ミンコフスキー時空上での量子論

文責：Physics Lab.2023　量子班　中澤　正樹

2023 年 5 月 11 日

この記事では場の量子論でどのようにミンコフスキー時空上での対称性を反映した記述をするのかを考えています．どんな空間の上に理論を作ってもいいわけですが，ミンコフスキー時空は特に「平坦な」時空で，特殊相対論の舞台でした．場の量子論ではこの対称性を反映した「状態の対称性変換」を課し，状態や場を考えます．質量をもつ一粒子状態にはスピンに対応する自由度が現れることがわかります．

執筆にあたり，説明してくれたりレビューをくれたりして助けてくれたみなさんはありがとうございました！

目次

1 座標

物理を描く空間として，いくつか条件を備えた多様体というもの考えることにする．
多様体 M の開集合 U には写像 $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ を定めることができる．

φ により点 $x \in U$ に対し座標 $\{x^\mu\} = \varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ が定まる[a]．また，$\{x^\mu\}$ を使って点 x の接空間 T_xM の基底 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_x \right\}$ を定めることができる．

[a] $\{x^0, x^1, \ldots, x^\mu\}$ のことを略記して $\{x^\mu\}$ と書いている

ただし接空間 T_xM とは，接ベクトル

$$v : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto v[f] \quad \text{s.t.} \begin{cases} v[f+g] = v[f] + v[g], \quad v[\lambda f] = \lambda v[f] \\ v[fg] = v[f]g(x) + f(x)v[g] \end{cases}$$

全体のなすベクトル空間である (詳しくは [1])．

2 計量

これから考える多様体では計量

$$g|_x : T_xM \otimes T_xM \to \mathbb{R},\ \left(v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\bigg|_x, w^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\bigg|_x \right) \mapsto g_{\mu\nu}(x) v^\mu w^\nu$$

を定義することができる．T_x^*M の基底で成分表示すると，

$$g|_x = g_{\mu\nu}(x) \mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu$$

とかける．特に x において $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ となった時，座標 $\{x^\mu\}$ を与える座標系 ϕ を慣性系と呼ぶ．

僕は混乱していたのですが... 各点でこのような座標を取れる多様体のクラスをローレンツ多様体と呼ぶ．ミンコフスキー時空はローレンツ多様体の一つであるが，その特殊なところはのちに述べるように各点で自明に慣性系を取れるところである．一方で，ミンコフスキー時空だからといって常に $g_{\mu\nu}$ が $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ になるわけではない．例えば空間部分に極座標を取れば $g_{\mu\nu}$ は $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$ である．

3 ミンコフスキー時空

ミンコフスキー時空 M とは $\mathbb{R}^{1,3}$ と同型な多様体である．それゆえに M の点に対して対応する $\mathbb{R}^{1,3}$ の元を取ることが，自然な慣性系 $\phi_\mathrm{n}(x) = \{x^\mu\}$ を定める．

4 ポアンカレ変換

上記のミンコフスキー時空の性質から，特殊な等長変換であるポアンカレ変換を考えられる．これがミンコフスキー時空の対称性あるいは平坦性の表れである．

4.1　等長変換

変換 $f : M \to M,\ p \mapsto f(p)$ が計量を変えない時，すなわち，

$$g_{\mu\nu}(p)\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu = g_{\mu\nu}(f(p))f^*\mathrm{d}y^\mu \otimes f^*\mathrm{d}y^\nu$$

が成り立つとき，等長変換という．ただし，$\{x^\mu\}$ は p における座標であり，$\mathrm{d}x^\mu$ はその座標系に対応する T_p^*M の基底である．同様に $\{y^\mu\}$ は $f(p)$ における写像である．

f_* を誘導写像

$$f_* : T_pM \to T_{f(p)}M,\ V \mapsto f_*V \text{ s.t. } f_*V[g] = V[g \circ f]$$

ただし，g は M 上 C^∞ 写像である．この時，p に座標 $\varphi(p) = \{x^\mu\}$，$f(p)$ に写像 $\psi(p) = \{y^\mu\}(= \{\psi^\mu(p)\})$ を与えると，$\dfrac{\partial}{\partial x^\mu} = V$ に対し $f_*V = \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}$ となる．ただし，$\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}[\psi^\alpha \circ f \circ \varphi^{-1}(\{x^\nu\})]$ とした．

f^* は引き戻し写像

$$f^* : T^*_{f(p)}M \to T_p^*M,\ \omega \mapsto f^*\omega \text{ s.t. } f^*\omega(V) = \omega(f_*V)$$

である．$f^*\mathrm{d}y^\beta\left(\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \mathrm{d}y^\beta\left(\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) = \dfrac{\partial y^\beta}{\partial x^\mu}$ より，$f^*\mathrm{d}y^\beta = \dfrac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}\mathrm{d}x^\nu$

$$g_{\mu\nu}(p)\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu = g_{\mu\nu}(f(p))\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta}\mathrm{d}x^\alpha \otimes \mathrm{d}x^\beta$$

したがって

等長変換の条件は次のように言い換えられる．

$$g_{\mu\nu}(p) = g_{\alpha\beta}(f(p))\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \tag{1}$$

さて，$g \circ f(p)$ における座標 $\{z^\mu\}$ と，等長変換 $f(p) \mapsto g \circ f(p)$ s.t. $g_{\alpha\beta}(f(p)) = g_{\sigma\rho}(g \circ f(p))\dfrac{\partial z^\sigma}{\partial y^\alpha}\dfrac{\partial z^\rho}{\partial y^\beta}$ も考えた時，

$$g_{\mu\nu}(p) = g_{\alpha\beta}(f(p))\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} = g_{\sigma\rho}(g \circ f(p))\frac{\partial z^\sigma}{\partial y^\alpha}\frac{\partial z^\rho}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} = g_{\sigma\rho}(g \circ f(p))\frac{\partial z^\sigma}{\partial x^\mu}\frac{\partial z^\rho}{\partial x^\nu}$$

なので，$g \circ f$ も等長変換をなす．この合成を積とすれば，単位元 id と逆元 $f^{-1} : f(p) \mapsto p$ として等長変換全体は群をなす．

4.2　ポアンカレ変換

さらに，$g_{\mu\nu}(p) = g_{\mu\nu}(f(p)) = \eta_{\mu\nu}$ を満たすような等長変換をポアンカレ変換と呼ぶ．すなわち，

ポアンカレ変換は以下の条件を満たす変換 $p \mapsto f(p)$ である．

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \tag{2}$$

この等長変換のなす群をポアンカレ群と呼ぶ．

計量を η に固定した等長変換を考えられるのは，各点で自然な慣性系を取れるというミンコフスキー時空の性質のおかげである．

さて，点 x である慣性系 $\phi(x) = \{x^\mu\}$ を取れた時，それに座標変換 $(\Lambda, a) : x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ ($\Lambda^\mu{}_\nu \in \mathrm{SO}(1,3), a^\mu \in \mathbb{R}^{1,3}$) をして得られる別の座標 $\phi'(x) = \{x'^\mu\}$ もまた慣性系である．この変換を 2 回施すと，

$$\begin{aligned} x''^\mu &= \Lambda'^\mu{}_\nu x'^\nu + a'^\mu \\ &= \Lambda'^\mu{}_\nu (\Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma + a^\nu) + a'^\mu \\ &= \Lambda'^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma + (\Lambda'^\mu{}_\nu a^\nu + a'^\mu) \end{aligned}$$

となる．よって積を $(\Lambda', a')(\Lambda, a) = (\Lambda'\Lambda, \Lambda' a + a') : x^\sigma \mapsto \Lambda'^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma + (\Lambda'^\mu{}_\nu a^\nu + a'^\mu)$ と定めることで，この座標変換もポアンカレ群をなすことになる．しかしながら，ここで考えている座標変換は同じ点 x の異なる座標 $\phi(x), \phi'(x)$ の間の変換なのに対し，今定義した等長変換としてのポアンカレ変換は点の変換 $M \to M, x \mapsto x'$ であり，異なるものであることに注意が必要である．

特殊相対論は，点 p の観測者と点 $f(p)$ の観測者がそれぞれ慣性系 $\{x^\mu\}$，$\{y^\mu\}$ で観測する時，不変になる量 $E^2 = g_{\mu\nu} E^\mu E^\nu$ がどちらも $E^2 = -(E^0)^2 + (E^1)^2 + (E^2)^2 + (E^3)^2$ の形で書ける[a]という理論であり，ミンコフスキー時空はこの議論をできる空間であった．

[a] のでそのような量を考える限り二つの観測者は等価であり，また光速度不変が満たされている

5 状態に対する対称性の仮定

量子論では状態をヒルベルト空間 V の元 $|\psi\rangle$ に対応させる．

前節のようにミンコフスキー時空にはポアンカレ変換で点が移り変わる対称性がある．この対称性に従って視点を移す[*1]ことによる変換 $|\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle = U(\Lambda, a)\,|\psi\rangle$ の前後で 2 状態の間の確率が変わらない，つまり

$$\langle \varphi \,|\, \psi \rangle = \langle \varphi' \,|\, \psi' \rangle$$

とする．このような変換を対称性変換とよぶ．確率保存を満たすには $U(\Lambda, a)$ がユニタリであれば良いので，ポアンカレ群のユニタリ表現がこれにあたり，その表現基底は一粒子状態空間 $W \subset V$ となる．

6 ポアンカレ群の構造

6.1 連結成分

ポアンカレ変換の定義 (2) から $\dfrac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}$ はポアンカレ変換をパラメタライズする．

行列 η，Λ を，$(\eta)_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}$，$(\Lambda)^\mu_\nu \equiv \dfrac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}$ と定義したとき，

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

とかけるので，$\det\bigl(\Lambda^T g \Lambda\bigr) = \det(\Lambda)\det(g)\det(\Lambda) = \det(g)$ より，$\det(\Lambda) = \pm 1$ である．従って，P の中には，$\det(\Lambda) = 1$ となるものと $\det(\Lambda) = -1$ となるものがある．

また，$-1 = g_{00} = -(\Lambda^0_0)^2 + (\Lambda^1_0)^2 + (\Lambda^2_0)^2 + (\Lambda^3_0)^2$ より, $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$ である．$\Lambda^0_0 > 1$ となるものと，$\Lambda^0_0 < -1$ となるものがある．これらは連続的に移り変わることのできない 4 つの分類を与える．

[*1] あるいは観測者を移す

	$\det(\Lambda)=1$	$\det(\Lambda)=-1$
$\Lambda_0^0>1$	$P_+^\uparrow$	$P_+^\downarrow$
$\Lambda_0^0<-1$	$P_-^\uparrow$	$P_-^\downarrow$

このうち，$P_+^\uparrow$ は単位元成分と呼ばれる，単位元と連続な曲線で結ばれる成分である．
これからは $P_+^\uparrow$ を考察する．

6.2 Lie 群の性質

ポアンカレ群は実のところ Lie 群をなす．そこで少し Lie 群での一般論を考える．

G を Lie 群とする．1 パラメタ部分群とは，曲線 $\phi:\mathbb{R}\to G$ であって，

$$\phi(t)\phi(s)=\phi(t+s)$$

を満たすものである．

G 上ベクトル場とは，滑らかな対応 $X:p\in G\mapsto X|_p\in T_pG$ である．Lie 群の左移動 $L_g:a\mapsto ag$ は，ベクトル場に作用して誘導写像 $L_{g*}:T_aG\to T_{ag}G,\ X|_a\mapsto L_{g*}X|_a$ を与える．

左不変ベクトル場とは，$L_{g*}X|_a=X|_{ag}$ となるようなベクトル場 X のことである．

1 パラメタ部分群を一つ考えると

$$\frac{\mathrm{d}\phi^\mu(t)}{\mathrm{d}t}=X^\mu(\phi(t))$$

により対応する左不変ベクトル場 $X|_{\phi(t)}=X^\mu(\phi(t))\left.\dfrac{\partial}{\partial g^\mu}\right|_{\phi(t)}$ が定まる．ただし，$\phi(t)$ における G の座標 $\{g^\mu\}=\{g^\mu(\phi(t))\}$ を取って，成分表示 $\phi^\mu(t)=g^\mu\circ\phi(t)$ としている．(X が左不変ベクトル場になっていることは [2] を参照)

ベクトル場 X に対しては，微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^\mu}{\mathrm{d}t}=X^\mu(\sigma(t))$$

を満たす積分曲線 $\sigma(t)$ が初期条件 $\sigma^\mu(0,x_0)=x_0^\mu$ と一対一対応する．これは常微分方程式の解の存在と一意性から保証される．このことから X に対して初期条件 x_0 とパラメータ t を $\sigma(t)$ へ飛ばす写像 $\sigma:M\times\mathbb{R}\to M,\ (x_0,t)\mapsto\sigma(t,x_0)$ が定義でき，これを X によって生成される流れと呼ぶ．流れは $\sigma(t,\sigma^\mu(s,x_0))=\sigma(t+s,x_0)$ を満たす．[*2]

左不変ベクトル場 X を与えると，

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^\mu(t,g)}{\mathrm{d}t}=X^\mu(\sigma(t,g)),\ \sigma(0,g)=g$$

を満たす流れに対して G の 1 パラメタ部分群 $\phi(t)=\sigma(t,e)$ が定まる [2]．ただし，x_0^μ，σ^μ は x_0，$\sigma(t,g)$ の成分表示である．

以上から左不変ベクトル場と 1 パラメタ部分群には 1 対 1 対応がある．このことから，

[*2] $\sigma(t,\sigma^\mu(s,x_0))$ と $\sigma(t+s,x_0)$ が t を変数として同じ微分方程式を満たすことから確かめられる

ϕ_V を左不変ベクトル場 $X_V|_g = L_{g*}V (V \in T_eG)$ によって生成される 1 パラメタ部分群とする．指数写像

$$\exp : T_eG \to G,\ V \mapsto \phi_V(1)$$

を定義できる．さらに 1 パラメタ部分群の元全体 $\{\phi_V(t)|t \in \mathbb{R}\}$ は以下のように T_eG の元と関係付けられる．

$$\exp(tV) = \phi_V(t)$$

最後の主張は，左不変ベクトル場 $X_{aV}|_g \equiv L_{g*}(aV)$ が 1 パラメタ部分群 $\phi_{aV}(t)$ を生成するのに対し，$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_V(at)\right|_{t=0} = a\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_V(t)\right|_{t=0} = aV$ より，$X_{aV}|_g$ は $\phi_V(at)$ を生成するともいえる．対応の一意性から $\phi_V(at) = \phi_{aV}(t)$ なので，

$$\exp(aV) = \phi_{aV}(1) = \phi_V(a)$$

であることからわかる．

単位元と 1 パラメタ部分群で結ばれているような Lie 群の元 ($g \in G$ s.t. ${}^{\exists}\phi, t\ \phi_V(t) = g$) は，対応する T_eG の元 (V) から指数写像によって知ることができることになる．特に G が行列群の時は指数写像は行列の指数関数になって具体的に計算できる．

6.3　左不変ベクトル場を求める

以上の議論から，ポアンカレ群の単位元成分 $P_+^{\uparrow}$ は単位元での接ベクトルから指数写像により知ることができる．単位元での接ベクトルを求めよう．

ミンコフスキー時空において，ポアンカレ群は点の移動 $p \mapsto f(p)$ の集まりだが，それに対応する座標の関係もポアンカレ群を成すので，

$$p : \varphi(p) = \{x^\mu\} \mapsto \psi(f(p)) = \{y^\mu\}$$
$$\begin{pmatrix} y^\mu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^\mu \\ 1 \end{pmatrix}$$

とかいた時，$\begin{pmatrix} P & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ はポアンカレ群をなす．$P_+^{\uparrow}$ を考えているので何らかの 1 パラメタ部分群を使って $\phi(t) = \begin{pmatrix} P & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とかける．さて，$t = \varepsilon \ll 1$ の場合の微小変換を考える．この時，$y^\mu = x^\mu + \varepsilon X^\mu$ とかける．まず，ポアンカレ変換の条件から X^μ を求め，そこから $\phi(\varepsilon)$ の表現を知る．

一般に等長変換の微小変換は (1) より次の条件を満たす．

$$\frac{\partial(x^\kappa + \varepsilon X^\kappa)}{\partial x^\mu}\frac{\partial(x^\lambda + \varepsilon X^\lambda)}{\partial x^\nu} g_{\kappa\lambda}(x + \varepsilon X) = g_{\mu\nu}(x)$$
$$\left(\delta^\kappa_\mu + \varepsilon\frac{\partial X^\kappa}{\partial x^\mu}\right)\left(\delta^\lambda_\nu + \varepsilon\frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\nu}\right)\left(g_{\kappa\lambda} + \varepsilon X^\xi\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\xi}\right) = g_{\mu\nu}$$
$$X^\xi\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\xi} + \frac{\partial X^\kappa}{\partial x^\mu}g_{\kappa\nu} + \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\nu}g_{\mu\lambda} = 0 \quad (\varepsilon \text{ 最低次のみ拾った})$$

これを Killing 方程式と呼ぶ．

ここではポアンカレ変換を考えているので，$\frac{\partial\eta_{\mu\nu}}{\partial x^\xi} = 0$ であるから，方程式は

$$\frac{\partial X^\kappa}{\partial x^\mu}\eta_{\kappa\nu} + \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\nu}\eta_{\mu\lambda} = 0$$

結局，P 上のベクトル場を求めるには，この方程式の解を求めてやれば良いことになる．ところで，

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial X^0}{\partial x^\mu}+\frac{\partial X^\lambda}{\partial x^0}g_{\mu\lambda}=0 &\iff -\frac{\partial X^0}{\partial x^a}+\frac{\partial X^a}{\partial x^0}=0\ (a=1,2,3)\\
\frac{\partial X^b}{\partial x^\mu}+\frac{\partial X^\lambda}{\partial x^b}g_{\mu\lambda}=0 &\iff \frac{\partial X^b}{\partial x^0}-\frac{\partial X^0}{\partial x^b}=0\\
&\ \frac{\partial X^b}{\partial x^c}+\frac{\partial X^c}{\partial x^b}=0\ (b,c=1,2,3)
\end{aligned}
$$

なので，

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\partial X^0}{\partial x^a}+\dfrac{\partial X^a}{\partial x^0}=0\\
\dfrac{\partial X^b}{\partial x^c}+\dfrac{\partial X^c}{\partial x^b}=0
\end{cases}
\qquad (a,b,c=1,2,3)
$$

がベクトル場を求めるために解くべき方程式．この解は，

$$
X=\begin{matrix} x^a\dfrac{\partial}{\partial x^0}+x^0\dfrac{\partial}{\partial x^a}+t^\mu\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}, \\ x^b\dfrac{\partial}{\partial x^c}-x^c\dfrac{\partial}{\partial x^b}+t^\mu\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\end{matrix}\quad (t\ \text{定数})
$$

である．重ね合わせの定理から結局解は，

$$
\begin{aligned}
J^a&=\varepsilon^{abc}\left(x^b\frac{\partial}{\partial x^c}-x^c\frac{\partial}{\partial x^b}\right)\\
K^a&=x^a\frac{\partial}{\partial x^0}+x^0\frac{\partial}{\partial x^a}\\
P^\mu&=\frac{\partial}{\partial x^\mu}
\end{aligned}
$$

を定義して，その線型結合で

$$
X=j_aJ^a+k_aK^a+t_\mu P^\mu \tag{3}
$$

とかける．この解にはパラメータ j_a,k_a,t_μ について合計 $3+3+4=10$ の自由度があることがわかる．

この結果から $\phi(\varepsilon)$ を読み取る．
まず，(3) から，

$$
\begin{pmatrix}X^0\\X^1\\X^2\\X^3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&k_1&k_2&k_3&t_0\\k_1&0&-2j_3&2j_2&t_1\\k_2&2j_3&0&-2j_1&t_2\\k_3&-2j_2&2j_1&0&t_3\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^0\\x^1\\x^2\\x^3\\1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}&\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{0}&1\end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}
$$

なので，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}y^\mu\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^\mu+\varepsilon X^\mu\\1\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}x^\mu\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varepsilon\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}&\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{0}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^\mu\\0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}+\varepsilon\boldsymbol{\lambda}&\varepsilon\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{0}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^\mu\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\phi(\varepsilon)&=\boldsymbol{I}+\begin{pmatrix}\varepsilon\boldsymbol{\lambda}&\varepsilon\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{0}&0\end{pmatrix}\\
&=\exp(\varepsilon\boldsymbol{V})=\boldsymbol{I}+\varepsilon\boldsymbol{V}
\end{aligned}
$$

より，

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{pmatrix}$$

結果，

$$\phi(t) = \exp(t\boldsymbol{V}) = \begin{pmatrix} \exp(t\boldsymbol{\lambda}) & 1 + t\boldsymbol{a} + \cdots \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

7 ポアンカレ群の表現

7.1 ベクトル表現を求める

(4) からベクトル (x^0, x^1, x^2, x^3) の変換性を読み取ると，

$$x^\mu \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu$$

となる．

7.2 群構造

ベクトル表現から次のことがわかる．すなわち，ポアンカレ変換は，$a \in \mathbb{R}^{1,3}$，$\Lambda \in \mathrm{SO}(1,3)$ として，

$$(0, a) : x^\mu \mapsto x^\mu + a^\mu, \quad (\Lambda, 0) : x^\mu \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

を定義して，

$$x \mapsto (\Lambda, a)x$$

ただし，

$$\begin{aligned} (0, a_1)(0, a_2) &= (0, a_1 + a_2) \\ (\Lambda_1, 0)(\Lambda_2, 0) &= (\Lambda_1\Lambda_2, 0) \\ (\Lambda, 0)(0, a) &= (0, \Lambda a)(\Lambda, 0) \end{aligned}$$

上記の関係からポアンカレ群 P はこれらの半直積になっているといえる．すなわち，

$$P = \mathbb{R}^{1,3} \rtimes \mathrm{SO}(1,3).$$

7.3 ユニタリで既約な表現

5 で述べたユニタリ表現を求める．ここでは既約表現を考える．

7.3.1 ローレンツ群による軌道分解

ローレンツ群 L は $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \equiv s^2$ を不変にする変換 $M \to M$ である．L の単位元成分を本義ローレンツ群といい $L_+^\uparrow$ と書く．

本義ローレンツ群のミンコフスキー空間への作用 $L_+^\uparrow \times M \to M$ を考えたとき，ミンコフスキー空間は推移曲面に分解できる．

ただし曲面 S が推移曲面であるとは

$$\begin{aligned}&\left|x_1\right\rangle \in S, \Lambda \in L_+^{\uparrow} \Longrightarrow \Lambda \left|x_1\right\rangle \in S\\ &\left|x_1\right\rangle, \left|x_2\right\rangle \in S \Longrightarrow^{\exists} \Lambda \text{ s.t. } \left|x_2\right\rangle = \Lambda \left|x_1\right\rangle\end{aligned}$$

が成り立つことである．

$c \in R$ を定数とすると，$s^2 = c$ で定める曲面は推移曲面になる．[*3]

$\hat{s^2}$ を，固有値を s^2 とする演算子として定義する．$|x\rangle \in S$ をとる．すなわち $\hat{s^2}\,|x\rangle = c\,|x\rangle$ とすると，

$$\begin{aligned}\hat{s^2}(\Lambda\,|x\rangle) &= c(\Lambda\,|x\rangle) \quad (L\text{ の定義})\\ &= \Lambda c\,|x\rangle\\ &= \Lambda\hat{s^2}\,|x\rangle\end{aligned}$$

したがって，

$$\left[\Lambda, \hat{s^2}\right] = 0$$

である．

ここでシューアの補題[*4] から，Λ を既約表現とすると $\hat{s^2}$ は単位行列の $r \in \mathbb{R}$ 倍でなければならない．その際表現空間 V 内の全ての $|x\rangle \in V$ について $\hat{s^2}\,|x\rangle = r\,|x\rangle$ となるが，$\hat{s^2}$ の固有値は同じ推移曲面内でしか同じ値を取り得ない．このことは Λ を既約にする表現空間は推移曲面の中にしか取り得ないことを意味する．

従って，ローレンツ群の既約表現を求めるにあたっては，各推移曲面について異なる表現を求めることになる．

7.3.2　ポアンカレ群による軌道分解

ポアンカレ群のユニタリ表現を求めるにあたって，並進のユニタリ表現を $U(a)$，ローレンツ変換のユニタリ表現を $U(\Lambda)$ とする．

ポアンカレ変換は s^2 を不変にしないので，これによって推移曲面を指定することはできない．しかし，並進のユニタリ表現 $U(a) = \exp(a_\mu P^\mu)$ により定義された $P_\mu P^\mu \equiv P_\mu^2$ の固有値 k_μ^2 によって指定することができる．$P_\mu P^\mu$ はローレンツスカラーであり，定義の仕方から $U(a)$ と可換，すなわち，

$$\left[P_\mu^2, U(\Lambda)\right] = \left[P_\mu^2, U(a)\right] = 0$$

を満たす．よって $U(a)$ や $U(\Lambda)$ を作用する前後で k_μ^2 の値は変わらないので，k_μ^2 によって推移曲面を指定できる．同じ推移曲面の任意の元はローレンツ変換で移り合う．

7.3.3　ローレンツ変換の分解

$U(a)$ の固有ベクトル $|k^\mu\rangle$ をとる．それ以外の自由度を ξ で表しておき，表現空間を $\{|k^\mu\rangle \otimes |\xi\rangle\}$ を基底にはる．

次にローレンツ変換のユニタリ表現 $U(\Lambda)$ の方に注目しよう．

推移局面の中の一つの k^μ を選ぶ．その性質から同じ推移局面の中の任意の元 p^μ との間には何かローレンツ変換が存在して，

$$L(p)\,|k^\mu\rangle \otimes |\xi\rangle = |p^\mu\rangle \otimes |\xi\rangle$$

とかける．

[*3] L の定義からローレンツ変換は s^2 を不変にするし，s^2 を不変にする変換はローレンツ変換である．

[*4] Shur の補題の一つは以下のように述べられる．

g の正規表現 $D(g)$ と M が可換ならば，M は単位行列のスカラー倍である．すなわち，

$$[D(g), M] = 0 \Longleftrightarrow M = kI \quad (k\text{ スカラー，}I\text{ 単位行列})$$

$L(p)$ は k^μ 毎に定義されるものである．

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda)\left|p^\mu\right\rangle \otimes |\xi\rangle &= U(\Lambda P(p))\left|k^\mu\right\rangle \otimes |\xi\rangle \\
&= U(L(\Lambda p))\ U(L(\Lambda p)^{-1}\Lambda L(p))\left|k^\mu\right\rangle \otimes |\xi\rangle
\end{aligned} \tag{5}
$$

ここで

$$
W(\Lambda, p) = L(\Lambda p)^{-1}\Lambda L(p)
$$

とすると，これは $|k^\mu\rangle$ に作用しても k^μ を変えないようなローレンツ変換の部分群である．そのため，

$$
W(\Lambda, p)\left|k^\mu\right\rangle \otimes |\xi\rangle = \left|k^\mu\right\rangle \otimes \sum_{\xi'} S_{\xi\xi'}\left|\xi'\right\rangle
$$

とかける．結果 (5) は，

$$
U(\Lambda)\left|p^\mu\right\rangle \otimes |\xi\rangle = |\Lambda p\rangle \otimes \sum_{\xi'} S_{\xi\xi'}\left|\xi'\right\rangle
$$

とかけることになる．

このように $U(\Lambda)$ を $|\xi\rangle$ に対角的な $U(L(\Lambda p))$ と，$|k^\mu\rangle$ に対角的な $W(\Lambda, p)$ の部分に分けることができる．$W(\Lambda, p)$ をウィグナー回転と呼ぶ [3].

7.3.4　ウィグナー回転の表現

ウィグナー回転の表現 $D(W)$ は，推移曲面ごとに固定部分群の元 k^μ を選び，それを変えないようなローレンツ変換の部分群を求めれば良いことになる．

質量あり ($k^\mu k_\mu < 0$) の場合　この場合は $k^\mu = (1,0,0,0)$ を選べばよく，これを不変にするローレンツ変換の部分群は空間回転 SO(3) である．この生成子 J_i はスピン代数 $[J_i, J_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}J_k$ に従い，対応する表現空間は $|\xi\rangle = |s, s_z\rangle$ で書かれる (ただし，s は整数または半整数，$s_z = -s, -s+1, \ldots + s$ である．)．例えば $s = \dfrac{1}{2}$ の場合を選ぶと，$J_i = \dfrac{\sigma_i}{2}$ $(i = 1,2,3)$ であり $S = \exp\left(\theta_i \dfrac{\sigma_i}{2}\right)$ である (σ_i はパウリ行列).

スピンの構造であることがわかる．ξ の自由度はスピン自由度と呼ばれる．

質量なし ($k^\mu k_\mu = 0$) の場合　この場合は $k^\mu = (1,0,0,1)$ などと選べば良い．この時，k^μ を不変にする W は，

$$
W(\theta, \alpha, \beta) = S(\alpha, \beta) R(\theta)
$$

とかける．ただし，

$$
S(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1-\eta & \eta \\ \alpha & \beta & -\eta & 1+\eta \end{pmatrix}, \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}
$$

この W の生成子は $A = J^2 + K^1, B = -J^1 + K^2$ を使って

$$
1 + i\alpha A + i\beta B + i\theta J_3
$$

とかける ([3]pp.97-104). これらは二次元ユークリッド代数 $\mathfrak{se}(2)$ である. $|k^\mu\rangle \otimes |\xi\rangle$ は A, B の同時固有状態になっているので,

$$A\,|k^\mu\rangle \otimes |\xi\rangle = a\,|k^\mu\rangle \otimes |\xi\rangle$$
$$B\,|k^\mu\rangle \otimes |\xi\rangle = b\,|k^\mu\rangle \otimes |\xi\rangle$$

とかけるが, $(a, b) \neq (0, 0)$ の解があると連続無限個の固有値 $(a\cos\theta - b\sin\theta, a\sin\theta + b\cos\theta)$ が存在することになる [4].

このような解はまだ実験的に見つかっていない. 一方 $(a, b) = (0, 0)$ の場合, 自由度は残る J_3 の固有値となり, ξ をこの固有値 σ に取り直して,

$$J_3\,|k^\mu\rangle \otimes |\sigma\rangle = \sigma\,|k^\mu\rangle \otimes |\sigma\rangle$$

となる. σ は第 3 軸方向の運動量であるから,

$$\sigma = \frac{\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$$

という量にあたる ($\boldsymbol{k}$ は運動量ベクトル, $\boldsymbol{J}$ は角運動量ベクトル). この量はヘリシティと呼ばれる. 表現がたかだか 2 価だと仮定するとこの値は,

$$\sigma = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm1, \pm\frac{3}{2}\ldots$$

に限られ, 光子の場合は $\pm\dfrac{1}{2}$ に対応している.

このようにして一粒子の状態空間がどうなっているかを, 状態に対称性変換を仮定したことから導くことができた. この一粒子状態を加えたり消したりする生成消滅演算子を導入することで多粒子状態も扱えるようになる. それを用いて場の演算子を導入し, 適切にラグランジアンを決めてやれば, 方程式が得られる.
さて, この記事は終始ミンコフスキー時空を考えてきたが, 曲がった時空間上での量子化の方法やそこでスピンがどのように現れるかが問題になる. これらについてはぜひ Physics Lab.2023 の数理物理班での小原君 [5] や辻君 [6] の記事を参照してください.

参考文献

[1] 高間俊至.“微分幾何学ノート” Physics Lab. 2023　数理物理班 (2023) : 3.2 接空間.
[2] 中原幹夫.“理論物理学のための幾何学とトポロジー i” (2010) : 167–169.
[3] S.Weinberg. “場の量子論 (1 巻) 粒子と量子場” (1997).
[4] 坂本眞人.“場の量子論-不変性と自由場を中心にして-” (2022) : 421–423.
[5] 小原充貴.“クリフォード代数とスピン幾何の導入” Physics Lab. 2023 数理物理班 (2023).
[6] 辻圭汰.“幾何学的量子化” Physics Lab. 2023　数理物理班 (2023).

Physics Lab.2023 の記事は, `https://event.phys.s.u-tokyo.ac.jp/physlab2023/` の「各班のページ」からご参照ください.