)$$

とすれば s は条件を満たします。

逆に、条件を満たす $s \in \Gamma(M, L)$ が存在するとします。このとき

$$\psi : M \times \mathbb{K} \to E, \ (p, \lambda) \mapsto \lambda s(p)$$

と置くと、これは C^∞ 級写像であり、任意の $p \in M$ において

$$\psi_p : \{p\} \otimes \mathbb{C} \to E, \ (p, \lambda) \mapsto \lambda s(p)$$

は $s(p) \neq 0$ よりベクトル空間の同型写像です。よって ψ はベクトル束の同型写像であり、$\pi : L \to M$ は自明束です。 □

局所自明化 $\phi : L|_U \to U \times \mathbb{K}$ について、任意の $p \in U$ に対して

$$e(p) = \phi^{-1}(p, 1)$$

とすることで $e \in \Gamma(U, L)$ を作ることができ、任意の $p \in U$ において $e(p) \neq 0$ が成り立ちます。よって $\pi|_U : L|_{U_\alpha} \to M$ は自明束です。

また e を定めれば局所自明化 ϕ は定まるので、e を定めることと局所自明化を定めることは同値です。e は局所自明化 ϕ が定める枠場と呼ばれます。

12.2　変換関数

これ以降の節では複素直線束だけを議論することにします。

直線束 $\pi : L \to M$ の定義から、L の開被覆 $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ と局所自明化 $\phi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}$ が存在します。このとき ϕ_α が定める枠場を $e_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, L)$ とすると $U_\alpha \cap U_\beta$ 上で

$$g_{\alpha\beta}(p) = \frac{e_\beta(p)}{e_\alpha(p)}$$

として $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}$ を定義することができます。これを変換関数と呼びます。

変換関数は明らかに次の性質を満たします。

命題 12.5: コサイクル条件

$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \varnothing$ であるとき、任意の $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ に対して

$$g_{\alpha\beta}(p) g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p)$$

が成り立つ。

これはチェックコホモロジーにおける 1–コサイクルの条件と明らかに類似しています。実際、$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に値を取る C^∞ 級関数の層についてチェックコホモロジーを考えると、この変換関数の性質は (g_{ij}) が 1–コサイクルになる条件と一致します。

さらに逆も成り立ちます。

命題 12.6: 直線束の構成

微分可能多様体 M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ と C^∞ 級関数の族 $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}\}_{\alpha,\beta \in A}$ が与えられていれば、$\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$ を変換関数とする直線束 $\pi : L \to M$ を構成することができる。

証明. 非交和

$$L' = \bigsqcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \times \mathbb{C})$$

に対して同値関係 $\sim$ を $(p_\alpha, v) \in U_\alpha \times \mathbb{C}, (p_\beta, w) \in U_\beta \times \mathbb{C}$ に対して $(p_\alpha, v) \sim (p_\beta, w)$ であることを $p_\alpha = p_\beta$ かつ $w = g_{\alpha\beta}(p_\alpha)v$ であることとして定めます。このとき

$$L = L'/\sim$$

に対して商位相を入れたとき、標準的射影を $\rho : L' \to L$ とすると $\rho|_{U_\alpha \times \mathbb{C}} : U_\alpha \times \mathbb{C} \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ は同相写像になります。ただし $\pi : L \to M$ は $\pi(\rho(p_\alpha, v)) = p_\alpha$ によって定義します。よって L は微分可能多様体になり、$\phi_\alpha = \rho|_{U_\alpha \times \mathbb{C}}^{-1}$ が局所自明化になるので $\pi : L \to M$ は直線束になり、変換関数は $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$ となります。 □

よって、変換関数を与えれば直線束をつくることができます。このことは後で前量子化を行うときに用いられます。

12.3 接続

微分形式とはベクトル場を引数にとって C^∞ 級関数を返す交代的な多重線形性写像のことでした。これを直線束の場合に一般化します。

定義 12.7: 直線束に値を取る微分形式

$\pi : L \to M$ を直線束とする。k 個のベクトル場をとって $\pi : L \to M$ の切断を返す写像 $s : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(M, L)$ が交代性と多重線形性を満たすとき、s は直線束 $\pi : L \to M$ に値を取る k 次微分形式であるという。直線束 $\pi : L \to M$ に値を取る k 次微分形式の全体を $\Omega^k(L)$ と書く。ただし $\Omega^0(L) = \Gamma(M, L)$ とする。

普通の k 次微分形式 $\phi \in \Omega^k(M)$ と切断 $s \in \Gamma(M, L)$ があれば、直線束に値を取る k 次微分形式 $s \otimes \phi \in \Omega^k(L)$ を $X_1, \cdots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$(s \otimes \phi)(X_1, \cdots, X_k) = \phi(X_1, \cdots, X_k)s$$

と定義することができます。より一般に、$\phi \in \Omega^k(M), s \in \Omega^l(L)$ に対してウェッジ積 $\phi \wedge s \in \Omega^{k+l}(L)$ を普通の微分形式のときと同様に定義することもできます。

直線束に値を取る微分形式の次数を 0 から 1 に上げる線形写像であって、ライプニッツ則を満たすものが接続です。

定義 12.8: 接続

$\mathbb{C}$ 上の線形写像 $\nabla : \Omega^0(L) \to \Omega^1(L)$ が任意の $f \in C^\infty(M)$ と $s \in \Gamma(M, L)$ に対して

$$\nabla(fs) = f\nabla s + s \otimes df$$

を満たすとき、∇ は接続であるという。また $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $(\nabla s)(X) = \nabla_X s \in \Gamma(M, L)$ と書いて s の X による共変微分という。

局所自明化 $\phi_\alpha : L|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}$ が定める枠場を $e_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, L)$ とすると、任意の切断 $s \in \Gamma(E)$ は

$$s|_{U_\alpha} = s_\alpha e_\alpha$$

と書けます。そこで接続 ∇ の作用は

$$\begin{aligned}(\nabla s)|_{U_\alpha} &= s_\alpha \nabla e_\alpha + e_\alpha \otimes ds_\alpha \\ &= e_\alpha \otimes (d - iA_\alpha)s_\alpha\end{aligned}$$

と書くことができます。ただし各点 $p \in U_\alpha$ で局所接続形式 A_α を

$$A_\alpha(p) = i\frac{(\nabla e_\alpha)(p)}{e_\alpha(p)}$$

と定義しました。A_α は一般に複素数の値を取るので、$A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathbb{C})$ と書くことにします。

別の局所自明化 $\phi_\beta : L|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}$ に対しては、ϕ_β が定める枠場を e_β とすると $U_\alpha \cap U_\beta$ 上で

$$\begin{aligned}\nabla e_\beta &= \nabla(g_{\alpha\beta}e_\alpha)\\ &= g_{\alpha\beta}\nabla e_\alpha + e_\alpha dg_{\alpha\beta}\\ &= e_\beta \otimes \left(-iA_\alpha + \frac{dg_{\alpha\beta}}{g_{\alpha\beta}}\right)\end{aligned}$$

となるので、

$$A_\beta = A_\alpha + i\frac{dg_{\alpha\beta}}{g_{\alpha\beta}} \tag{11}$$

と書けます。

また逆に、任意の局所自明化に対して式 (11) の条件を満たすような $A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathbb{C})$ を定めれば接続 $\nabla : L \to M$ が一意に定まります。

12.4 曲率

接続 ∇ は微分形式の次数を 0 から 1 にするという意味で全微分と似ています。そこで全微分から外微分を定義したように、$\Omega^k(L)$ を $\Omega^{k+1}(L)$ にする共変外微分を定義できます。

定義 12.9: 共変外微分

$\pi : L \to M$ をベクトル束とし、∇ をその上の接続とする。写像 $d^\nabla : \Omega^k(L) \to \Omega^{k+1}(L)$ を、$s \in \Omega^k(L)$ と $X_1, \cdots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned}d^\nabla s(X_1, \cdots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}\nabla_{X_i}\{s(X_1, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, X_{k+1})\}\\ &\quad + \sum_{1\leq i<j\leq k+1}(-1)^{i+j}s([X_i, X_j], X_1, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, \widehat{X_j}, \cdots, X_{k+1})\end{aligned}$$

とすることで定義する。d^∇ を共変外微分という。ただし $k=0$ のときは ∇s を $s \in \Gamma(M, L)$ の共変外微分とする。

$s \in \Omega^k(L)$ に対して確かに $d^\nabla s \in \Omega^{k+1}(L)$ となっていることの証明は外微分のときと同様です。また外微分のときと同じくライプニッツ則が成り立ちます。

命題 12.10: 共変外微分のライプニッツ則

$s \in \Omega^k(L), \phi \in \Omega^l(M)$ に対して

$$d^\nabla(s \wedge \phi) = (d^\nabla s) \wedge \phi + (-1)^k s \wedge d\phi$$

が成り立つ。

ライプニッツ則は $k=0$ のときは

$$d^\nabla(s \otimes \phi) = (\nabla s) \wedge \phi + s \otimes d\phi$$

と書け、$l=0$ のときは

$$d^\nabla(fs) = fd^\nabla s + (-1)^k s\wedge df$$

となるので、見た目が異なることに注意してください。

外微分を 2 回行うと 0 になりましたが、共変外微分は 2 回行っても 0 になりません。しかし $f\in C^\infty(M)$ と $s\in\Gamma(M,L)$ に対して

$$\begin{aligned}(d^\nabla\circ d^\nabla)(fs) &= d^\nabla(fd^\nabla s + s\otimes df)\\ &= f(d^\nabla\circ d^\nabla)s - d^\nabla s\wedge df + d^\nabla s\wedge df + s\otimes(d\circ d)f\\ &= f(d^\nabla\circ d^\nabla)s\end{aligned}$$

となるので、$d^\nabla\circ d^\nabla$ は $\Omega^2(M,\mathbb{C})$ の元とみなすことができます[*21]。つまり $e_\alpha\in\Gamma(U_\alpha,L)$ を用いると任意の $s\in\Gamma(M,L)$ は U_α 上で $s|_{U_\alpha}=fe_\alpha$ と書くことができるので、

$$\begin{aligned}(d^\nabla\circ d^\nabla)(s)|_{U_\alpha} &= (d^\nabla\circ d^\nabla)(fe_\alpha)\\ &= f(d^\nabla\circ d^\nabla)(e_\alpha)\end{aligned}$$

であり、

$$R^\nabla|_{U_\alpha} = i\frac{(d^\nabla\circ d^\nabla)(e_\alpha)}{e_\alpha}$$

と定義すれば

$$(d^\nabla\circ d^\nabla)(s) = -is\otimes R^\nabla$$

と書けるということです。

定義 12.11: 曲率

直線束 $\pi: L\to M$ 上の接続 ∇ に対し、$R^\nabla = id^\nabla\circ d^\nabla\in\Omega^2(M,\mathbb{C})$ を ∇ の曲率という。

局所自明化 $\phi_\alpha: L|_{U_\alpha}\to U_\alpha\times\mathbb{C}$ に対しては、ϕ_α が定める枠場を $e_\alpha\in\Gamma(U_\alpha,L)$ とし、局所接続形式を $A_\alpha\in\Omega^1(U_\alpha)$ とすると

$$\begin{aligned}(d^\nabla\circ d^\nabla)e_\alpha &= d^\nabla(\nabla e_\alpha)\\ &= -d^\nabla(e_\alpha\otimes iA_\alpha)\\ &= -(\nabla e_\alpha)\wedge iA_\alpha - e_\alpha\wedge idA_\alpha\\ &= e_\alpha\otimes(A_\alpha\wedge A_\alpha - idA_\alpha)\\ &= -e_\alpha\otimes idA_\alpha\end{aligned}$$

となります。よって曲率は局所的に

$$R|_{U_\alpha} = dA_\alpha$$

と書けます。

[*21] 一般のベクトル束では $\Omega^2(\mathrm{End}\,E)$ の元になります。

この書き方だと曲率が局所自明化に依存しているように見えますが、実際は別の局所自明化 $\phi_\beta : L|_{U_\beta} \to U_\beta \times \mathbb{C}$ の局所接続形式は $U_\alpha \cap U_\beta$ 上で

$$A_\beta = A_\alpha + i\frac{dg_{\alpha\beta}}{g_{\alpha\beta}} \tag{12}$$

と書けるので、$U_\alpha \cap U_\beta$ 上

$$dA_\alpha = dA_\beta$$

が成立します。

またこの表示から次のことが分かります。

命題 12.12: 曲率は閉形式

曲率 $R^\nabla \in \Omega^2(M, \mathbb{C})$ は閉形式である。つまり $dR^\nabla = 0$ が成り立つ。

また、共変外微分の定義から、

$$\begin{aligned}\{(d^\nabla \circ d^\nabla)(s)\}(X, Y) &= \{d^\nabla(\nabla s)\}(X, Y) \\ &= \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s\end{aligned}$$

が成り立つので、曲率を

$$R^\nabla(X, Y) = i(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})$$

と表すこともできます。右辺は見かけ上微分を含んでいるようにみえますが、これまで示したように相殺して普通の微分形式になります。

12.5 エルミート計量

直線束 L 上の切断の全体 $\Gamma(U, L)$ をヒルベルト空間とみなすためには、切断の間に内積が定義されている必要があります。内積は直線束にエルミート計量という構造を加えることで定義されます。まずベクトル空間にエルミート内積を定義します。

定義 12.13: エルミート内積

複素ベクトル空間 V 上の写像 $h : V \times V \to \mathbb{C}$ がエルミート内積であるとは、次の条件を満たすことを言う。

(1) 任意の $v, w_1, w_2 \in V$ に対し $h(v, w_1 + w_2) = h(v, w_1) + h(v, w_2)$ が成り立つ。
(2) 任意の $v, w \in V$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $h(v, \lambda w) = \lambda h(v, w)$ が成り立つ。
(3) 任意の $v, w \in V$ に対して $h(v, w) = \overline{h(v, w)}$ が成り立つ。
(4) 任意の $v \in V$ に対して $h(v, v) \geq 0$ であり、等号成立は $v = 0$ のときに限る。

定義 12.14: エルミート計量

直線束 $\pi : L \to M$ の各点 $p \in M$ のファイバー L_p にエルミート内積 $h_p : L_p \times L_p \to \mathbb{C}$ が定義され、任意の $s, t \in \Gamma(M, L)$ に対し、

$$\{h(s,t)\}(p) = h_p(s(p), t(p))$$

と定義すると $h(s,t) \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ であるとする。ただし $C^\infty(M, \mathbb{C})$ は複素数値の C^∞ 級関数全体の集合とする。このとき h をエルミート計量と呼び、組 (L, h) をエルミート直線束と呼ぶ。

つまり、各点で滑らかに内積が定義されていることがエルミート計量の条件です。

例 12.15: 自明束のエルミート計量

自明束 $\pi : M \times \mathbb{C} \to M$ には自然にエルミート計量 h_0 を

$$h_{0p}(v, w) = \overline{v} w$$

と定義することができます。

エルミート計量と両立する接続を定義します。

定義 12.16: エルミート接続

直線束 $\pi : L \to M$ 上の接続 ∇ がエルミート計量 h を保つとは、任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ と切断 $s, t \in \Gamma(M, L)$ に対して

$$Xh(s,t) = h(\nabla_X s, t) + h(s, \nabla_X t)$$

が成り立つことをいう。このとき ∇ はエルミート直線束 (L, h) 上のエルミート接続であるという。

命題 12.17

直線束 $\pi : L \to M$ 上の接続 ∇ がエルミート計量 h を保つことの必要十分条件は、任意の規格化された枠場 $e_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, L)$ が定める局所自明化 $\phi_\alpha : L|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}$ についての ∇ の局所接続形式 A_α が実数であることである。

証明. 任意の切断 $s, t \in \Gamma(M, L)$ について

$$s|_{U_\alpha} = s_\alpha e_\alpha, \ t|_{U_\alpha} = t_\alpha e_\alpha$$

とします。このとき任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned}
&Xh(s,t) - h(\nabla_X s, t) - h(s, \nabla_X t) \\
&= X\{\overline{s_\alpha} t_\alpha h(e_\alpha, e_\alpha)\} - h((X s_\alpha - i A_\alpha(X) s_\alpha) e_\alpha, t_\alpha e_\alpha) - h(e_\alpha, (X t_\alpha - i A_\alpha(X) t_\alpha) e_\alpha) \\
&= -i \overline{s_\alpha} t_\alpha (\overline{A_\alpha(X)} - A_\alpha(X))
\end{aligned}$$

となるので、$A_\alpha = \overline{A_\alpha}$ は ∇ が h を保つことと同値です。 □

この命題と R^∇ の局所的な表示から次のことが分かります。

命題 12.18

エルミート直線束 (L, h) 上のエルミート接続 ∇ の曲率は実数である。つまり $R^{\nabla} \in \Omega^2(M)$ となる。

この命題が、曲率 R^{∇} の定義に係数 i を含めておいた理由です。

13　前量子化

13.1　前量子化ヒルベルト空間

定義 13.1: 前量子化束

(M,ω) をシンプレクティック多様体とする。M を底空間とするエルミート直線束 (L,h) とその上のエルミート接続 ∇ が存在して

$$\omega = \hbar R^{\nabla}$$

を満たすとき、(M,ω) は量子化可能であるという。このとき (L,∇,h) を前量子化束と呼ぶ。

与えられたシンプレクティック多様体 (M,ω) が量子化可能であるか、もしそうなら前量子化束 (L,∇,h) は一意に決まるのかが気になるところですが、この議論は後ですることにして、ここではまず前量子化束上のヒルベルト空間を構成します。

定義 13.2

前量子化束 (L,∇,h) の切断 $s\in\Gamma(M,L)$ が二乗可積分であるとは、

$$\|s\| = \sqrt{\int_M h(s,s)\omega^n}$$

が有限であることをいう。二乗可積分な切断の全体を H_{pre} と書く。二乗可積分な切断 $s_1,s_2\in H_{\mathrm{pre}}$ の内積を

$$\langle s_1,s_2\rangle = \int_M h(s_1,s_2)\omega^n$$

と定義する。

H_{pre} の内積は完備ではないのでヒルベルト空間ではありませんが、完備化することでヒルベルト空間 $\mathbb{H}(M,L)$ を得ることができます。

命題 13.3: 完備化

H_{pre} のコーシー列 $s=(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と $t=(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について、実数列 $(\|s_n-t_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列だから収束する。このときコーシー列 s,t の距離を

$$d(s,t) = \lim_{n\to\infty}\|s_n-t_n\|$$

と定義する。$d(s,t)=0$ であるとき $s\sim t$ とすると $\sim$ は同値関係になる。

H_{pre} のコーシー列全体の集合を同値関係 $\sim$ で割ったものを $\mathbb{H}(M,L)$ とすると、$\mathbb{H}(M,L)$ には自然に内積を定義でき、ヒルベルト空間になる。

証明. H_{pre} のコーシー列 s, t の内積を

$$\langle s, t\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle s_n, t_n\rangle$$

で定義します。右辺はシュワルツの不等式[*22]

$$|\langle s_n, t_n\rangle| \leq \|s_n\| \cdot \|t_n\|$$

から $(\langle s_n, t_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ が実数のコーシー列になるので収束します。また H_{pre} のコーシー列 s_1, s_2 が $s_1 \sim s_2$ を満たすとき、任意のコーシー列 t に対して

$$\begin{aligned} |\langle s_{1n}, t_n\rangle - \langle s_{2n}, t_n\rangle| &= |\langle s_{1n} - s_{2n}, t_n\rangle| \\ &\leq \|s_{1n} - s_{2n}\| \cdot \|t_n\| \end{aligned}$$

が成り立つので、$n\to\infty$ として $\langle s_1, t\rangle = \langle s_2, t\rangle$ を得ます。よってこの内積の定義は、$\mathbb{H}(M, L)$ の内積の定義として well-defined です。$\mathbb{H}(M, L)$ の内積が完備であることが示せます。 □

H_{pre} の元 s に対し、$s_n = s$ として点列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を定めるとコーシー列になるので $\mathbb{H}(M, L)$ の元になります。これを s と同一視することで、$H_{\text{pre}} \subset \mathbb{H}(M, L)$ とみなすことができます。

$\mathbb{H}(M, L)$ にはユークリッド空間での前量子化と同じような定義ができます。まず定義域を準備します。

定義 13.4

$\Gamma(M, L)$ の元のうちコンパクトな台を持つ切断の全体の集合を $\Gamma_0(M, L)$ と書く。

定義 13.5: 前量子化

関数 $f \in C^\infty(M)$ に対応する演算子 $Q_{\text{pre}}(f) : \Gamma_0(M, L) \to \mathbb{H}(M, L)$ を

$$Q_{\text{pre}}(f) = -i\hbar\nabla_{X_f} + f$$

と定義し、f の前量子化と呼ぶ。ただし右辺の第二項は関数 f をかける演算子を表すものとする。

命題 13.6

任意の $f, g \in C^\infty(M)$ に対して

$$Q_{\text{pre}}(\{f, g\}) = \frac{i}{\hbar}[Q_{\text{pre}}(f), Q_{\text{pre}}(g)]$$

が成り立つ。

証明. 任意の切断 s に対して

$$\begin{aligned} Q_{\text{pre}}(f)Q_{\text{pre}}(g)s &= (-i\hbar\nabla_{X_f} + f)(-i\hbar\nabla_{X_g} s + gs) \\ &= (-\hbar^2\nabla_{X_f}\nabla_{X_g} - i\hbar f\nabla_{X_g} - i\hbar g\nabla_{X_f} + fg)s - i\hbar(X_f g)s \end{aligned}$$

となるので、

$$[Q_{\text{pre}}(f), Q_{\text{pre}}(g)] = -\hbar^2\nabla_{X_f}\nabla_{X_g} + \hbar^2\nabla_{X_g}\nabla_{X_f} - i\hbar X_f g + i\hbar X_g f$$

[*22] 内積の定義から導けます。

を得ます。曲率 $\omega = \hbar R^{\nabla}$ は

$$\omega(X_f, X_g) = i\hbar(\nabla_{X_f}\nabla_{X_g} - \nabla_{X_g}\nabla_{X_f} - \nabla_{[X_f,X_g]})$$

を満たすことを使うと

$$[Q_{\mathrm{pre}}(f), Q_{\mathrm{pre}}(g)] = i\hbar\omega(X_f, X_g) - \hbar^2\nabla_{[X_f,X_g]} - i\hbar X_f g + i\hbar X_g f$$

となります。さらに

$$\begin{aligned}\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = X_f g = -X_g f\\ [X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}\end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned}[Q_{\mathrm{pre}}(f), Q_{\mathrm{pre}}(g)] &= -\hbar^2\nabla_{X_{\{f,g\}}} - i\hbar\{f, g\}\\ &= -i\hbar Q_{\mathrm{pre}}(\{f, g\})\end{aligned}$$

が得られます。 □

$\Gamma_0(M, L)$ は稠密部分集合であり、演算子 $Q_{\mathrm{pre}}(f) : \Gamma_0(M, L) \to \mathbb{H}(M, L)$ は $\Gamma_0(M, L)$ 上の対称演算子であることが示せます。さらにベクトル場 X_f が完備であるなら $Q_{\mathrm{pre}}(f)$ は自己共役演算子に拡張できることが知られています。詳しくは [Hal13] や [Sch14] を参照してください。

13.2 前量子化束の存在

与えられたシンプレクティック多様体 M に対して前量子化束を構成します。まず M の良い被覆 $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ を取ったとき、ω は閉形式なのでポアンカレの補題より任意の $i \in I$ について $\alpha_i \in \Omega^1(U_i)$ が存在して U_i 上で

$$d\alpha_i = \frac{1}{2\pi\hbar}\omega$$

となります。係数は後の都合のためにつけています。$i, j \in I$ に対し $U_i \cap U_j$ 上で $\alpha_i - \alpha_j$ は

$$d(\alpha_j - \alpha_i) = \omega - \omega = 0$$

を満たすので、ポアンカレの補題より $f_{ij} \in C^{\infty}(U_i \cap U_j)$ が存在して

$$\alpha_i - \alpha_j = df_{ij}$$

を満たします。このとき必要なら定数を足すことで任意の $i, j \in I$ に対して $f_{ij} = -f_{ji}$ が成り立つようにします。$i, j, k \in I$ に対し $U_i \cap U_j \cap U_k$ 上で

$$d(f_{ij} + f_{jk} + f_{ki}) = \alpha_j - \alpha_i + \alpha_k - \alpha_j + \alpha_i - \alpha_k = 0$$

が成り立つので、複素数の定数 $c_{ijk} \in \mathbb{C}$ が存在して

$$c_{ijk} = f_{ij} + f_{jk} + f_{ki}$$

となります。

したがって、2 次元単体 (U_i, U_j, U_k) に対して c_{ijk} を対応させるのは 2–コサイクルであり、

$$[(c_{ijk})] \in \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathbb{C}) = \check{H}^n(M, \mathbb{C}) = H^n_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C})$$

が定まります。

$z_{ijk} \in \mathbb{Z}$ があって $[(z_{ijk})] = [(c_{ijk})]$ を満たすと仮定します。このとき $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$ であれば

$$z_{ijk} = c_{ijk} + x_{ij} + x_{jk} + x_{ki}$$

となるような $x_{ij} \in \mathbb{C}$ が存在するので、$g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}$ を

$$g_{ij} = \exp(2\pi i f_{ij} + 2\pi i x_{ij})$$

と定義できます。g_{ij} は

$$g_{ij} g_{jk} g_{ki} = \exp(2\pi i c_{ijk} + 2\pi i x_{ij} + 2\pi i x_{jk} + 2\pi i x_{ki}) = \exp(2\pi i z_{ijk}) = 1$$

を満たすので、変換関数になります。よって複素直線束 L が構成されます。

このとき

$$\begin{aligned} dg_{ij} &= 2\pi i g_{ij} df_{ij} \\ &= 2\pi i g_{ij}(\alpha_j - \alpha_i) \end{aligned}$$

が成り立つので、各 $i \in I$ について $A_i \in \Omega^1(U_i)$ を

$$A_i = 2\pi \alpha_i$$

と定義すれば

$$A_i = A_j + i \frac{dg_{ij}}{g_{ij}}$$

が成り立つので $(A_i)_{i \in I}$ は接続 $\nabla : L \to M$ を定めます。曲率は

$$R_i^{\nabla} = dA_i = \frac{\omega}{\hbar}$$

となります。局所接続形式 A_i はすべて実数に取ることができ、変換関数の絶対値は 1 なので、複素直線束 $L \to M$ に ∇ によって保たれるエルミート計量 h を定めることができます。

チェックコホモロジーの言葉を使ってまとめると次の命題が得られます。

命題 13.7: 積分条件

シンプレクティック多様体 (M, ω) が量子化可能である必要十分条件は、$[(2\pi\hbar)^{-1}\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$ が包含写像 $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ が誘導する準同型 $H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \mathbb{R})$ の像に入っていることである。

証明. 十分条件であることは示したので、必要条件であることを示します。シンプレクティック多様体 (M, ω) の前量子化束 (L, ∇, h) について、M の開被覆 $(U_i)_{i \in I}$ と局所自明化 $\phi_i : L|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}$ を取ると、変換関数は $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$ であるとき

$$g_{ij} g_{jk} g_{ki} = 1$$

を満たします。よって $g_ij = \exp(2\pi i f_{ij})$ を満たす $f_{ij} \in C^\infty(U_i \cap U_j, \mathbb{C})$ を取ると

$$c_{ijk} = f_{ij} + f_{jk} + f_{ki}$$

は整数になります。このとき局所接続形式は

$$\begin{aligned} A_i &= A_j + i\frac{dg_{ij}}{g_{ij}} \\ &= A_j - 2\pi df_{ij} \end{aligned}$$

を満たすので、

$$df_{ij} = \frac{1}{2\pi}A_j - \frac{1}{2\pi}A_i$$

となります。$dA_i = \omega/\hbar$ およびチェックコホモロジーとド・ラームコホモロジーの対応を踏まえれば

$$[(2\pi\hbar)^{-1}\omega] = [(2\pi)^{-1}R^\nabla] = [c_{ijk}]$$

が成り立ちます。よって $[(2\pi\hbar)^{-1}\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$ は $H^2(M, \mathbb{Z})$ の像に入ります。 □

シンプレクティック多様体が単連結であるときは、もっと簡単に条件を書くことができます。まず単連結を定義します。

定義 13.8: 単連結

弧状連結な位相空間 X の任意のループ $c : [0, 1] \to X$ が、定値写像 $c' \equiv c(0)$ とホモトピックであるとき、X は単連結であるという。

S^1 はループ $c(t) = (\cos t, \sin t)$ が 1 点にホモトピックでないので単連結ではありません。一方代数トポロジーの一般論から S^n は $n \geq 2$ のとき単連結であることが知られています。詳しくは高間さんの記事 [高間 23] を参照してください。

命題 13.9: ワイルの積分条件

シンプレクティック多様体 (M, ω) が量子化可能であるならば、M の任意の向き付けられた境界を持たないコンパクトな 2 次元部分多様体 Ω について

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_\Omega \omega \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ。さらに M が単連結であればこれは十分条件にもなる。

また、積分条件を満たすシンプレクティック多様体 (M, ω) 上の前量子化束は $\check{H}^1(M, U(1))$ によって分類されることが知られています。$U(1)$ を絶対値が 1 の複素数全体の集合を乗法によって群とみなしたものです。このことから、単連結なシンプレクティック多様体の前量子化束は存在すれば一意です。詳しくは [Sch14] や [Woo91] を参照してください。

13.3　ユークリッド空間での前量子化

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を動く粒子について前量子化を行います。相空間は $M = T^*\mathbb{R}^n$ であり、自然な座標 $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ についてシンプレクティック形式は

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$$

と書けます。

前量子化束の存在証明における構成法に従って前量子化を作ります。まず 1 つの座標近傍で M が覆えてしまっているので、変換関数についての議論は必要なく、M 上の自明束 $L = M \times \mathbb{C}$ を取ればよいです。このとき

$$A = \frac{1}{\hbar} \sum_{i=1}^{n} p_i dq^i$$

とすれば

$$dA = \frac{\omega}{\hbar}$$

が成り立つので、A によって M 上の接続 ∇ を定めます。つまり自明束 L の切断、つまり関数 $\psi \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ に対して

$$\nabla\psi = d\psi - iA\psi$$

と定義します。エルミート計量は値が 1 の定数関数が規格化された枠場になるようにすればいいので各点 $p \in M$ で

$$h_p(\psi, \phi) = \overline{\psi_p}\phi_p$$

と定めればよいです。このとき $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\nabla_X \psi = X\psi - \frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^{n} p_i (Xq^i)\psi$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} Xh(\psi, \phi) &= X(\overline{\psi}\phi) \\ &= (X\overline{\psi})\phi + \overline{\psi}(X\phi) \\ &= h(\nabla_X \psi, \phi) + h(\psi, \nabla_X \phi) \end{aligned}$$

となり、∇ は確かに h を保ちます。こうして前量子化束 (L, ∇, h) が構成できました。

二乗可積分な切断は単に

$$\|\psi\| = \sqrt{\int_M |\psi|^2 dp^1 \cdots dq_1 \cdots dp^n dq_n}$$

が有限であるような関数ということになり、内積は

$$\langle\psi,\phi\rangle = \int_M \overline{\psi}\phi dp^1\cdots dq_1\cdots dp^n dq_n$$

となります。

f のハミルトンベクトル場は

$$X_f = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)$$

となるので、f の前量子化は

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{pre}}(f) &= -i\hbar\nabla_{X_f} + f \\ &= -i\hbar\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial f}{\partial p_i} + f \end{aligned}$$

となります。q^i, p_i に対しては

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{pre}}(q^i) &= i\hbar\frac{\partial}{\partial p_i} + q^i \\ Q_{\mathrm{pre}}(p_i) &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial q^i} \end{aligned}$$

となり、ユークリッド空間における幾何学的量子化で得た式を再現します。

13.4 スピンの前量子化

余接束ではないシンプレクティック多様体として、S^2 の前量子化を行います。シンプレクティック形式は向き付け形式の定数倍

$$\omega = s\sin\theta d\theta\wedge d\phi$$

とします。積分はよく知られているように

$$\int_{S^2}\omega = 4\pi s$$

となるので、ワイルの積分条件から S^2 が量子化可能である条件は

$$s = \frac{n}{2}\hbar \qquad (n\in\mathbb{Z})$$

となります。s が $\hbar$ の半整数倍に制限されることは、実はスピンと関係しています。

(S^2,ω) の前量子化束を構成するために、複素射影空間というものと S^2 を同一視します。

定義 13.10: 複素射影空間

$\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ 上の同値関係を

$$(z_0,z_1)\sim(w_0,w_1) \;\Leftrightarrow\; z_0w_1 = z_1w_0$$

によって定義したとき、$\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C}^2\setminus\{0\}/\sim$ を複素射影空間と呼ぶ。$\mathbb{C}P^1$ は商位相によって位相空間

とする。$(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ が代表する同値類を $[z_0 : z_1]$ と書く。

命題 13.11

$\mathbb{C}P^1$ は 2 次元微分可能多様体である。

証明. $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^1$ を標準的射影とします。$U_0, U_1 \subset \mathbb{C}P^1$ を

$$\tilde{U}_0 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \mid z_0 \neq 0\}$$
$$\tilde{U}_1 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \mid z_1 \neq 0\}$$

と定義すると $\tilde{U}_0, \tilde{U}_1$ は $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ の開集合なので $U_0 = \pi(\tilde{U}_0), U_1 = \pi(\tilde{U}_1)$ は $\mathbb{C}P^1$ の開集合です。このとき任意の $[z_0 : z_1] \in U_0$ は

$$[z_0 : z_1] = \left[1 : \frac{z_1}{z_0}\right]$$

と第 1 成分が 1 である形に一意に書くことができるので、$\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C}$ を

$$\varphi_0([z_0 : z_1]) = \frac{z_1}{z_0}$$

と定めることができます。このとき任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $\varphi_0([1 : z]) = z$ であることと、$\varphi([z_0 : z_1]) = \varphi([w_0 : w_1])$ なら

$$\frac{z_1}{z_0} = \frac{w_1}{w_0}$$

より $z_1 w_0 = z_0 w_1$ となるので $[z_0 : z_1] = [w_0 : w_1]$ となることから φ_0 は全単射です。さらに

$$\tilde{U}_0 \to \mathbb{C}, \ (z_0, z_1) \mapsto \frac{z_1}{z_0}$$

は明らかに連続写像なので商位相の普遍性より φ_0 も連続です。また

$$\mathbb{C} \to \tilde{U}_0, \ z \mapsto (1, z)$$

は直積位相の普遍性から連続なので、これと π の合成である φ_0^{-1} も連続です。よって φ_0 は同相写像です。

同様に $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ を

$$\varphi_1([z_0 : z_1]) = \frac{z_0}{z_1}$$

と定義でき、同相写像になります。よって $\mathbb{C}P^1$ は 2 次元局所ユークリッドです。また $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ は第二可算なので $\mathbb{C}P^1 = U_0 \cup U_1$ も第二可算です。

$\mathbb{C}P^1$ がハウスドルフであることを示します。$p, q \in \mathbb{C}P^1$ を異なる 2 点とすると、$p, q \in U_0$ と $p, q \in U_1$ と $p = [0 : 1], q = [1, 0]$ のいずれか 1 つが成り立ちます。$p, q \in U_0$ の場合は $U_0 \cong \mathbb{R}^2$ より p, q を分離する開集合が存在します。$p, q \in U_1$ の場合も同様です。$p = [1 : 0], q = [0 : 1]$ のときは、

$$U = \varphi_0^{-1}(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\})$$
$$V = \varphi_1^{-1}(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\})$$

とすれば $p\in U, q\in V, U\cap V=\varnothing$ が成り立ちます。よって $\mathbb{C}P^1$ はハウスドルフ空間です。

したがって $\mathbb{C}P^1$ は 2 次元位相多様体であり、$(U_0,\varphi_0),(U_1,\varphi_1)$ が $(\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ によって$)\mathbb{C}P^1$ の座標近傍系になります。このとき座標変換は

$$\varphi_0\circ\varphi_1^{-1}(z)=\frac{1}{z}$$
$$\varphi_1\circ\varphi_0^{-1}(z)=\frac{1}{z}$$

となるので明らかに $U_0\cap U_1$ 上 C^∞ 級であり、$\mathbb{C}P^1$ は 2 次元微分可能多様体になります。 □

命題 13.12

$\mathbb{C}P^1$ と S^2 は微分同相である。

証明. $V_0=S^2\setminus(0,0,1), V_1=S^2\setminus(0,0,-1)$ に対して $\psi_0:V_0\to\mathbb{C},\psi_1:V_1\to\mathbb{C}$ を

$$\psi_0(x^1,x^2,x^3)=\frac{x^1+ix^2}{1-x^3}$$
$$\psi_1(x^1,x^2,x^3)=\frac{x^1-ix^2}{1+x^3}$$

によって定義します。このとき ψ_0,ψ_1 は連続であり、

$$\psi_0^{-1}(z)=\left(\frac{2\mathrm{Re}\,z}{|z|^2+1},\frac{2\mathrm{Im}\,z}{|z|^2+1},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

も連続です。同様に $\psi_1^{-1}(z)$ も連続なので ψ_0,ψ_1 は同相写像であり、$(V_0,\psi_0),(V_1,\psi_1)$ は S^2 の座標近傍系になります。座標変換は

$$\psi_0\circ\psi_1^{-1}(z)=\frac{1}{z}$$
$$\psi_1\circ\psi_0^{-1}(z)=\frac{1}{z}$$

となるので C^∞ 級であり、$(V_0,\psi_0),(V_1,\psi_1)$ は S^2 の C^∞ 級座標近傍系になります。

このとき $z\in\mathbb{C}$ に対して

$$f(\psi_0(z))=\varphi_0(z)$$
$$f(\psi_1(z))=\varphi_1(z)$$

とすることで写像 $f:S^2\to\mathbb{C}P^1$ を定義することができます。この局所座標表示は

$$\varphi_0\circ f\circ\psi_0^{-1}(z)=z$$
$$\varphi_0\circ f\circ\psi_1^{-1}(z)=\frac{1}{z}$$
$$\varphi_1\circ f\circ\psi_0^{-1}(z)=\frac{1}{z}$$
$$\varphi_1\circ f\circ\psi_1^{-1}(z)=z$$

となるのですべて C^∞ 級であり、f は微分同相写像になります。 □

実は、$\mathbb{C}P^1$ 上の直線束 L^n を変換関数 $g_{01}: U_0 \cap U_1 \to \mathbb{C}$ を

$$g_{01}^n([z_0 : z_1]) = \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^n$$

と与えることによって構成すると、これが S^2 の前量子化束になります。この詳細については、ケーラー量子化の際に述べます。

14 複素偏極

前量子化で得たヒルベルト空間は大きすぎるので、複素偏極というものを使って小さくします。

14.1 偏極

8 章で定義した実偏極の一般化を考えます。

定義 14.1: 複素偏極

(M,ω) を $2n$ 次元シンプレクティック多様体とする。n 次元の複素部分ベクトル束 $P \subset TM_{\mathbb{C}}$ が複素偏極であるとは、条件

(1) 任意の $X, Y \in \Gamma(M,P)$ に対し $[X,Y] \in \Gamma(M,P)$ である。
(2) M の各点 $p \in M$ で P_p は $TM_{\mathbb{C}}$ のラグランジュ部分空間である。
(3) $D_p = P_p \cap \overline{P_p} \cap T_pM$ の次元は $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ で一定である。

を満たすことをいう。

ただし $TM_{\mathbb{C}}$ は接束 TM の複素化、つまり各点 $p \in M$ で複素ベクトル空間

$$(T_pM)_{\mathbb{C}} = \{v + iw \mid v, w \in T_pM\}$$

を集めたものです。またシンプレクティック形式 ω は

$$\omega_p(v + iw, v' + iw') = \omega_p(v, v') - \omega_p(w, w') + i\{\omega_p(v, w') + \omega_p(w, v')\}$$

とすることで $TM_{\mathbb{C}}$ に拡張します。

複素偏極の中でもさらに特別なケーラー偏極では幾何学的量子化を比較的簡単に行うことができます。

定義 14.2: ケーラー偏極

複素偏極 P がケーラー偏極であるとは、$P \cap \overline{P} = \{0\}$ を満たすことをいう。

14.2 複素構造

ケーラー偏極についてもう少し詳しく調べます。

定義 14.3: 概複素構造

M を微分可能多様体とする。$I \in \Gamma(M, \mathrm{End}(TM))$ が $I^2 = -\mathrm{id}_{TM}$ を満たすとき、I を概複素構造という。

つまり概複素構造 I とは、各点 $p \in M$ において線形写像 $I_p : T_pM \to T_pM$ であって任意の $v \in T_pM$ に対し

$$I_p(I_p(v)) = -v$$

を満たすものです。I_p を $(T_pM)_{\mathbb{C}}$ に

$$I_p(v+iw)=I_p(v)+iI_p(w)$$

として拡張したとき、I_p の固有値を λ、対応する固有ベクトルを $v\in T_pM_{\mathbb{C}}$ とすると

$$\lambda^2v=I_p(I_pv)=-v$$

となるので $\lambda=\pm i$ です。固有値 $i,-i$ の固有空間をそれぞれ $T_p^{(1,0)}M, T_p^{(0,1)}M$ と書きます。このとき

$$T_pM_{\mathbb{C}}=T_p^{(1,0)}M\oplus T_p^{(0,1)}M$$

が成り立ちます。各点ごとに $T_p^{(1,0)}M, T_p^{(0,1)}M$ を集めたものを $T^{(1,0)}M, T^{(0,1)}M$ と書き、これらに値を取るベクトル場全体の集合をそれぞれ $\mathfrak{X}^{(1,0)}(M), \mathfrak{X}^{(0,1)}(M)$ と書きます。

概複素構造よりも強いものとして複素構造があります。

定義 14.4: 複素多様体

第二可算なハウスドルフ空間 M の開被覆 $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ と各 $\alpha\in A$ について U_α から $\mathbb{C}^n$ への開集合 V_α への同相写像 $\varphi_\alpha:U_\alpha\to V_\alpha$ が存在して、$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ であるような任意の $\alpha,\beta\in A$ に対し

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

が正則写像であるとき、M は複素多様体であるといい、$(U_\alpha;\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ を正則座標近傍系と呼ぶ。

定義 14.5: 正則関数・正則写像・双正則写像

M を複素多様体とする。関数 $f:M\to\mathbb{C}$ が正則関数であるとは、任意の M の正則座標近傍 $(U_\alpha;\varphi_\alpha)$ において $f\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha)\to\mathbb{C}$ が正則関数であることをいう。

さらに N を複素多様体とする。連続写像 $F:M\to N$ が正則写像であるとは、任意の M の正則座標近傍 $(U_\alpha;\varphi_\alpha)$ と N の正則座標近傍 $(V_\beta;\psi_\beta)$ について $F^{-1}(V_\beta)\cap U_\alpha\neq\varnothing$ ならば

$$\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1}|_{F^{-1}(V_\beta)\cap U_\alpha}:\varphi_\alpha(F^{-1}(V_\beta)\cap U_\alpha)\to\psi_\beta(V_\beta)$$

が正則写像であることをいう。

正則写像 $F:M\to N$ が全単射であり、逆写像 $F^{-1}:N\to M$ も正則写像であるとき、F は双正則写像であるという。

正則座標近傍系 $(U_\alpha;z^1,\cdots,z^n)$ について $z^i=x^i+iy^i$ としたとき、

$$\frac{\partial}{\partial z^i}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-i\frac{\partial}{\partial y^i}\right),\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}+i\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

と定義します。これらは各点 $p\in M$ において $(T_pM)_{\mathbb{C}}$ の元になります。このとき別の正則座標近傍系

$(U_\beta; z'^1, \cdots, z'^n)$ をとり $w^i = x'^i + iy'^i$ とすると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z'^i} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x'^i} - i\frac{\partial}{\partial y'^i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial y^j}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial y^j} - i\frac{\partial x^j}{\partial y'^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - i\frac{\partial y^j}{\partial y'^i}\frac{\partial}{\partial y^j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial y^j}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial y^j} + i\frac{\partial y^j}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - i\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial y^j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} + i\frac{\partial y^j}{\partial x'^i}\right)\frac{\partial}{\partial z^j} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial z^j}{\partial z'^i}\frac{\partial}{\partial z^j}
\end{aligned}$$

となります。ただし座標変換が正則であることからコーシー・リーマンの関係式

$$\frac{\partial x'^j}{\partial x^i} = \frac{\partial y'^j}{\partial y^i},\ \frac{\partial y'^j}{\partial x^i} = \frac{\partial y'^j}{\partial x^i}$$

が成り立つことを用いました。そこで局所座標に依らずに $TM_{\mathbb{C}}$ の部分複素ベクトル束を

$$P = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^n}\right\}$$

と定義することができます。同様に

$$\overline{P} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial \overline{z}^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \overline{z}^n}\right\}$$

も定義できます。

このとき $I \in \Gamma(M, \mathrm{End}(TM))$ を各点 $p \in M$ で

$$I_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p,\ I_p\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p = -\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

が成り立つように定義すると I は M 上の概複素構造になります。さらに I を $TM_{\mathbb{C}}$ に拡張すると、$P = T^{(1,0)}M, \overline{P} = T^{(0,1)}M$ が成り立ちます。このように、複素多様体には自然に概複素構造を定めることができます。

また、微分形式についても同様に

$$dz^i = dx^i + idy^i,\ d\overline{z}^i = dx^i - idy^i$$

と置くと

$$dz'^i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial z'^i}{\partial z^j}dz^j,\ d\overline{z'}^i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \overline{z'}^i}{\partial \overline{z}^j}d\overline{z}^j$$

が成り立ちます。よって複素ベクトル束を

$$\Lambda^{(p,q)}M = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{dz^{i_1} \wedge \cdots dz^{i_p} \wedge d\overline{z}^{j_1} \wedge d\overline{z}^{j_q} \mid i_1 < \cdots < i_p, j_1 < \cdots < j_q\right\}$$

と定義できます。$\Omega^{(p,q)}(M)=\Gamma(M,\Lambda^{(p,q)}M)$ と書いて、その元を (p,q) 型微分形式と呼びます。

このとき $f\in C^\infty(U)$ と $\eta=dz^{i_1}\wedge\cdots dz^{i_p}\wedge d\overline{z}^{j_1}\wedge d\overline{z}^{j_q}\in\Omega^{(p,q)}(U)$ に対して

$$d(f\eta)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial z^i}dz^i\wedge\eta+\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial\overline{z}^i}d\overline{z}^i\wedge\eta$$

が成り立つので、外微分は $d:\Omega^{(p,q)}(M)\to\Omega^{(p+1,q)}(M)\oplus\Omega^{(p,q+1)}(M)$ となります。よって $d=\partial+\overline{\partial}$ を満たすように

$$\begin{aligned}\partial&:\Omega^{(p,q)}(M)\to\Omega^{(p+1,q)}(M)\\ \overline{\partial}&:\Omega^{(p,q)}(M)\to\Omega^{(p,q+1)}(M)\end{aligned}$$

を定義できます。

定義 14.6

微分可能多様体 M の概複素構造 I が与えられたとする。M を複素多様体にできて I が自然に定まる概複素構造になるとき、I は積分可能であるという。

この定義は分布の積分可能性と類似しています。さらにフロベニウスの定理の類似も成り立ちます。

定理 14.7: ニューランダー・ニレンバーグの定理

微分可能多様体 M の概複素構造 I が積分可能であることは、任意の $X,Y\in\mathfrak{X}^{(1,0)}(M)$ に対して $[X,Y]\in\mathfrak{X}^{(1,0)}(M)$ が成り立つことと同値である。

この定理の証明は省略しますが、積分可能なら任意の $X,Y\in\mathfrak{X}^{(1,0)}(M)$ に対して $[X,Y]\in\mathfrak{X}^{(1,0)}(M)$ が成り立つことは簡単に示せます。

ケーラー偏極と概複素構造の関係は次のように述べられます。

命題 14.8

シンプレクティック多様体 (M,ω) にケーラー偏極 P が与えられているとき、M には概複素構造 I を自然に定義でき、$T^{(1,0)}M=P,T^{(0,1)}M=\overline{P}$ および任意の $p\in M$ と $v,w\in T_pM$ に対し

$$\omega_p(v,w)=\omega_p(I_pv,I_pw)$$

が成り立つ。さらに I は積分可能である。

証明. $P\cap\overline{P}=\{0\}$ より $TM_{\mathbb{C}}=P\oplus\overline{P}$ となるので、射影 $\pi:TM_{\mathbb{C}}\to P,\overline{\pi}:TM_{\mathbb{C}}\to\overline{P}$ を定義することができます。このとき各点 $p\in M$ で $I_p:T_pM\to T_pM$ を

$$I_pv=i\pi(v)-i\overline{\pi}(v)$$

と定義できます。右辺は $\pi(v)$ の虚部なので確かに実になります。ここで

$$\begin{aligned}I_p(I_pv)&=-\pi(\pi(v))+\overline{\pi}(\pi(v))+\pi(\overline{\pi}(v))-\overline{\pi}(\overline{\pi}(v))\\&=-\pi(v)-\overline{\pi}(v)\\&=-v\end{aligned}$$

となるので I は概複素構造です。I_p を $T_pM_{\mathbb{C}}$ に拡張すると定義から明らかに $T^{(1,0)}M = P, T^{(0,1)}M = \overline{P}$ となります。

また任意の $p \in M$ と $v, w \in T_pM$ に対し

$$
\begin{aligned}
\omega_p(I_pv, I_pw) &= -\omega(\pi(v) - \overline{\pi}(v), \pi(w) - \overline{\pi}(w)) \\
&= -\omega_p(\pi(v), \pi(w)) - \omega_p(\overline{\pi}(v), \overline{\pi}(w)) + \omega_p(\pi(v), \overline{\pi}(w)) + \omega_p(\overline{\pi}(v), \pi(w)) \\
&= \omega_p(\pi(v), \overline{\pi}(w)) + \omega_p(\overline{\pi}(v), \pi(w))
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
\omega_p(v, w) &= \omega_p(\pi(v) + \overline{\pi}(v), \pi(w) + \overline{\pi}(w)) \\
&= \omega_p(\pi(v), \pi(w)) + \omega_p(\overline{\pi}(v), \overline{\pi}(w)) + \omega_p(\pi(v), \overline{\pi}(w)) + \omega_p(\overline{\pi}(v), \pi(w)) \\
&= \omega_p(\pi(v), \overline{\pi}(w)) + \omega_p(\overline{\pi}(v), \pi(w))
\end{aligned}
$$

となるので $\omega_p(v, w) = \omega_p(I_pv, I_pw)$ です。ただし $P, \overline{P}$ がラグランジュ部分空間であることを用いました。

最後に P は偏極の定義とニューランダー・ニレンバーグの定理より積分可能です。 □

14.3 正則直線束

座標変換が正則であるような複素多様体を導入したので、直線束についても同様の概念を導入します。

定義 14.9: 正則ベクトル束

E, M を複素多様体とする。正則写像 $\pi : E \to M$ が次の条件を満たすとする。

(1) 任意の $p \in M$ に対し、$\pi^{-1}(p)$ は $\mathbb{C}$ 上の r 次元ベクトル空間である。
(2) 任意の $p \in M$ に対して p を含む M の開集合 U と、正則局所自明化と呼ばれる双正則写像 $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$ が存在して次の条件を満たす。
  (a) $p_1 : U \times \mathbb{C}^r \to U$ を射影とすると、$p_1 \circ \phi = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$ が成り立つ。
  (b) $p_2 : U \times \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^r$ を射影とすると、各 $q \in U$ に対し $p_2 \circ \phi|_{\pi^{-1}(q)} : \pi^{-1}(q) \to \mathbb{C}^r$ はベクトル空間としての同型写像である。

このとき π は r 次元正則ベクトル束であるという。

これまで出てきた中では $T^{(1,0)}M, \Lambda^{(p,0)}M$ が正則ベクトル束です。正則ベクトル束はベクトル束になるので、切断などの概念は同様に定義されます。

定義 14.10: 正則切断

正則ベクトル束 $\pi : E \to M$ の切断 $s \in \Gamma(M, E)$ は、M から E への正則写像であるとき正則切断であるという。正則切断全体の集合を $\Gamma_{\mathrm{hol}}(M, E)$ と書く。

ここからは正則直線束 $\pi : L \to M$ について議論します。正則局所自明化が双正則写像なので、$U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ のとき変換関数 $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}$ は正則関数になります。そこで $\overline{\partial} g_{\alpha\beta} = 0$ なので切断 $s \in \Gamma(M, L)$ を正則局所自明化が定める枠場 $e_\alpha \in \Gamma(M, L)$ と $s_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, \mathbb{C})$ を用いて $s = s_\alpha e_\alpha$ と表せば

$$
g_{\alpha\beta}\overline{\partial}s_\beta = \overline{\partial}(g_{\alpha\beta}s_\beta) = \overline{\partial}s_\alpha
$$

が成り立ちます。これは正則局所自明化に依らずに $\overline{\partial}^L : \Omega^0(L) \to \Omega^{(0,1)}(L)$ が定まることを意味しています。これをドルボー作用素と呼びます。

$\Omega^1(L) = \Omega^{(1,0)}(L) \oplus \Omega^{(0,1)}(L)$ が成り立つので、接続 $\nabla : \Omega^0(L) \to \Omega^1(L)$ について、$\nabla = \nabla^{(1,0)} + \nabla^{(0,1)}$ を満たすように

$$\nabla^{(1,0)} : \Omega^0(L) \to \Omega^{(1,0)}(L)$$
$$\nabla^{(0,1)} : \Omega^0(L) \to \Omega^{(0,1)}(L)$$

を定義できます。このとき次が成り立ちます。

定理 14.11

$\pi : L \to M$ を複素多様体 M 上の正則直線束とし、h を L 上のエルミート計量とする。接続 $\nabla : \Omega^0(L) \to \Omega^1(L)$ であって、次の性質を満たすものが一意に存在する。

(1) ∇ は h を保つ。
(2) $\nabla^{(0,1)} = \overline{\partial}^L$ が成り立つ。

このとき ∇ を (L, h) の標準接続と呼ぶ。

この定理は使わないので証明は省略しますが、[今野 13] に載っています。

15　幾何学的量子化

定義 15.1

シンプレクティック多様体 (M,ω) の複素偏極 P に対し、前量子化束 (L,∇,h) の切断 $s\in\Gamma(M,L)$ が偏極しているとは任意の $X\in\Gamma(M,\overline{P})$ に対して

$$\nabla_X s=0$$

が成り立つことを言う。

偏極している切断だけを考えることでヒルベルト空間を小さくすることができます。ここで偏極している切断 s に関数 $f\in C^\infty(M)$ をかけた $Q_{\mathrm{pre}}(f)s$ は一般には偏極していないことが問題になります。実際、$X\in\Gamma(M,\overline{P})$ に対し

$$\begin{aligned}
\nabla_X(Q_{\mathrm{pre}}(f)s)&=\nabla_X(fs-i\hbar\nabla_{X_f}s)\\
&=(Xf)s-i\hbar\nabla_X\nabla_{X_f}s\\
&=(Xf)s-(\hbar R^{\nabla}(X,X_f)+i\hbar\nabla_{X_f}\nabla_X+i\hbar\nabla_{[X,X_f]})s\\
&=(Xf)s-\omega(X,X_f)s-i\hbar\nabla_{[X,X_f]}s\\
&=-i\hbar\nabla_{[X,X_f]}s
\end{aligned}$$

となります。これは $[X,X_f]\in\Gamma(M,\overline{P})$ になっていれば 0 になるので次のように定義します。

定義 15.2

シンプレクティック多様体 (M,ω) の複素偏極 P について、関数 $f\in C^\infty(M)$ が任意の $X\in\Gamma(M,\overline{P})$ に対し $[X,X_f]\in\Gamma(M,\overline{P})$ を満たすとき f は直接量子化可能であるという。直接量子化可能な関数全体の集合を $\mathfrak{R}_P(M)$ と書く。

直接量子化可能な関数 f について $Q_{\mathrm{pre}}(f)$ は偏極している切断を偏極している切断に移します。

複素偏極がケーラー偏極である場合は特に簡単に量子化できます。ケーラー偏極 P は命題 14.8 より M の正則座標近傍 $(U;z^1,\cdots,z^n)$ によって

$$P=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial z^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial z^n}\right\}$$

と表せます。このとき前量子化束 (L,∇,h) について、これと両立する複素構造を L に一意に定めることができるので、P について偏極している切断は正則切断になります。そこで前ヒルベルト空間を

$$H_P=\left\{s\in\Gamma_{\mathrm{hol}}(M,L)\;\middle|\;\int_M\langle s,s\rangle\,\omega^n<\infty\right\}$$

と定義できます。H_P を完備化すればヒルベルト空間を得ることができますが、実はすでに H_P はヒルベルト空間になっていることが知られています。

15.1　調和振動子の幾何学的量子化

　調和振動子のハミルトニアン

$$H = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{2m} p_i^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^{i2})$$

を量子化します。係数がわずらわしいので、

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{1}{\sqrt{m\omega_0}} p_i \\ Q^i &= \sqrt{m\omega_0} q^i \end{aligned}$$

として

$$H = \frac{\omega_0}{2} \sum_{i=1}^{n} (P_i^2 + Q^{i2}) = \frac{\omega_0}{2} \sum_{i=1}^{n} |z^i|^2$$

を量子化します。このとき正則座標近傍を

$$z^i = P_i + iQ^i$$

とします。シンプレクティック形式は

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=1}^{n} dP_i \wedge dQ^i \\ &= \frac{i}{2} \sum_{i=1}^{n} dz^i \wedge d\overline{z}^i \end{aligned}$$

と書けます。ハミルトンベクトル場は

$$\begin{aligned} X_H &= -\omega^\sharp(dH) \\ &= -2i \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial z^i} \frac{\partial}{\partial \overline{z}^i} - \frac{\partial H}{\partial \overline{z}^i} \frac{\partial}{\partial z^i} \right) \\ &= i\omega_0 \sum_{i=1}^{n} \left(z^i \frac{\partial}{\partial z^i} - \overline{z}^i \frac{\partial}{\partial \overline{z}^i} \right) \\ X_{z^i} &= -2i \frac{\partial}{\partial \overline{z}^i} \\ X_{\overline{z}^i} &= 2i \frac{\partial}{\partial z^i} \end{aligned}$$

となるので $H, z^i, \overline{z}^i$ は直接量子化可能です。

　シンプレクティックポテンシャルは

$$\theta = -\frac{i}{2} \sum_{i=1}^{n} \overline{z}^i dz^i$$

とすることができ、接続は自明束の切断、つまり $\psi \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ に対して

$$\begin{aligned}
\nabla_X \psi &= (d\psi)(X) - i\frac{\theta(X)}{\hbar} \\
&= X\psi - \frac{1}{2\hbar}\sum_{i=1}^{n} \overline{z}^i (Xz^i)\psi
\end{aligned}$$

と定義できます。そこでケーラー偏極

$$P = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^n}\right\}$$

について偏極している切断は、正則関数 $\psi \in C^\infty(M, \mathbb{C})$、つまり $z^1, \cdots, z^n$ の級数になります。

$H, z^i, \overline{z}^i$ の量子化は

$$\begin{aligned}
Q(H) &= H - i\hbar\nabla_{X_H} \\
&= \frac{\omega_0}{2}\sum_{i=1}^{n}|z^i|^2 + \hbar\omega_0\sum_{i=1}^{n} z^i\frac{\partial}{\partial z^i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|z^i|^2 \\
&= \hbar\omega_0\sum_{i=1}^{n} z^i\frac{\partial}{\partial z^i} \\
Q(z^i) &= z^i \\
Q(\overline{z}^i) &= 2\hbar\frac{\partial}{\partial z^i}
\end{aligned}$$

となります。よって

$$[Q(z^i), Q(\overline{z}^j)] = -2\hbar\delta^{ij}$$

であり、$z^i = P_i + iQ^i$ と正準交換関係 $[Q^i, P_j] = i\hbar\delta^i_j$ に合致しています。

さらに、ハミルトニアンの量子化 $Q(H)$ の固有関数は明らかに $z^1, \cdots, z^n$ の同次多項式であり、m 次の同次多項式 f に対して

$$Q(H)f = m\hbar\omega_0 f$$

が成り立ちます。これは定数 $\dfrac{\hbar}{2}$ だけずれていることを除けば正しいハミルトニアンのスペクトルを与えています。このずれはメタプレクティック補正というものを行うことで修正できますが、この記事では扱いません。

15.2 スピンの幾何学的量子化

$S^2 \cong \mathbb{C}P^1$ が微分可能多様体であることの証明から明らかなように、S^2 は 1 次元複素多様体にもなります。具体的には、

$$\begin{aligned}
\varphi_0([z_0 : z_1]) &= \frac{z_1}{z_0} \\
\varphi_1([z_0 : z_1]) &= \frac{z_0}{z_1}
\end{aligned}$$

が正則座標近傍を与えます。それぞれの座標を z_+, z_- と書くことにします。このとき

$$z_+ = \frac{x^1 + ix^2}{1 - x^3} = \cot\frac{\theta}{2}e^{i\phi}$$

から微分形式が

$$
\begin{aligned}
dz_+ &= -\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}e^{i\phi}d\theta + i\cot\frac{\theta}{2}e^{i\phi}d\phi \\
d\overline{z_+} &= -\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}e^{-i\phi}d\theta - i\cot\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}d\phi
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
dz_+ \wedge d\overline{z_+} = i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}d\theta\wedge d\phi
$$

となります。よって

$$
1+|z_+|^2 = 1+\cot^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}
$$

と合わせて U_+ 上でシンプレクティック形式を

$$
\omega = in\hbar\frac{dz_+\wedge d\overline{z_+}}{(1+|z_+|^2)^2}
$$

と書くことができます[*23]。z_- についても同様に計算すると、

$$
\omega = in\hbar\frac{dz_-\wedge d\overline{z_-}}{(1+|z_-|^2)^2}
$$

となります。

このときシンプレクティックポテンシャルを

$$
\theta_\pm = -in\hbar\frac{\overline{z_\pm}dz_\pm}{1+|z_\pm|^2}
$$

とすることができます。θ_+, θ_- の差は

$$
\begin{aligned}
\theta_+ - \theta_- &= -in\hbar\frac{\overline{z}_+dz_+}{1+|z_+|^2} + in\hbar\frac{\overline{z_-}dz_-}{1+|z_-|^2} \\
&= -in\hbar\frac{\overline{z_+}dz_+}{1+|z_+|^2} - in\hbar\frac{|z_+|^2}{1+|z_+|^2}\frac{1}{\overline{z_+}}\cdot\frac{dz_+}{z_+^2} \\
&= -in\hbar\frac{dz_+}{z_+}
\end{aligned}
$$

となります。このとき局所接続形式を

$$
A_\pm = \frac{\theta_\pm}{\hbar} = -in\frac{\overline{z_\pm}dz_\pm}{1+|z_\pm|^2}
$$

とするためには、変換関数 $g_\pm$ について

$$
A_- = A_+ + i\frac{dg_{+-}}{g_{+-}} = A_+ + \frac{indz_+}{z_+}
$$

[*23] 都合により S^2 の体積形式とは符号が逆になっています。

が成り立つ必要があります。つまり

$$dg_{+-} = n\frac{g_{+-}}{z_+}dz_+ = -n\frac{g_{+-}}{z_-}dz_-$$

が成り立てばよいので、変換関数を

$$g_{+-} = z_+^n = \frac{1}{z_-^n}$$

とすることで複素直線束 L^n を作ればよいです。変換関数を正則に取ることができているので、L^n は正則直線束になります。$n=-1$ のとき、L^{-1} は自然直線束と呼ばれます。

e_+, e_- をそれぞれ z_+, z_- が定める正則枠場とします。変換関数の定義から

$$e_- = z_+^n e_+$$

が成り立ちます。このときエルミート計量 h を

$$h(e_+, e_+) = (1+|z_+|^2)^{-n}$$

とすることで定義します。規格化された枠場は

$$e'_+ = (1+|z_+|^2)^{n/2}e_+$$

となり、e'_+ が定める局所自明化に対する局所接続形式は

$$\begin{aligned}
A'_+ &= A_+ + i\frac{d(1+|z_+|^2)^{n/2}}{(1+|z_+|^2)^{n/2}} \\
&= A_+ + i\frac{n}{2}\cdot\frac{z_+d\overline{z_+}+\overline{z_+}dz_+}{1+|z_+|^2} \\
&= A_+ + in\frac{|z_+|^2}{2(1+|z_+|^2)}\left(\frac{d\overline{z_+}}{\overline{z_+}}+\frac{dz_+}{z_+}\right)
\end{aligned}$$

となります。$z_+ = Re^{i\Theta}$ と置くと $dz_+ = e^{i\Theta}dR + iRe^{i\theta}d\Theta$ より

$$\begin{aligned}
A_+ &= -in\frac{RdR+iR^2d\Theta}{1+R^2} \\
in\frac{|z_+|^2}{2(1+|z_+|^2)}\left(\frac{d\overline{z_+}}{\overline{z_+}}+\frac{dz_+}{z_+}\right) &= in\frac{R^2}{1+R^2}\frac{dR}{R}
\end{aligned}$$

となるので、

$$A'_+ = n\frac{R^2}{1+R^2}d\Theta$$

は実数です。そこでエルミート計量 h は接続と両立します。よって、前量子化束 (L^n, ∇, h) を作ることができました。

定義をここでまとめておきます。

定義 15.3

$S^2 \cong \mathbb{C}P^1$ の正則座標近傍 $(U_+, z_+), (U_-, z_-)$ に対して、変換関数 $g_{+-} : U_+ \cap U_- \to \mathbb{C}$ を

$$g_{+-} = z_+^n$$

と取ることで正則直線束 L^n を定める。局所接続形式を

$$A_\pm = -in\frac{\overline{z_\pm} dz_\pm}{1 + |z_\pm|^2}$$

とすることで L^n に接続を定め、$(U_\pm, z_\pm)$ が定める正則枠場をそれぞれ $e_\pm$ としたとき、L^n のエルミート計量を

$$h(e_\pm, e_\pm) = (1 + |z_\pm|^2)^{-n}$$

とすることで定義する。

このとき切断 $s \in \Gamma(S^2, L^n)$ の成分 $s = s_+ e_+ = s_- e_-$ とすると、$s_+(z_+), s_-(z_-)$ が正則であることは s が正則切断であることと同値です。s_+ が正則ならテイラー展開して

$$s_+(z_+) = c_0 + c_1 z_+ + c_2 z_+^2 + \cdots$$

と表すことができます。このとき $e_- = z_+^n e_+$ より $s_- = z_-^n s_+$ なので

$$s_-(z_-) = c_0 z_-^n + c_1 z_-^{n-1} + \cdots + c_n + \cdots$$

となります。よって、$s_+(z_+), s_-(z_-)$ が両方正則であるのは、

$$s_+(z_+) = c_0 + c_1 z_+ + c_2 z_+^2 + \cdots + c_n z_+^n$$

と表せることと同値です。よってヒルベルト空間の次元は $n+1$ であり、有限次元です。

$0 \leq j, k \leq n$ について

$$\begin{aligned}
\langle z_+^j e_+, z_+^k e_+ \rangle &= in\hbar \int_{S^2} \frac{dz_+ \wedge d\overline{z_+}}{(1 + |z_+|^2)^{n+2}} \overline{z_+}^j z_+^k \\
&= in\hbar \int_{S^2} \frac{2iRdR \wedge d\Theta}{(1 + R^2)^{n+2}} R^{j+k} e^{i(k-j)\Theta} \\
&= 2n\hbar \left(\int_0^\infty R^{j+k+1}(1 + R^2)^{-n-2} dR \right) \left(\int_0^{2\pi} e^{i(k-j)\Theta} d\Theta \right) \\
&= 4\pi n\hbar \delta_{jk} \int_0^\infty R^{2j+1}(1 + R^2)^{n-2} dR
\end{aligned}$$

となります。このとき $t = R^2$ と置換すると

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty R^{2j+1}(1 + R^2)^{-n-2} dR &= \int_0^\infty t^{j+1/2}(1 + t)^{-n-2} \frac{dt}{2t^{1/2}} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty t^j (1 + t)^{-n-2} dt \\
&= \frac{1}{2} B(j + 1, n - j + 1) \\
&= \frac{j!(n - j)!}{2(n + 1)!}
\end{aligned}$$

となります。ただしベータ関数に関する公式

$$B(x,y)=\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt, \qquad (x>0,y>0)$$

を用いました。したがって、

$$\psi_i=\sqrt{\frac{2(n+1)!}{j!(n-j)!}}c_i$$

と置くと内積を

$$\langle s,s'\rangle=\sum_{i=0}^n \overline{\psi_i}\psi_i'$$

と書くことができます。こうして $n+1$ 次元のヒルベルト空間 H_P を得ることができました。

z_+ から x^1,x^2,x^3 を求めると

$$x^1=\frac{z_++\overline{z_+}}{1+|z_+|^2},\ x^2=-i\frac{z_+-\overline{z_+}}{1+|z_+|^2},\ x^3=\frac{|z_+|^2-1}{|z_+|^2+1}$$

となります。このときハミルトンベクトル場は

$$X_f=-\omega^\sharp(df)=-i\frac{(1+|z_+|^2)^2}{n\hbar}\left(\frac{\partial f}{\partial z_+}\frac{\partial}{\partial\overline{z_+}}-\frac{\partial f}{\partial\overline{z_+}}\frac{\partial}{\partial z_+}\right)$$

となります。よって

$$\begin{aligned}
X_{x^1}&=\frac{i}{n\hbar}\left((1-z_+^2)\frac{\partial}{\partial z_+}-(1-\overline{z_+}^2)\frac{\partial}{\partial\overline{z_+}}\right)\\
X_{x^2}&=-\frac{1}{n\hbar}\left((1+z_+^2)\frac{\partial}{\partial z_+}-(1+\overline{z_+}^2)\frac{\partial}{\partial\overline{z_+}}\right)\\
X_{x^3}&=\frac{2i}{n\hbar}\left(z_+\frac{\partial}{\partial z_+}-\overline{z_+}\frac{\partial}{\partial\overline{z_+}}\right)
\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
Q(x^1)&=z_++\frac{1-z_+^2}{n}\frac{\partial}{\partial z_+}\\
Q(x^2)&=-iz_++i\frac{1+z_+^2}{n}\frac{\partial}{\partial z_+}\\
Q(x^3)&=\frac{2}{n}z_+\frac{\partial}{\partial z_+}-1
\end{aligned}$$

となります。このとき

$$\begin{aligned}
J_1&=\frac{n\hbar}{2}Q(x^1)\\
J_2&=-\frac{n\hbar}{2}Q(x^2)\\
J_3&=-\frac{n\hbar}{2}Q(x^3)
\end{aligned}$$

と置けば

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \frac{n\hbar}{2}z_+ + \hbar\frac{1-z_+^2}{2}\frac{\partial}{\partial z_+} \\
J_2 &= \frac{in\hbar}{2}z_+ - i\hbar\frac{1+z_+^2}{2}\frac{\partial}{\partial z_+} \\
J_3 &= -\hbar z_+\frac{\partial}{\partial z_+} + \frac{n\hbar}{2}
\end{aligned}
$$

となります。交換関係を計算すると

$$
\begin{aligned}
[J_1, J_2] &= i\hbar J_3 \\
[J_2, J_3] &= i\hbar J_1 \\
[J_3, J_1] &= i\hbar J_2
\end{aligned}
$$

となるので、これは角運動量を表しています。この交換関係が角運動量を表していることについては標準的な量子力学の教科書か、小原さんの記事 [小原 23] にも載っています。

例えば $n = 1$ の場合、状態は (ψ_0, ψ_1) によって表され、切断は

$$
s_+ = \frac{\psi_0}{2} + \frac{\psi_1}{2}z_+
$$

となります。J_1, J_2, J_3 の作用は

$$
\begin{aligned}
J_1 s_+ &= \frac{\hbar}{4}\psi_1 + \frac{\hbar}{4}\psi_0 z_+ \\
J_2 s_+ &= -\frac{i\hbar}{4}\psi_1 + \frac{i\hbar}{4}\psi_0 z_+ \\
J_3 s_+ &= \frac{\hbar}{4}\psi_0 - \frac{\hbar}{4}\psi_1 z_+
\end{aligned}
$$

であり、行列表示すれば

$$
J_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

となります。これはパウリ行列に $\hbar/2$ をかけたものであり、確かにスピン 1/2 の表現が現れています。

こうして、S^2 を幾何学的量子化することによって、角運動量の表現を得ることができました。

参考文献

[APW91] Scott Axelrod, Steve Della Pietra, and Edward Witten. Geometric quantization of Chern-Simons gauge theory. *Journal of Differential Geometry*, Vol. 33, No. 3, pp. 787 – 902, 1991.

[BT82] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1982.

[Hal13] Brian C. Hall. *Quantum Theory for Mathematicians*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2013.

[Lee12] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, second edition, 2012.

[Sch14] Martin Schottenloher. Lecture notes on geometric quantization, 2014. https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~schotten/GEQ/GEQ.pdf.

[Woo91] N. M. J. Woodhouse. *Geometric Quantization*. Oxford University Press, second edition, 1991.

[今野 13] 今野宏一. 微分幾何学. 大学数学の世界. 東京大学出版会, 2013.

[小原 23] 小原充貴. クリフォード代数とスピン幾何の導入, 2023. https://event.phys.s.u-tokyo.ac.jp/physlab2023/groups/mathematical-physics/.

[高間 23] 高間俊至. 代数トポロジー ノート, 2023. https://event.phys.s.u-tokyo.ac.jp/physlab2023/groups/mathematical-physics/.