

# アハラノフ・ボーム効果

文責：Physics Lab.2023 量子班 長谷部倫太

2023年5月6日

## 1 磁場がない領域で磁場の影響を受ける！？

高校物理を一通り学習し終えた方であれば、「電子は粒子性と波動性をもつ」という話は聞いたことがあるでしょう。電子が波動性を持つと聞いてピンとこない方もいると思います。実は、図1のような装置で実験すると、電子はスクリーンに図2のように、 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$ の時間順で干渉縞をつくります。「ヤングの実験」は光をスリットに通しましたが、電子でも同じような現象が起こるのです。

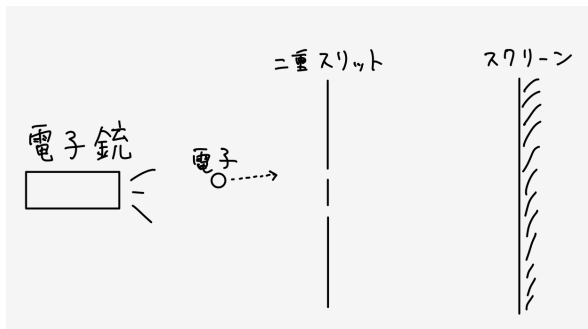


図1 干渉実験の模式図

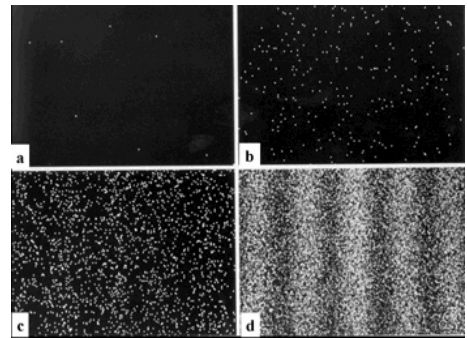


図2 干渉縞の様子 ([3] より)

それでは、図3のような実験装置を考えましょう。外部に磁場を漏らさない障壁に囲まれたソレノイドが、紙面に対し垂直に ( $z$  軸方向に) 置かれています。このとき、

$$\mathbf{B} = \begin{cases} (0, 0, B_z) & : \text{ソレノイドの内部} \\ (0, 0, 0) & : \text{ソレノイドの外部} \end{cases} \quad (1)$$

となります。電子は磁場に触れることなくスクリーンに到達するのです。

ここでの疑問は、「ソレノイドの磁場の強さを変えると、干渉縞の様子は変化するのか？」ということです。高校物理で学習した範囲で考えると (古典論で考えると)、電子は磁場ゼロ

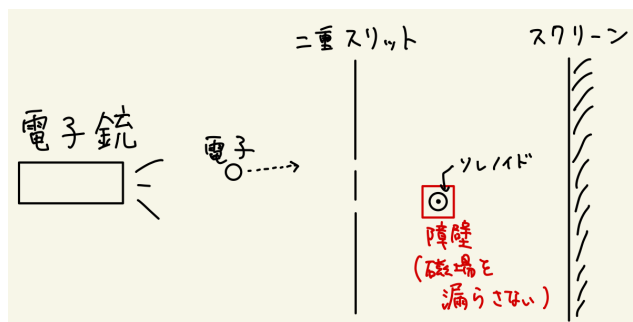


図3 ソレノイドを置いた干渉実験

の領域しか通っていませんので、磁場から力を受けることはありません。よって、干渉縞が変化することはないと予想がつきます。しかし、**実際は磁場の強さにより干渉縞は変化します**。磁場のある領域を通過していないのに、磁場の影響を受けているのです！実際に行われた実験については、外村先生の記事 [1] を参照してみてください。

## 2 二重スリット実験の考察

図3の実験で、磁場の強さにより干渉縞が変化する理由を考察していきましょう。ここからは、電磁気学の講義等でマクスウェル方程式の学習をしたことがある方を想定します。

図4のように経路をとって考えましょう。経路  $\Gamma_1$  を通る電子の波動関数を  $\psi^I(t, \mathbf{x})$  とします。高校物理では「波の式」を学習すると思いますが、波動関数はそれに対応するものです。

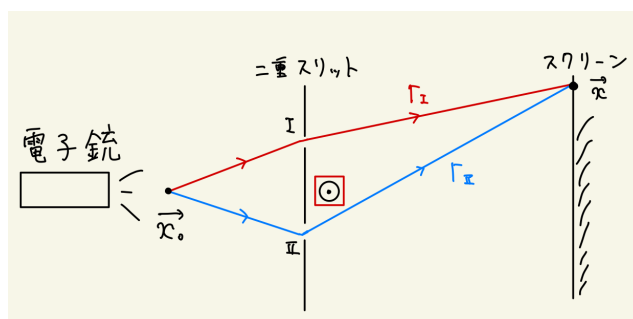


図4

まずは、マクスウェル方程式を思い出してください。  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  という式があります。ここで、任意のベクトル  $\mathbf{A}'$  に対して、  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}') = 0$  が成立することから、  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  なる  $\mathbf{A}$  が存在します。この  $\mathbf{A}$  をベクトルポテンシャルと呼びますが、アハラノフ・ボーム効果においてはこのベクトルポテンシャルが重要な役割を果たすのです。

もう少しベクトルポテンシャルの考察をしましょう。経路  $\Gamma_1$  上においては、 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  ですから、 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$  が成立します。ここで、任意のスカラー関数  $\varphi$  に対して  $\nabla \times (\nabla\varphi) = \mathbf{0}$  が成立することを思い出せば、

$$\mathbf{A} = \nabla\varphi_I(\mathbf{x}) \quad (2)$$

と表せることがわかります。電子銃から電子が発射される位置を  $\mathbf{x}_0$  とし、スクリーン上の点を  $\mathbf{x}$  とします。  $\varphi_I(\mathbf{x}_0) = 0$  としたとき、 $\mathbf{A}$  を経路  $\Gamma_1$  に沿って線積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}') &= \int_{\Gamma_1} d\mathbf{x}' \cdot \nabla' \varphi_I(\mathbf{x}') = \int_{\Gamma_1} \left( \frac{\partial \varphi_I}{\partial x'} dx' + \frac{\partial \varphi_I}{\partial y'} dy' + \frac{\partial \varphi_I}{\partial z'} dz' \right) \\ &= \int_{\Gamma_1} d\varphi_I = \varphi_I(\mathbf{x}) - \varphi_I(\mathbf{x}_0) = \varphi_I(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3)$$

となります。今の議論を逆に辿ればわかりますが、 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  に対しても、 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  になり得ることに注意してください。

以上で考えたベクトルポテンシャルのみがあるとき、電子のシュレディンガー方程式は以下のように表されます。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^I(t, \mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \nabla - i \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \right)^2 \psi^I(t, \mathbf{x}) \quad (4)$$

$e$  は電荷、 $\hbar$  はプランク定数を  $2\pi$  で割った値、 $c$  は光速です。「シュレディンガー方程式とは何ぞや？」という方は、運動方程式の量子力学版だと思っていてください。古典力学ではニュートンの運動方程式、電磁気学ではマクスウェル方程式が基礎方程式となるように、量子力学ではシュレディンガー方程式が基礎方程式となります。

ここで、

$$\psi^I(t, \mathbf{x}) = \exp\left(i \frac{e}{\hbar c} \varphi_I(\mathbf{x})\right) \psi_0^I(t, \mathbf{x}) \quad (5)$$

と書いてみます。このようにすることの意味は後ほど記します。これを (4) に代入すると、まず左辺は、

$$\exp\left(i \frac{e}{\hbar c} \varphi_I(\mathbf{x})\right) i\hbar \frac{\partial \psi_0^I(t, \mathbf{x})}{\partial t} \quad (6)$$

と直ちにわかります。一方、右辺は頑張って計算する必要がありそうです。(2) などを利用しながら計算します。まず、

$$\begin{aligned} &\nabla \left( \exp\left(i \frac{e}{\hbar c} \varphi_I(\mathbf{x})\right) \psi_0^I(t, \mathbf{x}) \right) \\ &= i \frac{e}{\hbar c} \nabla \varphi_I(\mathbf{x}) \left( \exp\left(i \frac{e}{\hbar c} \varphi_I(\mathbf{x})\right) \psi_0^I(t, \mathbf{x}) \right) + \exp\left(i \frac{e}{\hbar c} \varphi_I(\mathbf{x})\right) \nabla \psi_0^I(t, \mathbf{x}) \\ &= \exp\left(i \frac{e}{\hbar c} \varphi_I(\mathbf{x})\right) \left( i \frac{e}{\hbar c} \psi_0^I(t, \mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla \psi_0^I(t, \mathbf{x}) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

ですから,

$$\begin{aligned}
& \left( \nabla - i \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \right) \psi^I(t, \mathbf{x}) \\
&= \exp \left( i \frac{e}{\hbar c} \varphi_I(\mathbf{x}) \right) \left( i \frac{e}{\hbar c} \psi_0^I(t, \mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla \psi_0^I(t, \mathbf{x}) - i \frac{e}{\hbar c} \psi_0^I(t, \mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}) \right) \quad (8) \\
&= \exp \left( i \frac{e}{\hbar c} \varphi_I(\mathbf{x}) \right) \nabla \psi_0^I(t, \mathbf{x})
\end{aligned}$$

となります. もう一度  $(\nabla - i \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{x}))$  を左からかけて,

$$\begin{aligned}
& \left( \nabla - i \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \right)^2 \psi^I(t, \mathbf{x}) \\
&= \left( \nabla - i \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \right) \cdot \left( \exp \left( i \frac{e}{\hbar c} \varphi_I(\mathbf{x}) \right) \nabla \psi_0^I(t, \mathbf{x}) \right) \\
&= \nabla \cdot \left( \exp \left( i \frac{e}{\hbar c} \varphi_I(\mathbf{x}) \right) \nabla \psi_0^I(t, \mathbf{x}) \right) - \exp \left( i \frac{e}{\hbar c} \varphi_I(\mathbf{x}) \right) i \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi_0^I(t, \mathbf{x}) \\
&= \exp \left( i \frac{e}{\hbar c} \varphi_I(\mathbf{x}) \right) \left( i \frac{e}{\hbar c} \nabla \varphi_I(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi_0^I(t, \mathbf{x}) + \nabla^2 \psi_0^I(t, \mathbf{x}) \right) - \exp \left( i \frac{e}{\hbar c} \varphi_I(\mathbf{x}) \right) i \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi_0^I(t, \mathbf{x}) \\
&= \exp \left( i \frac{e}{\hbar c} \varphi_I(\mathbf{x}) \right) \nabla^2 \psi_0^I(t, \mathbf{x}) \quad (9)
\end{aligned}$$

となり, 右辺も簡単な形になりました. 以上から, (4) は,

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0^I(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \nabla^2 \psi_0^I(t, \mathbf{x}) \quad (10)$$

となることがわかりました. この形を見てわかる方もいらっしゃると思います, これは自由粒子のシュレディンガー方程式です. ポテンシャルがないとき, 粒子はこの方程式に従うのです. つまり,  $\psi_0^I(t, \mathbf{x})$  は, ソレノイドがなく, ベクトルポテンシャルがゼロのときの電子の波動関数といえます.

経路  $\Gamma_{II}$  も同様に考えます.

$$\psi_{II}(t, \mathbf{x}) = \exp \left( i \frac{e}{\hbar c} \varphi_{II}(\mathbf{x}) \right) \psi_0^{II}(t, \mathbf{x}) \quad (11)$$

$$\varphi_{II}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_{II}} d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (12)$$

とおくことができ,  $\psi_0^{II}(t, \mathbf{x})$  は自由粒子のシュレディンガー方程式を満たします.

スクリーン上の点  $\mathbf{x}$  に到達した電子の波動関数を,  $\psi(t, \mathbf{x})$  と表すことにしましょう. 重ね合わせの原理により,

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \psi_I(t, \mathbf{x}) + \psi_{II}(t, \mathbf{x}) \quad (13)$$

が成り立ちます。一方で、ストークスの定理を用いると、

$$\begin{aligned}\varphi_{II}(\mathbf{x}) - \varphi_I(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_{II}} d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_I} d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \oint_{\Gamma_{II}-\Gamma_I} d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) \\ &= \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} := \Phi\end{aligned}\quad (14)$$

となります。 $\Gamma_{II} - \Gamma_I$  が閉曲線になっており、囲まれた面を  $S$  と取りました。ですから、 $\int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$  は  $S$  を通る全磁束、すなわちソレノイドの全磁束を表しています。これを  $\Phi$  とおきました。これを用いると、

$$\begin{aligned}\psi_{II}(t, \mathbf{x}) &= \exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\varphi_{II}(\mathbf{x})\right)\psi_0^{II}(t, \mathbf{x}) \\ &= \exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\varphi_I(\mathbf{x})\right)\exp\left(i\frac{e}{\hbar c}(\varphi_{II}(\mathbf{x}) - \varphi_I(\mathbf{x}))\right)\psi_0^{II}(t, \mathbf{x}) \\ &= \exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\varphi_I(\mathbf{x})\right)\exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\Phi\right)\psi_0^{II}(t, \mathbf{x})\end{aligned}\quad (15)$$

と表せますので、(13) より、

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\varphi_I(\mathbf{x})\right)\left(\psi_0^I(t, \mathbf{x}) + \exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\Phi\right)\psi_0^{II}(t, \mathbf{x})\right)\quad (16)$$

となります。ソレノイドがない場合  $\psi(t, \mathbf{x}) = \psi_0^I(t, \mathbf{x}) + \psi_0^{II}(t, \mathbf{x})$  ですから、ソレノイドがないときに比べ、相対的に  $\frac{e}{\hbar c}\Phi$  だけ位相差がずれることがわかりました。

ただし、磁場の強さによっては、磁場がない場合と見分けがつかない場合があります。整数  $n$  を用いて、 $\Phi = \frac{2\pi\hbar c}{e}n$  と表わされるときです。このとき、 $\exp(i\frac{e}{\hbar c}\Phi) = 1$  となるので、磁場がない場合と同様の干渉縞を描きます。

### 3 電磁場中の粒子の量子力学

式 (5) について考えていきます。まずは、荷電粒子の古典的な運動から考えましょう。

ここで、解析力学の話をしていきます。ラグランジアン  $L$  を、運動エネルギーからポテンシャルを引き算したものであるとしましょう。例えば、3次元空間内の運動を考えて、

$$L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x})\quad (17)$$

とします。オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) = 0\quad (18)$$

に (17) を代入すると、

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x})\quad (19)$$

が導き出されます。ニュートンの運動方程式です。実は、オイラー・ラグランジュ方程式 (18) は、ニュートンの運動方程式と等価であることを示すことができます。

もう少し解析力学の話が続けます。座標  $x$  に対する一般化運動量を、 $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$  と定義しましょう。ここで、ハミルトニアン  $H$  を、 $H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L$  とします。ここで、 $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$  を用いることで、 $\dot{\mathbf{x}}$  を  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{p}$  を用いて表すことができます。よって、ハミルトニアン  $H$  も  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{p}$  の関数となります。例えば、ラグランジアン (17) については、 $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}$  より、

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \quad (20)$$

と計算できました。また、ニュートンの運動方程式と等価な方程式として「正準方程式」というものがあり、以下の2式で表されます：

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (21)$$

ここでの  $\mathbf{p}$  は正準運動量と呼ばれます。(20) を (21) に代入して、ニュートンの運動方程式が導かれることを確認してみてください。

それでは、荷電粒子の運動も解析力学を用いて考えてみましょう。電磁場中の荷電粒子のラグランジアンは、次のように書くことができます：

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{e\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}}{c} - e\phi \quad (22)$$

ただし、 $\mathbf{A}$  はベクトルポテンシャル、 $\phi$  はスカラーポテンシャル (電位) です。このラグランジアンでオイラー・ラグランジュ方程式を書き下すと、

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e \left( \mathbf{E} + \frac{\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}}{c} \right) \quad (23)$$

が得られます。右辺はローレンツ力ですから、上のラグランジアンで良いでしょう。ここで、ベクトルポテンシャル・スカラーポテンシャルを次のように変換することを考えます。

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (24)$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad (25)$$

これは「ゲージ変換」と呼ばれる変換です。ゲージ変換をしても、荷電粒子の運動は変わりません。ゲージ変換におけるラグランジアンの変化は、

$$L \rightarrow L' = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{e(\mathbf{A} + \nabla \Lambda) \cdot \dot{\mathbf{x}}}{c} - e \left( \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) = L + \frac{e}{c} \left( \nabla \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) = L + \frac{e}{c} \frac{d\Lambda}{dt} \quad (26)$$

です。「ハミルトンの原理」から、ラグランジアンに  $t$  と  $\mathbf{x}$  の関数の時間に関する全微分を足しても、運動は不変であることを示すことができます。ゲージ変換によるラグランジアン

の変化は  $e\Lambda/c$  の時間に関する全微分なので、運動が不変であることがわかりました。

式 (22) から、電磁場中の荷電粒子のハミルトニアンは次のように導かれます：

$$H = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c)^2}{2m} + e\phi \quad (27)$$

また、正準方程式から、 $\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c}{m}$  となるので、「力学的運動量」 $\mathbf{\Pi}$  は、 $\mathbf{\Pi} = m\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}/c$  と書けます。

さて、ようやく量子力学の話に入ります。ここで、「状態を表すベクトル」を  $|\alpha\rangle$  と表します（「ケット」と言います）。また、これと「対をなすベクトル」を  $\langle\alpha|$  と表しましょう（「ブラ」と言います）。複素数  $c_a, c_b$  を用いて、 $c_a|\alpha\rangle + c_b|\beta\rangle$  と「対をなすベクトル」は、 $c_a^*\langle\alpha| + c_b^*\langle\beta|$  となります。

演算子  $\hat{X}$  は、左からケットに作用し、右からブラに作用するものとします。線形代数を学習した方は、行列とベクトルの積というイメージで考えてみてください。ここで、 $\hat{X}|\alpha\rangle$  と「対をなすベクトル」を、 $\langle\alpha|\hat{X}^\dagger$  とします。

それでは、電磁場中の荷電粒子の運動について、量子力学ではゲージ変換のもとでどうなるか考えてみましょう。古典論で考えた場合、運動が不変であるため、粒子の位置  $\mathbf{x}$  や力学的運動量  $\mathbf{\Pi}$  はゲージ変換のもとで不変です。一方、正準運動量  $\mathbf{p}$  は、 $\mathbf{\Pi}$  を保つために  $\mathbf{A}$  の変化を打ち消す必要があるため、一般に不変にはなりません。これを量子力学に置き換えて考えると、粒子の位置や力学的運動量の”期待値”が不変であると期待して良いでしょう。物理量は演算子で表し、状態  $|\alpha\rangle$  における  $\hat{X}$  に対応する物理量の期待値は  $\langle\alpha|\hat{X}|\alpha\rangle$  と書きます。

ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の存在下での状態ケットを  $|\alpha\rangle$  とします。また、ゲージ変換して、 $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\Lambda$  を使うときの状態ケットを、 $|\tilde{\alpha}\rangle$  とします。以上の考察を踏まえて、以下のように要請します：

$$\langle\alpha|\hat{\mathbf{x}}|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\hat{\mathbf{x}}|\tilde{\alpha}\rangle \quad (28)$$

$$\langle\alpha|\hat{\mathbf{p}} - e\hat{\mathbf{A}}/c|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\hat{\mathbf{p}} - e\tilde{\mathbf{A}}/c|\tilde{\alpha}\rangle \quad (29)$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}\rangle \quad (30)$$

なお、(30) は、状態ケットのノルム（ベクトルの”大きさ”の 2 乗に相当）の保存を要請しています。ここで、 $|\alpha\rangle$  と  $|\tilde{\alpha}\rangle$  を次のように関係付けます：

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \hat{Y}|\alpha\rangle \quad (31)$$

「対をなすベクトル」は、

$$\langle\tilde{\alpha}| = \langle\alpha|\hat{Y}^\dagger \quad (32)$$

です. このとき,  $\langle \tilde{\alpha} | \hat{\mathbf{x}} | \tilde{\alpha} \rangle = \langle \alpha | \hat{Y}^\dagger \hat{\mathbf{x}} \hat{Y} | \alpha \rangle$ ,  $\langle \tilde{\alpha} | \hat{\mathbf{p}} - e\tilde{\mathbf{A}}/c | \tilde{\alpha} \rangle = \langle \alpha | \hat{Y}^\dagger (\hat{\mathbf{p}} - e\hat{\mathbf{A}}/c - e\nabla\Lambda/c) \hat{Y} | \alpha \rangle$ ,  $\langle \tilde{\alpha} | \tilde{\alpha} \rangle = \langle \alpha | \hat{Y}^\dagger \hat{Y} | \alpha \rangle$  を用いて書き換えると,

$$\hat{Y}^\dagger \hat{\mathbf{x}} \hat{Y} = \hat{\mathbf{x}} \quad (33)$$

$$\hat{Y}^\dagger (\hat{\mathbf{p}} - e\hat{\mathbf{A}}/c - e\nabla\Lambda/c) \hat{Y} = \hat{\mathbf{p}} - e\hat{\mathbf{A}}/c \quad (34)$$

$$\hat{Y}^\dagger \hat{Y} = \hat{1} \quad (35)$$

となりました. これを満たすような演算子  $\hat{Y}$  として,

$$\hat{Y} = \exp\left(\frac{ie\Lambda(\hat{\mathbf{x}})}{\hbar c}\right) \quad (36)$$

がとれます. このとき,

$$\hat{Y}^\dagger = \exp\left(\frac{-ie\Lambda(\hat{\mathbf{x}})}{\hbar c}\right) \quad (37)$$

となるので, (35) は大丈夫だとすぐにわかるでしょう. また,  $\hat{Y}$  は  $\hat{\mathbf{x}}$  の関数です. 位置演算子  $\hat{\mathbf{x}}$  は  $\hat{\mathbf{x}}$  の任意の関数と可換なので, (33) が成り立っていることもわかります. (34) を考えてみましょう. ここで,  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$  と定義します. このとき,

$$[\hat{p}_i, G(\hat{\mathbf{x}})] = -i\hbar \frac{\partial G}{\partial \hat{x}_i} \quad (38)$$

が成り立つことを利用すると,

$$\begin{aligned} \hat{Y}^\dagger \hat{\mathbf{p}} \hat{Y} &= \exp\left(\frac{ie\Lambda(\hat{\mathbf{x}})}{\hbar c}\right) \hat{\mathbf{p}} \exp\left(\frac{-ie\Lambda(\hat{\mathbf{x}})}{\hbar c}\right) \\ &= \exp\left(\frac{-ie\Lambda(\hat{\mathbf{x}})}{\hbar c}\right) \left[ \hat{\mathbf{p}}, \exp\left(\frac{ie\Lambda(\hat{\mathbf{x}})}{\hbar c}\right) \right] + \hat{\mathbf{p}} \\ &= \exp\left(\frac{-ie\Lambda(\hat{\mathbf{x}})}{\hbar c}\right) \left( -i\hbar \nabla \exp\left(\frac{ie\Lambda(\hat{\mathbf{x}})}{\hbar c}\right) \right) + \hat{\mathbf{p}} \\ &= \frac{e\nabla\Lambda(\hat{\mathbf{x}})}{c} + \hat{\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (39)$$

となります. よって, (34) も成立していました.

以上から,  $|\tilde{\alpha}\rangle = \exp\left(\frac{ie\Lambda(\hat{\mathbf{x}})}{\hbar c}\right) |\alpha\rangle$  と書けました. ここで,  $|\alpha\rangle$  は状態を表すベクトルであると説明しましたが, これは波動関数に対応しています. ゲージ変換前の波動関数を  $\psi(t, \mathbf{x})$ , 変換した後の波動関数を  $\tilde{\psi}(t, \mathbf{x})$  とすれば,

$$\tilde{\psi}(t, \mathbf{x}) = \exp\left(\frac{ie\Lambda(\mathbf{x})}{\hbar c}\right) \psi(t, \mathbf{x}) \quad (40)$$

と書くことができるのです. この形, よくみると式 (5) と同じ形になっています. 実は, 式 (5) は, ゲージ変換をして  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  の場合の運動に帰着させようとしていたのです.



## 4 ベリー位相とアハラノフ・ボーム効果

さらに発展的な話題に移ります。ハミルトニアン $\hat{H}(t)$ の固有値方程式が、以下のように表されるとしましょう。

$$\hat{H}(t)|n;t\rangle = E_n(t)|n;t\rangle \quad (41)$$

$|n;t\rangle$  は時刻  $t$  における  $n$  番目の固有状態を表しています。このハミルトニアンに対して、以下のシュレディンガー方程式を考えます。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha;t\rangle = \hat{H}(t)|\alpha;t\rangle \quad (42)$$

この方程式の一般解を考えましょう。固有ベクトルで展開して、以下のように表されるとします。

$$|\alpha;t\rangle = \sum_n c_n(t) \exp[i\theta_n(t)] |n;t\rangle \quad (43)$$

ただし、

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \quad (44)$$

です。目標は、展開係数にある  $c_n(t)$  を求めることです。まず、(43) を (42) に代入して、(41) を用いて整理すると、

$$i\hbar \sum_n \left( \dot{c}_n e^{i\theta_n} |n;t\rangle + i\dot{\theta}_n c_n e^{i\theta_n} |n;t\rangle + c_n e^{i\theta_n} \frac{\partial}{\partial t} |n;t\rangle \right) = \sum_n E_n c_n e^{i\theta_n} |n;t\rangle \quad (45)$$

となります。(44) から、 $\dot{\theta}_n = -\frac{E_n}{\hbar}$  とわかりますから、これを代入してさらに整理すると、

$$\sum_n e^{i\theta_n} \left( \dot{c}_n |n;t\rangle + c_n \frac{\partial}{\partial t} |n;t\rangle \right) = 0 \quad (46)$$

ここで、両辺に  $\langle m;t|$  を左からかけます。 $\langle m;t|$  と各  $\langle n;t|$  は同時刻の固有状態なので、規格直交性を利用すると、

$$e^{i\theta_m} \dot{c}_m + \sum_n e^{i\theta_n} c_n \langle m;t| \left[ \frac{\partial}{\partial t} |n;t\rangle \right] = 0 \quad (47)$$

よって、

$$\dot{c}_m(t) = - \sum_n e^{i(\theta_n(t) - \theta_m(t))} c_n(t) \langle m;t| \left[ \frac{\partial}{\partial t} |n;t\rangle \right] \quad (48)$$

を得ます。この方程式の右辺の、 $\langle m;t| \left[ \frac{\partial}{\partial t} |n;t\rangle \right]$  の項を考えましょう。まずは、(41) の両辺を時間微分してみると、

$$\dot{\hat{H}}(t)|n;t\rangle + \hat{H}(t) \frac{\partial}{\partial t} |n;t\rangle = \dot{E}_n(t)|n;t\rangle + E_n(t) \frac{\partial}{\partial t} |n;t\rangle \quad (49)$$

となります。  $m \neq n$  とし、両辺に  $\langle m; t|$  を左からかけると、

$$\langle m; t|\dot{\hat{H}}(t)|n; t\rangle + \langle m; t|\hat{H}(t)|\left[\frac{\partial}{\partial t}|n; t\rangle\right] = 0 + E_n(t)\langle m; t|\left[\frac{\partial}{\partial t}|n; t\rangle\right] \quad (50)$$

$\langle m; t|\hat{H}$  と「対をなすベクトル」は  $\hat{H}^\dagger|m; t\rangle$  ですが、 $\hat{H}$  はエルミートのですから、 $\hat{H}^\dagger|m; t\rangle = \hat{H}|m; t\rangle = E_m|m; t\rangle$  となります。 よって、 $\langle m; t|\hat{H} = E_m^*\langle m; t|$  とわかるので、これと (29) を利用すれば、 $m \neq n$  のとき、

$$\langle m; t|\left[\frac{\partial}{\partial t}|n; t\rangle\right] = \frac{\langle m; t|\dot{\hat{H}}(t)|n; t\rangle}{E_n(t) - E_m(t)} \quad (51)$$

とわかりました。  $m = n$  の場合に注意して、これを (48) に代入すると、

$$\dot{c}_m(t) = -c_m(t)\langle m; t|\left[\frac{\partial}{\partial t}|m; t\rangle\right] - \sum_{n \neq m} c_n(t)e^{i(\theta_n(t) - \theta_m(t))} \frac{\langle m; t|\dot{\hat{H}}(t)|n; t\rangle}{E_n(t) - E_m(t)} \quad (52)$$

となりました。

ここで、「断熱近似」を考えましょう。 パラメータが時間とともに「ゆっくりと」変化するときを考えます。 ハミルトニアンが非常にゆっくりと変化するとき、

$$\frac{|\langle m; t|\dot{\hat{H}}(t)|n; t\rangle|}{E_n(t) - E_m(t)} \ll \langle m; t|\left[\frac{\partial}{\partial t}|m; t\rangle\right] \quad (53)$$

となりますので、(52) において右辺第 2 項は無視できるほど小さくなります。 よって、

$$\dot{c}_n(t) = -c_n(t)\langle n; t|\left[\frac{\partial}{\partial t}|n; t\rangle\right] \quad (54)$$

と近似できます。 ここまでくれば微分方程式の解を考えられそうです。  $c_n(t)$  は以下のように与えられます：

$$c_n(t) = c_n(0) \exp(i\gamma_n(t)) \quad (55)$$

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \langle n; t'|\left[\frac{\partial}{\partial t'}|n; t'\rangle\right] dt' \quad (56)$$

ここまでの議論から、(43) 中にある  $\theta_n(t)$  のみならず、 $\gamma_n(t)$  も位相因子となっていることがわかります。 新たに出て来たこの位相因子について、もう少し考察してみましょう。

ハミルトニアンがパラメータを通じて時間依存しているとします。 つまり、時間に依存するパラメータのベクトル  $\mathbf{R}(t)$  に依存するハミルトニアン  $\hat{H}(\mathbf{R}(t))$  を考えることにします。 このとき、固有値と固有ベクトルは、 $E_n(t) = E_n(\mathbf{R}(t))$ ,  $|n; t\rangle = |n(\mathbf{R}(t))\rangle$  となります。 また、 $\mathbf{R}$  についての微分演算子  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}$  を  $\nabla_{\mathbf{R}}$  と表すことにしましょう。 連鎖律から、

$$\frac{\partial}{\partial t}|n; t\rangle = [\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R})\rangle] \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad (57)$$

ですから, (56) より,

$$\begin{aligned}\gamma_n(T) &= i \int_0^T \langle n; t | \left[ \frac{\partial}{\partial t} |n; t\rangle \right] dt = i \int_0^T \langle n; t | [\nabla_{\mathbf{R}} |n; t\rangle] \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} dt \\ &= i \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(T)} \langle n(\mathbf{R}) | [\nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle] \cdot d\mathbf{R}\end{aligned}\quad (58)$$

となります. このベクトル  $\mathbf{R}(t)$  が, ある曲線  $C$  上を 1 周するときを考えます. この周期が  $T$  であるとき,  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}(T)$  で, 1 周したときの位相を  $\gamma_n(C)$  と表すと,

$$\gamma_n(C) = i \oint \langle n(\mathbf{R}) | [\nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle] \cdot d\mathbf{R}\quad (59)$$

となるので,  $\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \equiv i \langle n(\mathbf{R}) | [\nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle]$  とすると, ストークスの定理より,

$$\gamma_n(C) = \oint_C \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} = \int_S [\nabla_{\mathbf{R}} \times \mathbf{A}_n(\mathbf{R})] \cdot d\mathbf{S}\quad (60)$$

であるとわかりました. ここで注意すべきは,  $\gamma_n(C)$  は,  $\mathbf{R}(t)$  が通る経路の幾何学的構造のみに依存し,  $C$  上での位相が  $\mathbf{R}$  により変化しようとする振る舞いの詳細に依存しないということです.  $|n(\mathbf{R})\rangle \rightarrow e^{i\delta(\mathbf{R})} |n(\mathbf{R})\rangle$  としたとき,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) &\rightarrow i e^{-i\delta(\mathbf{R})} \langle n(\mathbf{R}) | [\nabla_{\mathbf{R}} (e^{i\delta(\mathbf{R})} |n(\mathbf{R})\rangle)] \\ &= i e^{-i\delta(\mathbf{R})} \langle n(\mathbf{R}) | [i (\nabla_{\mathbf{R}} \delta(\mathbf{R})) e^{i\delta(\mathbf{R})} |n(\mathbf{R})\rangle + e^{i\delta(\mathbf{R})} \nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle] \\ &= -(\nabla_{\mathbf{R}} \delta(\mathbf{R})) \langle n(\mathbf{R}) | n(\mathbf{R})\rangle + i \langle n(\mathbf{R}) | [\nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle] \\ &= \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) - \nabla_{\mathbf{R}} \delta(\mathbf{R})\end{aligned}\quad (61)$$

ですから,

$$\gamma_n(C) \rightarrow \oint_C [\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) - \nabla_{\mathbf{R}} \delta(\mathbf{R})] \cdot d\mathbf{R} = \oint_C \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R}\quad (62)$$

となり, 位相の振る舞いは  $\gamma_n(C)$  に影響しないことがわかりました.

ここで導入した  $\gamma_n(C)$  が, 時間によらない幾何学的位相, またはベリー位相と呼ばれるものです.  $\gamma_n(C)$  が, 経路  $C$  の幾何学的構造にのみ依存することからこの名がついています.

それでは, ベリー位相を用いてアハラノフ・ボーム効果を考えてみましょう. 図5のように, 電子を箱に入れ, 箱が磁束線の周りを 1 周する状況を考えます. このとき, 箱内の磁場はゼロであるとしましょう. 箱の固定点の位置ベクトルを  $\mathbf{R}$  とし, これが経路  $C$  に沿って 1 周します. 電子の位置ベクトルを  $\mathbf{r}$  とします. このとき, 式 (2)~(5) あたりで議論したことと同様に考えると,  $n$  番目の固有状態である箱内の電子の波動関数は,

$$\langle \mathbf{r} | n(\mathbf{R}) \rangle = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \phi(\mathbf{r})\right) \psi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})\quad (63)$$

$$\phi(\mathbf{r}) \equiv \int_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'\quad (64)$$

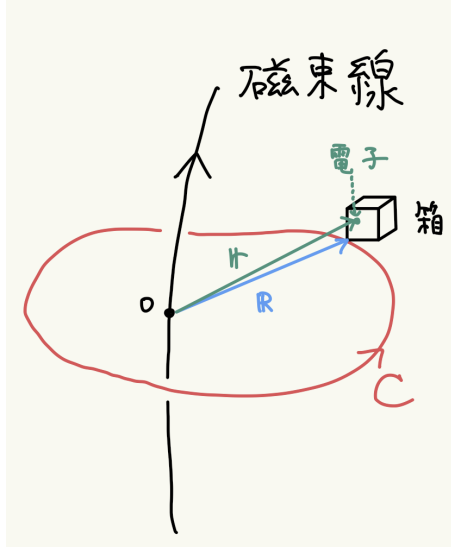


図5 箱の固定点を通る経路

と表されます。ただし、 $\Gamma$  は、 $\mathbf{R}$  から  $\mathbf{r}$  までの経路です。また、 $\psi_n(\mathbf{r})$  は磁場がないときの波動関数です。すると、

$$\begin{aligned}
& \langle n(\mathbf{R}) | [\nabla_{\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle] \\
&= \int d^3x \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \phi(\mathbf{r})\right) \psi_n^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \\
& \quad \times \left[ -\frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{R}) \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \phi(\mathbf{r})\right) \psi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \phi(\mathbf{r})\right) \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right] \quad (65) \\
&= \int d^3x \left[ -\frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{R}) \psi_n^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \psi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + \psi_n^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right] \\
&= -\frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{R})
\end{aligned}$$

ですから、ベリー位相は、

$$\begin{aligned}
\gamma_n(C) &= i \oint_C \left[ -\frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{R}) \right] \cdot d\mathbf{R} \\
&= \frac{e}{\hbar c} \int_S [\nabla_{\mathbf{R}} \times \mathbf{A}(\mathbf{R})] \cdot d\mathbf{R} \quad (66) \\
&= \frac{e}{\hbar c} \int_S \mathbf{B}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R}
\end{aligned}$$

となります。  $\int_S \mathbf{B}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R}$  は、 $C$  内の磁束を表していますから、これを  $\Phi$  として、

$$\gamma(C) = \frac{e}{\hbar c} \Phi \quad (67)$$

とわかりました。これが、電子が磁束線の周りを1周することにより現れた位相です。電子は直接磁場に触れていないのに磁場の影響を受けていることがここでも確かめられました。

## 5 最後に

量子力学の性質・現象の一部は古典力学からの類推でもわかりますが、古典力学では説明できない現象も多くあります。ベリー位相の効果も量子力学特有の効果で、古典力学からは予想することはできません。

アハラノフ・ボーム効果が、ベリー位相を考えることで容易に結論が得られるからも、量子力学特有の効果であるとわかります。磁場  $\mathbf{B}$  にはベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  が対応しますが、前者の磁場のみが物理的に実在すると信じられていた頃がありました。しかし、今回挙げた例においては、磁場ゼロの領域しか電子は通らないのに位相は変化しますから、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  が物理的実在であると見てもよいということになります。古典力学においては実在とは見なされないベクトルポテンシャルが、量子力学では実在とみなされる、この違いも量子力学の面白さの一つかもしれません。

## 参考文献

- [1] 電子情報通信学会「電子波で見る電磁界分布【ベクトルポテンシャルを感じる電子波】」 2023年3月30日 [https://www.journal.ieice.org/conts/kaishi\\_wadainokiji/200012/20001201-1.html](https://www.journal.ieice.org/conts/kaishi_wadainokiji/200012/20001201-1.html)
- [2] 国立研究開発法人科学技術振興機構 小泉裕康「ベリー位相入門 ディラックモノポール様 特異点の出現から、スピン禍 誘起ループ電流の生成まで」 2023年4月10日 [https://www.jstage.jst.go.jp/article/oubutsu/83/3/83\\_222/\\_pdf](https://www.jstage.jst.go.jp/article/oubutsu/83/3/83_222/_pdf)
- [3] 日立「二重スリット実験：量子計測」 2023年4月12日 <https://www.hitachi.co.jp/rd/research/materials/quantum/doubleslit/index.html>
- [4] J.J. サクライ「現代の量子力学(上) 第3版」吉岡書店, 2022
- [5] J.J. サクライ「現代の量子力学(下) 第2版」吉岡書店, 2015
- [6] 坂本真人「場の量子論 不変性と自由場を中心にして」裳華房, 2014