

トーリックコードとハニカムコード

文責：Physics Lab.2023 量子班 丹羽 亮太郎

2023年5月11日

目次

第 I 部 トーリックコード	4
1 物性物理とトーリックコード	4
1.1 モデル	4
1.2 基底状態	5
1.2.1 基底状態の条件と次元	5
1.2.2 基底状態の空間の基底	6
1.3 励起状態	10
1.4 準粒子の braiding と統計性	11
1.5 準粒子の fusion と superselection sector	14
1.6 実験結果	15
2 量子情報とトーリックコード	16
2.1 stabilizer 形式	16
2.2 論理量子ビットと論理演算子	16
2.2.1 論理量子ビット、論理演算子	16
2.2.2 stabilizer 形式の論理量子ビットと論理演算子	17
2.2.3 トーリックコードの論理量子ビットと論理演算子	17
2.3 物理的解釈と局所摂動に対する頑強性	18
2.4 誤り訂正	19
第 II 部 ハニカムコード	21
3 ハニカム格子模型	21
3.1 モデル	21
3.2 厳密解の導出法	22
3.2.1 スピン形式におけるヒルベルト空間の分割： \mathcal{L}_w	22
3.2.2 Majorana 演算子によるハミルトニアンを書き換え	22
3.2.3 Majorana 形式におけるヒルベルト空間の分割： $\tilde{\mathcal{L}}_u$	23
3.2.4 Majorana 演算子の二次形式と Majorana モード	24
3.2.5 \mathcal{L}_w と $\tilde{\mathcal{L}}_u$ の関係	26
3.3 基底状態	27
3.4 A 相と B 相	27

4	ハニカムコード	30
4.1	モデル	30
4.2	サブシステムコード	31
4.3	サブシステムコードとしてのハニカムコード	32
4.4	stabilizer 形式と測定	33
4.5	瞬時的 stabilizer 群	34
4.6	論理量子ビット	35
4.7	論理演算子	35
4.7.1	内部論理演算子	35
4.7.2	外部論理演算子	36
4.8	誤り訂正	38
4.8.1	エラーモデル	38
4.8.2	シンδροームエラーの時空間配置	39
4.9	現状と展望	41
4.10	番外編：ハニカム格子模型と測定操作の物理	42
5	付録	44
5.1	付録 A：ボソン、フェルミオン、エニオン、統計性	44
5.2	付録 B：トポロジカル秩序相	46
5.2.1	ランダウ理論とトポロジカル秩序相	46
5.2.2	エンタングルメント	46
5.2.3	密度演算子	47
5.2.4	エンタングルメントエントロピー	47
5.2.5	面積則とトポロジカルエンタングルメントエントロピー	49
5.2.6	トーリックコードの基底状態とトポロジカル秩序相	49

はじめに

近年「量子計算」と呼ばれる、量子力学の原理を応用した一連の情報処理技術が発展している。金融や製薬といった分野での応用が将来的に期待されることもあって、学术界だけでなく産業界の注目も集めて活発な投資が行われている。しかし、世間一般の期待とは裏腹に実用化への道のりはまだまだ遠く、基礎研究課題が山積している。とりわけ、計算の途中で生じたエラーを訂正する「誤り訂正」の実現は、我々の生活に真にインパクトを与えうる情報処理を行うためには必要不可欠であるとされる。

そこで本解説記事では、誤り訂正を行う上で有望と考えられている「トーリックコード」と、比較的最近提唱された「ハニカムコード」と呼ばれる手法についてレビューを行う。その際、誤り訂正といった実用的な側面だけでなく、背景にある理論的な観点も詳しく紹介する。具体的には、数学でいう「トポロジー」の概念の片鱗が見受けられたり、物理的に珍しい現象が生じたりすることを見る。こうした話題は量子情報の文脈からすると必須ではないのだが、興味深い背景なので第 I 部と第 II 部の前半でそれぞれ紹介した。

本記事の具体的な構成は以下の通りである。まず、第 I 部の前半でトーリックコードの基底状態と励起状態の基本的な性質を説明する。その後、第 I 部の後半でそれらの性質が誤り訂正にどのように応用されるのかを解説する。次に、第 II 部の前半でハニカムコードの背景となるハニカム格子模型を厳密に解き、A 相と B 相という二つの相が存在することを紹介する。その上で第 II 部の後半ではハニカムコードを説明する。その際、周期的な測定操作で六角格子上のトーリックコードが出現し、誤り訂正が可能になることをみる。最後に、ハニカム格子模型とハニカムコードの類似点と相違点について紹介する。具体的には、測定という非ユニタリ操作で A 相と B 相に類似した相を作り出す、という最近の話題を簡単に紹介する。

割とマニアックなテーマを取り扱っていることもあり、主な読者としては物理が専門の大学生を想定している。とはいえ、高度な道具はほとんど使っておらず、線形代数に親しみがある方であれば大筋は読めるように配慮したつもりである。これは、万が一にも教養課程の学部生や高校生の方などに読んでいただいた時に、雰囲気だけでも伝わるようにしたかったからである。その反面、物理が専門の方にとっては冗長すぎると感じられる場所が所々見受けられるかもしれないが、そこは目をつむっていただければ幸いである。

レビュー記事という性質上、内容の大部分は原論文を参考に書いている。ただし、自分自身の理解を整理する目的も兼ねて書いているため、所々私個人の解釈や考えも含まれているということは初めに断っておく。また、一部の脚注や付録では、わかりやすさを重視してやや大雑把な説明をした。もちろん、本文からはなるべく誤りを排除するように努めたものの、残ってしまった見落としに関する責任は全て私にある。

なお、特に第 I 部の前半の内容は、理学部物理学科の三年生向けに開講された「物理学ゼミナール」の授業での私の発表内容と一部重複している。¹この話題に興味を持つきっかけを作ってくれた教授や、一緒に議論をしてくれたりした同期のみなさん、とりわけ量子班の班長に対する感謝の念をここで述べさせていただきたい。

文責：丹羽 亮太郎

¹本記事は 2023 年度の東京大学五月祭における学生有志企画 [Physics Lab.2023](#) のために作成された。学科の監修などは一切受けておらず、あくまで有志の学生が勝手に執筆した記事であることをご了承ください。

第I部

トーリックコード

トーリックコードは A.Kitaev によって提唱されたトーラス²上のスピン 1/2 の粒子³の模型である [1][2]。この模型は厳密に解くことができ、種数 g のトーラスにおいて基底状態は 4^g 重に縮退する⁴。まず物性物理の文脈で模型を導入し、次に量子情報の文脈でどのような応用があるのかを見ることにする。物性物理の立場では、いわゆる「トポロジカル秩序相」⁵の最も基本的な例の一つとなっている点が重要である。これは局所的な秩序変数を持たない新奇な相で、伝統的なランダウ理論では記述できないような興味深い状態として知られている。また、「エニオン」と呼ばれる、通常のボソンやフェルミオンとは異なる統計性⁶を持つ準粒子励起が現れる。本文中ではトポロジカル秩序相の概念自体には深入りせず、模型の基底状態と励起状態の性質について概観する。一方、量子情報の立場では、基底状態の空間の中に外部磁場等の摂動に対して頑強な論理量子ビットを構成することができ、なおかつそれらに対して誤り訂正を実現できる点が画期的である。この性質のため、トーリックコードは量子情報をノイズから保護する「量子メモリ」として使うことができるとされる [6]。以下、これらの内容を順に解説する。

1 物性物理とトーリックコード

1.1 モデル

トーラス上の正方格子の辺上にスピン 1/2 の粒子を配置し、以下のハミルトニアンを考える。(図 1)

$$H = -J_e \sum_s A_s - J_m \sum_p B_p \tag{1}$$

ただし A_s, B_p はそれぞれ star 演算子、plaquette 演算子と呼ばれ、以下の 4 体のスピン演算子で定義される。

$$A_s = \prod_{j \in \partial s} \sigma_j^x, \quad B_p = \prod_{j \in \partial p} \sigma_j^z \tag{2}$$

ここで、 $\partial s, \partial p$ はそれぞれ頂点 s 、面 p の最近接の 4 つのスピンを表す。

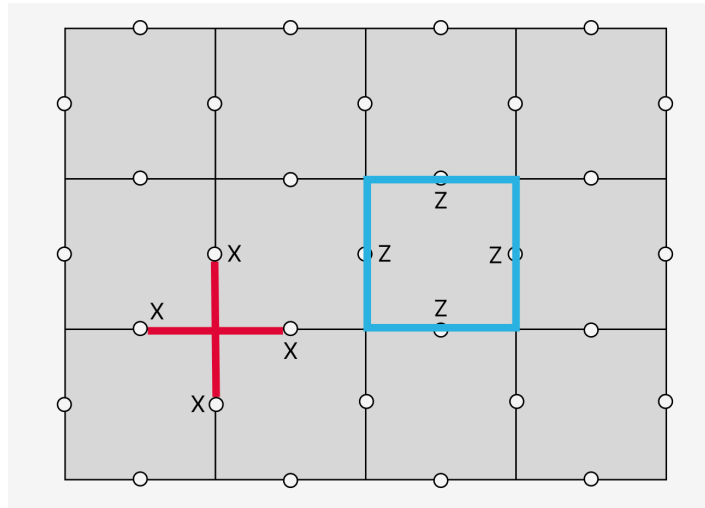


図 1: トーリックコードのセットアップ。スピン 1/2 の粒子がトーラスの表面に張られた正方格子の辺上に配置されている。赤は頂点 s の再近接の 4 つのスピンに σ^x をかける star 演算子を表しており、青は面 p の再近接の 4 つのスピンに σ^z をかける plaquette 演算子を表している。 σ^x, σ^z は簡単に X, Z と書く。

²ドーナツや浮き輪の形をした立体を「トーラス」といい、その穴の数を「種数」という。

³「スピン」の概念に馴染みがなければ「小さな磁石のようなもの」と思っておけばよい。ただし、この説明は便宜的なものであり、決して鵜呑みにはいけない。スピンの場合状態が 2 つあり、 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ のように「上下」で表記されることが多い。

⁴最低エネルギー状態のことを「基底状態」といい、その他のエネルギー状態を「励起状態」という。同じエネルギーを持つ状態が d 個ある時、そのエネルギー準位は「 d 重に縮退している」という。

⁵トポロジカル秩序相、秩序変数、ランダウ理論に関しては付録 B を参照

⁶ボソン、フェルミオン、統計性に関しては付録 A を参照

ただし、 j 番目のスピンの作用する Pauli 行列 σ_j^α ($\alpha = x, y, z$) の定義は以下の通りである。

$$\sigma_j^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_j^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_j^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

このような格子とハミルトニアンを持つ模型が、トーリックコードである。一見すると非常に簡単な模型であるにもかかわらず、後述するようなさまざまな性質や応用がある点が面白い。

1.2 基底状態

1.2.1 基底状態の条件と次元

はじめに、トーリックコードの基底状態が満たすべき条件を考えよう。その準備として、「star 演算子と plaquette 演算子はどの二つを取っても交換する」ということを示す。まず、同種のパウリ行列は可換なので

$$[A_{s_1}, A_{s_2}] = [B_{p_1}, B_{p_2}] = 0 \quad (3)$$

ただし、演算子 \hat{O}_1, \hat{O}_2 に対して $[\hat{O}_1, \hat{O}_2] \equiv \hat{O}_1 \hat{O}_2 - \hat{O}_2 \hat{O}_1$ である。また、star 演算子と plaquette 演算子が交わる時は、その形状から必ず2つのスピンの共有される。(図2)

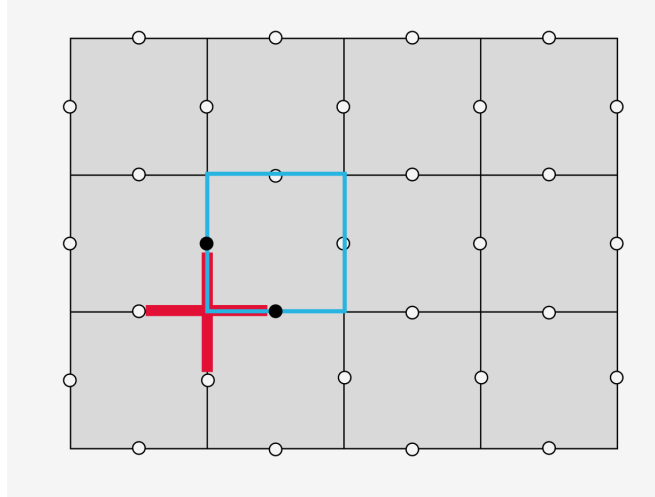


図 2: star 演算子と plaquette 演算子。この二つの演算子が交わる時は、必ず2点で交わる。

よって σ^x と σ^z の反可換性 $\sigma^x \sigma^z = -\sigma^z \sigma^x$ からくる負号が2ヶ所で生じるので

$$[A_s, B_p] = 0 \quad (4)$$

式 (3)、(4) から、star 演算子と plaquette 演算子はどの二つをとっても交換するとわかる。量子力学では互いに交換しない演算子は同時固有状態をもたないのであるが、上の結果から star 演算子や plaquette 演算子の場合には同時固有状態が存在するとわかる。よって、任意の A_s, B_p に対して

$$A_s |\psi\rangle_{G,S} = |\psi\rangle_{G,S} \quad (5)$$

$$B_p |\psi\rangle_{G,S} = |\psi\rangle_{G,S} \quad (6)$$

を満たす状態 $|\psi\rangle_{G,S}$ が存在する。ただしここで、 $A_s^2 = 1, B_p^2 = 1$ より各 star 演算や plaquette 演算子の固有値は ± 1 のどちらかとなることに注意しよう。この $|\psi\rangle_{G,S}$ は式 (1) のハミルトニアンの各項を最小にするため、求める基底状態となる。すなわち、式 (5)、(6) が基底状態を特徴づける条件である。

では次に、基底状態の空間の次元について考えよう。今、トーラス表面の正方格子の頂点 s の数を V 、面 p の数を F 、辺上のスピンの数を E とする。全ての star 演算子の積を取ると各スピンに対して 2 回 σ^x がかかり、全ての plaquette 演算子の積を取ると各スピンに対して 2 回 σ^z がかかるので

$$\prod_s A_s = 1 \quad (7)$$

$$\prod_p B_p = 1 \quad (8)$$

である。よって、独立な star 演算子、plaquette 演算子の数は頂点 s 、面 p の数からそれぞれ 1 つずつ減って $V-1, F-1$ となる。star 演算子や plaquette 演算子を新たに一つ導入して式 (5)(6) のような条件を 1 つ課すごとに条件を満たす固有空間の次元は半分になるということを踏まえると、 $(V-1) + (F-1)$ 個の条件によって E 個のスピンのなす 2^E 次元のヒルベルト空間が $2^{(V-1)+(F-1)}$ 分割されるため、基底状態の固有空間 $\mathcal{H}_{G,S}$ の次元は

$$\dim \mathcal{H}_{G,S} = 2^{E-(V+F-2)} = 4^g \quad (9)$$

となるのがわかる。ただしここで、種数 g のトーラスに対するオイラーの多面体定理 $V - E + F = 2 - 2g$ を用いた。純粋に幾何学的な g という量が基底状態の縮退度に関係していることに注意しよう。

1.2.1 要約

種数 g のトーリックコードの基底状態は、 4^g 次元の空間 $\mathcal{H}_{G,S}$ をなす。

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{G,S}$ となるための必要十分条件は、任意の s, p に対して

$$A_s |\psi\rangle = |\psi\rangle$$

$$B_p |\psi\rangle = |\psi\rangle$$

となることである。

1.2.2 基底状態の空間の基底

前節の結果から、特に種数 1 の表面において基底状態のなす空間は 4 次元であるとわかった。では、この空間を張る基底がどのような元なのかを具体的に考察しよう。以下、状態を z 基底で表示することにする。すなわち、各スピンのヒルベルト空間を σ^z の固有状態 $|\uparrow\rangle = (1, 0), |\downarrow\rangle = (0, 1)$ で張り、それらのテンソル積⁷でかける状態 $|\psi\rangle$ のみを取り扱う。⁸この表示には、スピン演算子を古典変数 $s_j = \pm 1$ に置き換えられるという利点がある。実際、

$$\sigma^z |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle, \quad \sigma^z |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -|\downarrow\rangle$$

$$\sigma^x |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle, \quad \sigma^x |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$$

なので、 $|\uparrow\rangle \rightarrow +1, |\downarrow\rangle \rightarrow -1$ という対応づけによって演算子の作用を以下のように古典変数 s_j で記述できる。

$$\text{plaquette 演算子} \leftrightarrow \left[\prod_{j \in \partial p} s_j \text{倍する} \right] \quad \text{star 演算子} \leftrightarrow \left[j \in \partial s \text{ に対して } s_j \rightarrow -s_j \text{ の変換を行う} \right]$$

⁷テンソル積は複合系の記述に用いる。記号は \otimes である。ひとまずは「独立な系を並列して取り扱う記号」と雑に考えてしまっても良い。

⁸任意の状態は基底の線形結合でかけるため、適切な取り方をした基底のみに注目すれば十分である。

さて、この表示のもとで *vortex* という用語を導入しよう。これは以下の式が成り立つ面 p のことである。(図 3)

$$w_p = \prod_{j \in \partial p} s_j = -1 \quad (10)$$

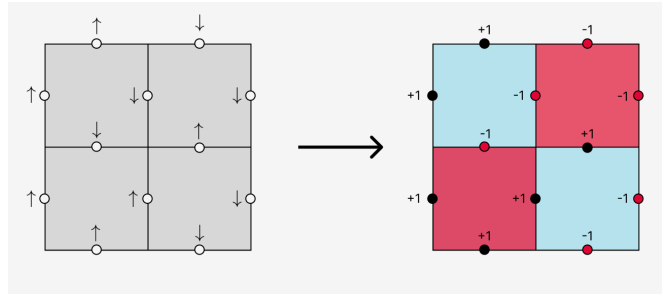


図 3: z 基底表示と *vortex*。 *vortex* がない面は青で、 *vortex* がある面は赤で示されている。

vortex が存在する、つまりある面 p に対して $B_p |\psi\rangle = -|\psi\rangle$ となる状態 $|\psi\rangle$ は基底状態の条件 (6) を破るため、 $\mathcal{H}_{G,S}$ には含まれない。従って、任意の $|\xi\rangle \in \mathcal{H}_{G,S}$ は *vortex* がない状態全体の線形和として

$$|\xi\rangle = \sum_{s_i: \text{vortex-free}} c_i |s_i\rangle \quad (11)$$

とかけることになる。このように表示すれば plaquette 演算子の条件 (6) は自動的に満たされるので、あとは star 演算子に関する条件 (5) を考慮して係数 c_i を決めればよい。ここで、star 演算子が古典スピン変数 s_j を反転させることに注目しよう。これは、 *vortex* のない「*vortex-free* な状態」 $|s_j\rangle$ と $|s_k\rangle$ が star 演算子をかけていくことで互いに移り合うことができる場合があることを意味する。(図 4)

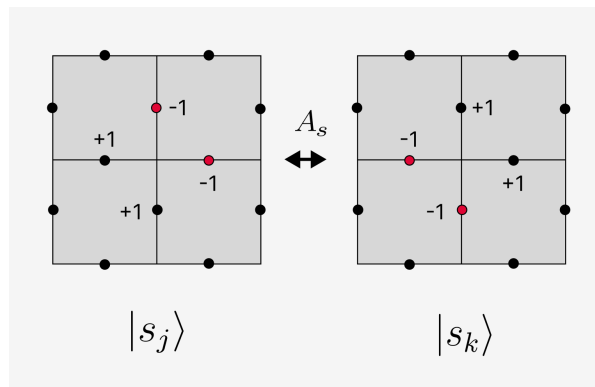


図 4: *vortex-free* な状態が互いに移り合う例。中央の頂点に star 演算子をかけることで、最近接の 4 つのスピンの反転し、 $|s_j\rangle \leftrightarrow |s_k\rangle$ と互いに移り合う。黒点は古典スピン変数 $+1$ に、赤点は古典スピン変数 -1 に対応する。

すなわち、 *vortex-free* な状態 $|s_j\rangle$ と $|s_k\rangle$ に対して、適切な star 演算子を選べば

$$|s_j\rangle = \prod_m A_m |s_k\rangle \quad (12)$$

が成立する場合がある。上式が成り立つとき、式 (11) の右辺に $\prod_m A_m$ をかけると

$$c_j |s_j\rangle + c_k |s_k\rangle \rightarrow c_k |s_j\rangle + c_j |s_k\rangle \quad (13)$$

となるため、式 (5) の条件が満たされるには $c_j = c_k$ でなくてはならない。同様の議論は star 演算子をかけて互いに移り合うことができるどの二つの *vortex-free* な状態に対しても成立するので、結局「star 演算子をかけて互いに移りあうことができる *vortex-free* な状態の集合」 (\mathbb{Z}_2 ゲージ同値類) に含まれる要素を「同じ係数で足し合わせて (均等重ね合わせ)」得られた状態が式 (5)(6) を両方満たし、 $\mathcal{H}_{G,S}$ の元になると分かる。

よって、 $\mathcal{H}_{G.S.}$ の基底について理解するには \mathbb{Z}_2 ゲージ同値類を詳しく調べれば良いことになる。前述したように $\mathcal{H}_{G.S.}$ は 4 次元の空間なので、それに対応して \mathbb{Z}_2 ゲージ同値類も 4 つあるはずである。そこで、これら进行分类するために、トーラス上の任意の閉曲線 l と任意の *vortex-free* 状態に対して定義された、「ウィルソンループ」と呼ばれる以下の量を導入する。

$$w_l = \prod_{j \in l} s_j \quad (14)$$

まず、 l を一つ固定すると、同じ \mathbb{Z}_2 ゲージ同値類に属する *vortex-free* 状態に対する w_l は同じ値となることを説明する。今、star 演算子をかけていくことで \mathbb{Z}_2 ゲージ同値類内のある *vortex-free* 状態から別の *vortex-free* 状態への移行が起きたとする。この時、 l 上の古典スピン変数も何個か反転している可能性があるわけだが、star 演算子と l は必ず 2 点で交わるため (図 5)、その反転は対で起きているはずである。よって $w_l = \prod_{j \in l} s_j$ の値は $(-1)^{2n} = 1$ 倍になっており、移行の前後で変化していないと分かる。つまり、各 \mathbb{Z}_2 ゲージ同値類内で w_l は一定値をとる。

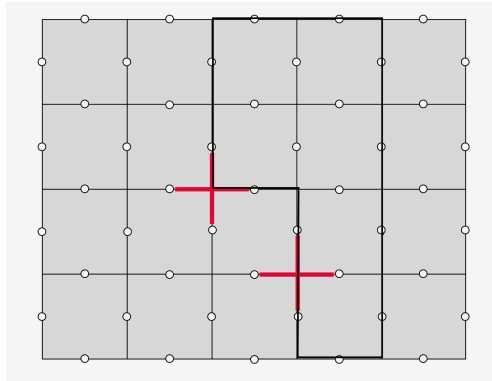


図 5: star 演算子と閉曲線 l 。star 演算子の形状のおかげで閉曲線 l との共通部分は必ず 2 点存在するため、古典スピン変数の反転は必ず対で起こる。よって $w_l = \prod_{j \in l} s_j$ は star 演算子をかける前後で変化しない。

次に、 l を連続的な変形で一点に縮められるような「自明なループ」にとると、全ての \mathbb{Z}_2 ゲージ同値類に対して $w_l = 1$ となってしまうことを説明する。これは以下の式変形で簡潔に理解できる。

$$w_l = \prod_{j \in l} s_j = \prod_{p \text{ inside } l} \left(\prod_{i \in \partial p} s_i \right) = 1 \quad (15)$$

ただし、2 番目の等号は「Stokes の定理」を思い起こさせる式変形 (図 6)、3 番目の等号は *vortex-free* 条件である。

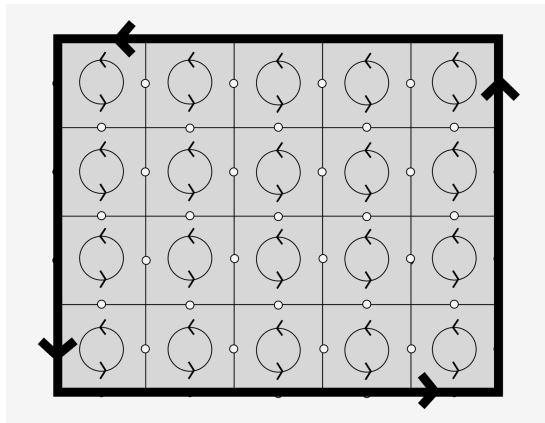


図 6: 式 (15) の概念図。連続的な変形で一点に縮められるような「自明なループ」は面 p で敷き詰められた内部領域を持っているため、ストークスの定理と同様に、境界の量を内部の量で表現することができる。

ここでは、そもそも w_l という量を定義する意味がないようにも思えるだろう。しかし、連続変形で一点に縮められる「自明なループ」ではなく、図 7 のような連続変形で一点に縮められない「非自明なループ」 l_1, l_2 を l に取れば、 $w_l = -1$ となりうる。これは l_1, l_2 が面 p で敷き詰められた内部領域を持たず、式 (15) の「Stokes の定理」を思い起こさせる変形が成り立たないためである。実際、図 8 のようにすれば $w_{l_1} = -1$ となる *vortex-free* 状態を構成できる。もちろん、 $w_{l_1} = +1$ となる *vortex-free* 状態もあるため、「非自明なループ」に対する w_l の値は \mathbb{Z}_2 ゲージ同値類の区別に使えることが分かる。

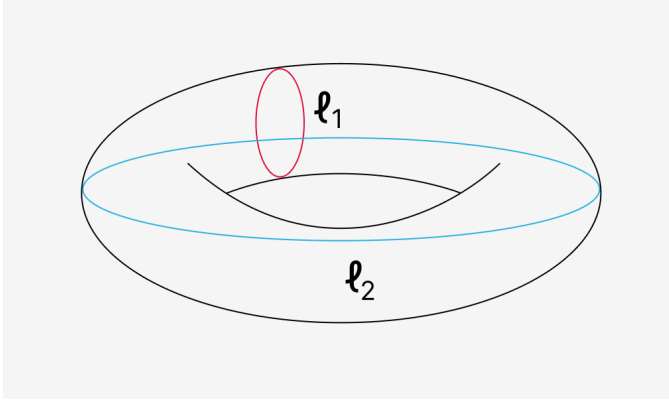


図 7: トーラスの周りを巻きつく非自明なループ l_1, l_2 。これらは互いに直交し、共に面 p で敷き詰められた内部領域を持たない閉曲線になっている。

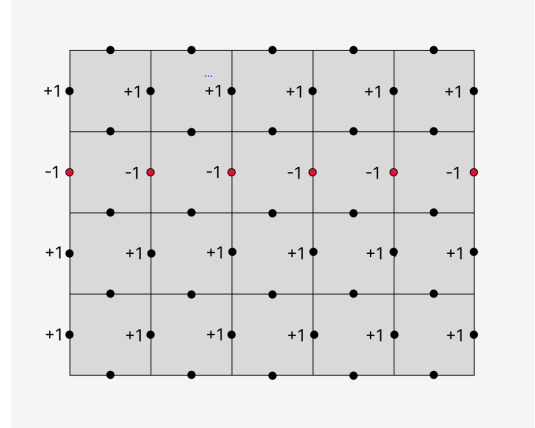


図 8: *vortex-free* かつ $w_{l_1} = -1$ となる例。赤点は -1 、黒点は $+1$ にそれぞれ対応している。 $w_{l_2} = -1$ となる例も縦横を逆にすれば同様にして構成できる。

ここで、閉曲線 l, l' が連続的な変形で移り合うとき、各 \mathbb{Z}_2 ゲージ同値類内で

$$w_{l'} = w_l \cdot \prod_p \left(\prod_{i \in \partial p} s_i \right) = w_l$$

となることに注意しよう。ただし、 \prod_p は適当な面 p にわたる積を表し、経路の連続的な変形に対応する。(図 9) また、2 番目の等号では *vortex-free* 条件を用いた。すなわち、 w_l の値に注目する際には連続的な変形で移り合う閉曲線同士を同一視できるため、「非自明なループ」は本質的には図 7 の l_1, l_2 の二種類しかないと分かる。⁹

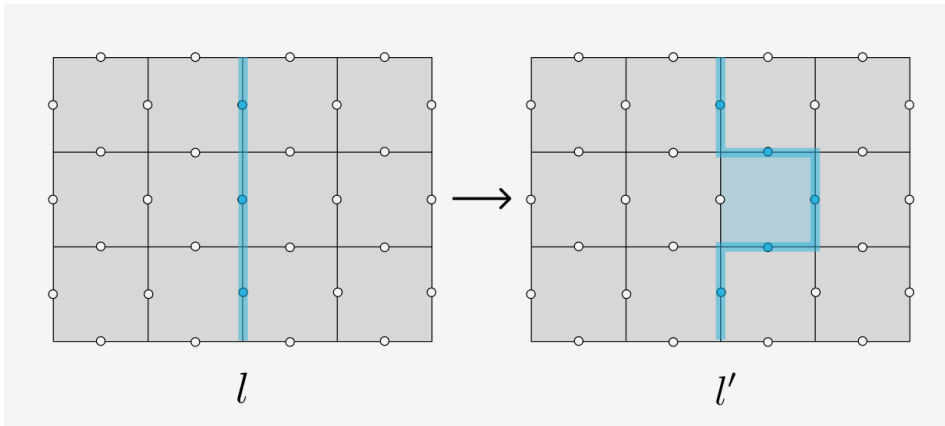


図 9: plaquette 演算子をかけることによる l から l' への経路の連続的な変形。図では青で示された面に対して plaquette 演算子をかけ、左に示された経路 l を右に示された経路 l' に変形している。 $s_j^2 = 1$ なので、 l と plaquette 演算子の共通部分はウィルソンループから外れる。

以上の話を総合すると、二種類の「非自明なループ」に対するウィルソンループ w_{l_1}, w_{l_2} がそれぞれ ± 1 のどちらの値をとるかに応じて \mathbb{Z}_2 ゲージ同値類は 4 通りに分類される、ということが推察される。また、各同値類内で状態の均等重ね合わせを行えば、それが $\mathcal{H}_{G.S.}$ を張る 4 つの基底に対応する。

⁹このように、詳細な形に依存しない幾何学的な性質は「トポロジー」と呼ばれる数学の対象である。

1.2.2 まとめ

\mathbb{Z}_2 ゲージ同値類とは、star 演算子をかけることで互いに移り合う *vortex-free* 状態の集合である。これらは互いに直交する「非自明なループ」 ℓ_1, ℓ_2 に対するウィルソンループの値で区別され、 $(w_{\ell_1}, w_{\ell_2}) = (+1, +1), (-1, +1), (+1, -1), (-1, -1)$ のどれかに対応する。この4つの \mathbb{Z}_2 ゲージ同値類内で *vortex-free* 状態の均等重ね合わせを行えば、トーリックコードの基底状態の空間 $\mathcal{H}_{G,S}$ を張る4つの基底が得られる。

1.3 励起状態

次に、トーリックコードの励起状態について考えよう。以下、励起状態を考える時はトーラスではなく平面で考えることにする。¹⁰励起状態は、基底状態の条件 (7), (8) が一部の star 演算子や plaquette 演算子に対し破れて

$$A_s |\psi\rangle = -|\psi\rangle \text{ または } B_p |\psi\rangle = -|\psi\rangle \quad (16)$$

となる時に生じる。これらはそれぞれ「電気的な」(electric) 励起、「磁気的な」(magnetic) 励起と呼ばれる励起に対応し、基底状態 $|\psi\rangle_{G,S}$ にそれぞれ以下のような「経路演算子」(path operator) を作用させることで得られる。

$$W_l^{(e)} = \prod_{j \in l} \sigma_j^z, \quad W_{l^*}^{(m)} = \prod_{j \in l^*} \sigma_j^x \quad (17)$$

ただし、 l は格子上の開曲線、 l^* は双対格子上の開曲線である。(図 10 参照。ここで、開曲線とは端点をもつ曲線のことであり、双対格子とは各面の中心に点を持つ格子のことである) 実際、 l の端点 s_1, s_2 で star 演算子と $W_l^{(e)}$ は反交換するため、 $s = s_1, s_2$ に対して以下の式が成り立つ。

$$A_s(W_l^{(e)} |\psi\rangle_{G,S}) = -W_l^{(e)} A_s |\psi\rangle_{G,S} = -W_l^{(e)} |\psi\rangle_{G,S}. \quad (18)$$

すなわち、 A_{s_1}, A_{s_2} の二つの演算子に対して $W_l^{(e)} |\psi\rangle_{G,S}$ は式 (16) の条件を満たし、確かに励起状態となる。ここで、一つの star 演算子に対して固有値が 1 から -1 に反転するごとに基底状態より $2J_e$ だけエネルギーが高くなることに注意すると、上の状況は s_1, s_2 の各点にエネルギーコスト $2J_e$ で「 e 粒子」という準粒子を励起したともみなせる。(図 10) この見方では基底状態が「真空」に対応し、経路演算子が「 e 粒子の生成演算子」に対応する。同様に、 l^* の端の面 p_1, p_2 で plaquette 演算子と $W_{l^*}^{(m)}$ は反交換するため、 $p = p_1, p_2$ に対して以下が成り立つ。

$$B_p(W_{l^*}^{(m)} |\psi\rangle_{G,S}) = -W_{l^*}^{(m)} B_p |\psi\rangle_{G,S} = -W_{l^*}^{(m)} |\psi\rangle_{G,S}. \quad (19)$$

すなわち、 B_{p_1}, B_{p_2} の二つの plaquette 演算子に対して $W_{l^*}^{(m)} |\psi\rangle_{G,S}$ は式 (16) の条件を満たし、確かに励起状態である。これは $W_{l^*}^{(m)}$ によって面 p_1, p_2 の中心にエネルギーコスト $2J_m$ で「 m 粒子」という準粒子が励起されたともみなせる。(図 10)

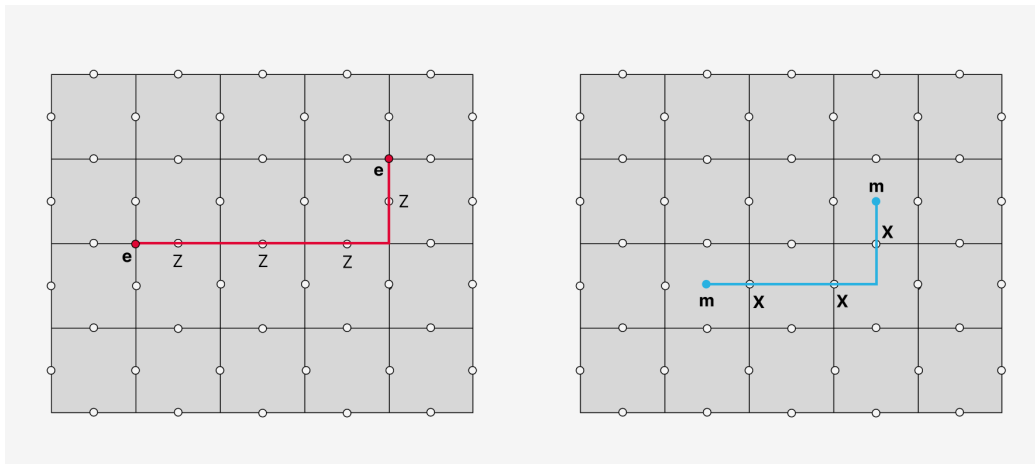


図 10: e 粒子と m 粒子。赤線は経路演算子 $W_l^{(e)}$ に対応し、青線は経路演算子 $W_{l^*}^{(m)}$ に対応する。経路演算子は両端でそれぞれ star 演算子、plaquette 演算子と反交換するため、端点に e, m 粒子が存在するとみなせる。

¹⁰ トーラスで励起を考えると面倒な点が出てくるので、簡単のために議論を平面に限定した。平面の場合、非自明なループがないので \mathbb{Z}_2 ゲージ同値類は 1 つである。よって、基底状態を一意に定めることができる。

1.4 準粒子の braiding と統計性

では次に、前節で登場した準粒子を移動させる方法を考えよう。それには経路演算子を延長または短縮すればよく、下図のように e 粒子に対しては σ^z 、 m 粒子に対しては σ^x を適切にかけていけば良い。(図 11)

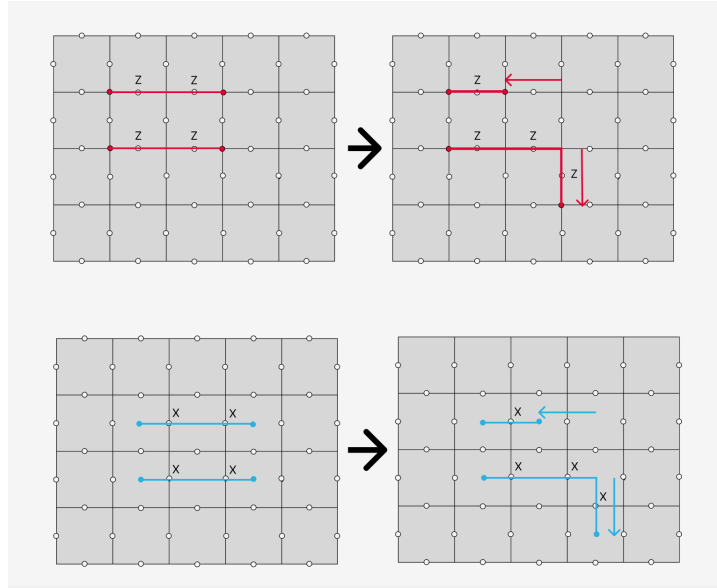


図 11: 準粒子の移動。 e 粒子に対しては σ^z 、 m 粒子に対しては σ^x をかけて経路演算子を延長または短縮する。 $(\sigma^x)^2 = (\sigma^z)^2 = 1$ なので、元々 σ^α がかかっていたスピンに対して σ^α をかけると経路演算子を短縮できる。

ここで、 m 粒子の周りに e 粒子を一周させる操作 (braiding) を考えよう。それには m 粒子を取り囲む閉曲線 l をとり、 l に沿って e 粒子の隣のスピンの σ^z を次々にかけて経路演算子を延長していけばよい。すなわち、元々 $|\xi\rangle$ の状態にある系に対して $\prod_{j \in l} \sigma_j^z$ をかければ、それが e 粒子を m 粒子の周りに一周させる操作に対応し、

$$|\xi\rangle \rightarrow \prod_{j \in l} \sigma_j^z |\xi\rangle \quad (20)$$

$$= \prod_{p \text{ inside } l} B_p |\xi\rangle \quad (21)$$

$$= -|\xi\rangle \quad (22)$$

の変化が起きる。ただし、二行目から三行目で再びストークスの定理と同様の変形をおこなった。(図 12)

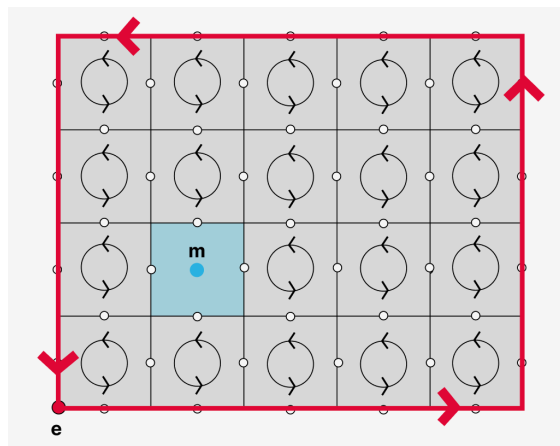


図 12: m 粒子の周りの e 粒子の一周移動 (braiding) の様子。閉曲線の周りに σ^z をかけていくことは内部の plaquette 演算子 B_p を全てかけることと等価である。 m 粒子がある面に対してのみ B_p の固有値は -1 となる。

このように、 m 粒子の周りに e 粒子を一周させると、状態は -1 倍される。ちなみに、このとき e 粒子の視点では m 粒子が自分の周りを一周していると見れるので、逆に e 粒子の周りを m 粒子が一周する場合でも状態は -1 倍される。¹¹

一方、 e 粒子同士を入れ替えることは異なる経路演算子を二つかけることに相当し、これは基底状態に対して恒等演算子をかけることと等価である。(図 13) よって e 粒子同士の入れ替えはボソンと同じ統計性を持つ。同様にして、 m 粒子同士の入れ替えもボソンと同じ統計性を持つと分かる。

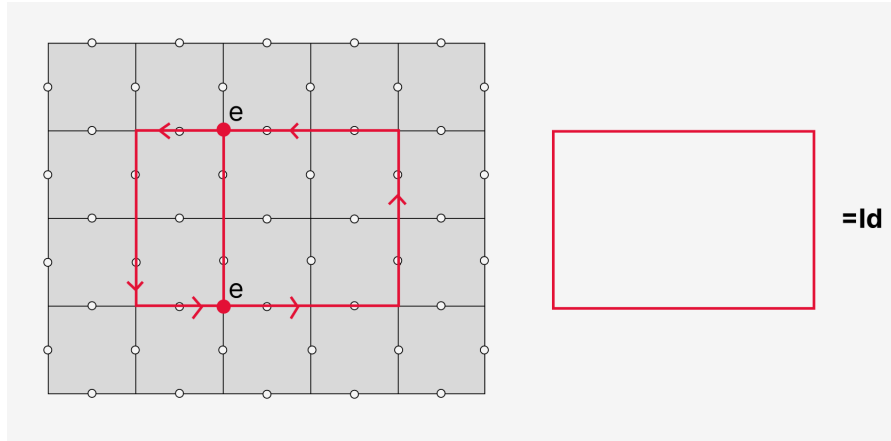


図 13: e 粒子の入れ替え。 $W_l^{(e)}$ を二つかけることで e 粒子は入れ替わるが、この二つの経路を合わせると内部を持つ閉曲線となるため、plaquette 演算子 B_p の積でかける。これは基底状態に対して恒等演算子として作用する。

以上の結果をまとめると、以下のような図式が書ける。(図 14)

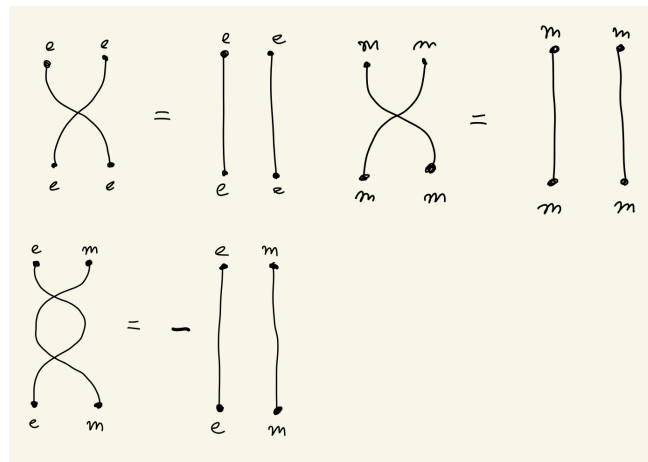


図 14: 準粒子の統計性。図式は下から上に時間発展するように読む。 e 粒子、 m 粒子の場合は位置を入れ替えても状態は変化しない一方、 e 粒子と m 粒子の入れ替えを 2 回行くと状態は -1 倍される。

このように、 e 粒子と m 粒子は単独ではボソンの統計性を示すわけだが、果たしてこれらは現実にボソンなのであろうか？もし仮に e 粒子と m 粒子がともにボソンであるとしてみよう。この時、 $|e, m\rangle \rightarrow |m, e\rangle \rightarrow |e, m\rangle$ の変化を記述する演算子は生成消滅演算子を用いて $(\hat{e}^\dagger \hat{m} \hat{m}^\dagger \hat{e}) \otimes (\hat{m}^\dagger \hat{e} \hat{e}^\dagger \hat{m})$ と書けるはずである。ただしここで e 粒子の生成消滅演算子を \hat{e}, \hat{e}^\dagger とし、 m 粒子の生成消滅演算子を \hat{m}, \hat{m}^\dagger とした。ボソンの生成消滅演算子の交換関係 $[\hat{e}, \hat{e}^\dagger] = 1, [\hat{m}, \hat{m}^\dagger] = 1$ より

$$(\hat{e}^\dagger \hat{m} \hat{m}^\dagger \hat{e}) \otimes (\hat{m}^\dagger \hat{e} \hat{e}^\dagger \hat{m}) = (\hat{e}^\dagger (\hat{m} \hat{m}^\dagger + 1) \hat{e}) \otimes (\hat{m}^\dagger (\hat{e} \hat{e}^\dagger + 1) \hat{m}) = ((\hat{m} \hat{m}^\dagger + 1) \hat{e}^\dagger \hat{e}) \otimes ((\hat{e} \hat{e}^\dagger + 1) \hat{m}^\dagger \hat{m})$$

¹¹もちろん、上述した議論と同様にして示すこともできる。

が成り立つので、

$$\begin{aligned}
 (\hat{e}^\dagger \hat{m} \hat{m}^\dagger \hat{e}) \otimes (\hat{m}^\dagger \hat{e} \hat{e}^\dagger \hat{m}) |e, m\rangle &= ((mm^\dagger + 1)e^\dagger e) \otimes ((ee^\dagger + 1)m^\dagger m) |e, m\rangle \\
 &= ((0 + 1) \cdot 1 \cdot |e\rangle) \otimes ((0 + 1) \cdot 1 \cdot |m\rangle) \\
 &= |e, m\rangle
 \end{aligned}$$

となる。実際には $|e, m\rangle \rightarrow |m, e\rangle \rightarrow |e, m\rangle$ の変化では負号が生じるはずなので、 e 粒子や m 粒子がボソンであるとは考えられないことがわかる。一般に、粒子の入れ替えで状態に ± 1 以外の位相因子 $e^{i\theta}$ がつくような例外的な統計性を示す粒子は「エニオン」と呼ばれる。 e 粒子や m 粒子自身は単独ではボソンの統計性を示すのだが、上述のように例外的な相互統計性を示すため、エニオンと考えることが多い。¹²

最後に、 e 粒子と m 粒子の複合粒子 $\epsilon = e - m$ の統計性を確認しておく。図式を使うことで、以下の通り ϵ はフェルミオンであることがわかる。(図 15)

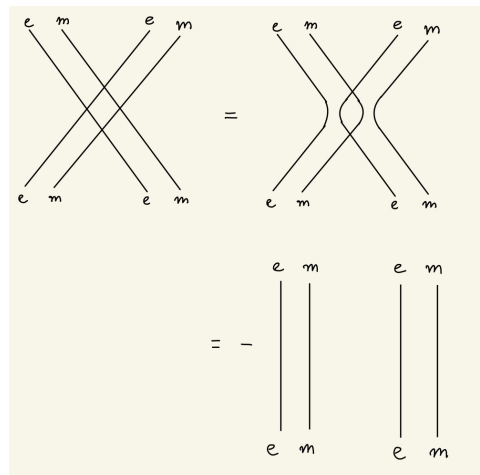


図 15: 複合粒子 $\epsilon = e - m$ の統計性。一行目で e 粒子同士、 m 粒子同士の統計性、二行目で e 粒子と m 粒子の相互統計の性質を用いた。

1.3 励起状態/1.4 準粒子の braiding と統計性 要約

格子上的開曲線 l に沿って σ^z をかけていくと、両端の頂点に e 粒子という準粒子が励起される。また、双対格子上的開曲線 l^* に沿って σ^x をかけていくと、両端の面の中心に m 粒子という準粒子が励起される。 e 粒子と m 粒子は単独ではボソンの統計性を示すが、互いに他を一周すると -1 の位相因子を獲得する、という例外的な相互統計性を示す。また、複合粒子 $\epsilon = e - m$ はフェルミオンの統計性を示す。

¹² m 粒子の周りを e 粒子が一周すると状態が -1 倍されるという状況は、中心が磁束に貫かれた円周上に荷電粒子が存在する系の量子力学を考えることと酷似している。

1.5 準粒子の fusion と superselection sector

前節では準粒子の入れ替えを考えたが、今度は経路演算子を短縮 (または延長) し続けて e 粒子同士や m 粒子同士を衝突させると何が起こるかを考えてみよう。すると、経路演算子は消滅し、単に基底状態が得られることがわかる。準粒子的な見方でいえば、「対消滅」が起きて「真空」が得られるわけである。このことを

$$e \times e = 1, \quad m \times m = 1 \quad (23)$$

と表現する。すなわち、 e 粒子 2 つや m 粒子 2 つの状態は経路演算子をかけて励起を衝突させることで真空 1 と互いに移りあうことができる。(図 16) 逆に言えば e 粒子や m 粒子は常に対になって生成、消滅するので、それぞれの偶奇は保存する。そのため、平面¹³のトーリックコードには $1, e, m, \epsilon$ という本質的に異なる 4 種類の状態 (super selection sector)¹⁴があると分かる。

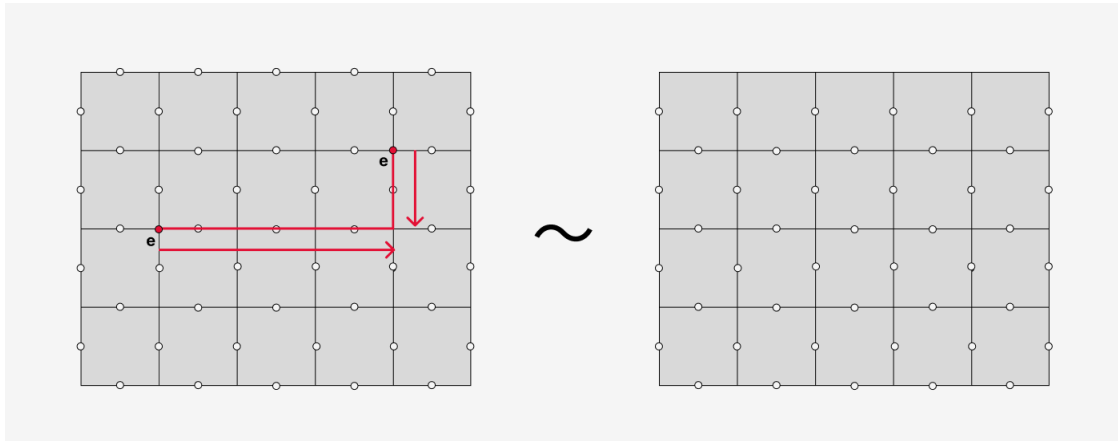


図 16: e 粒子同士の衝突。 σ^z を経路にそってかけていくことで、トーリックコードの基底状態が得られる。

また、複合粒子 ϵ のことを e 粒子と m 粒子の衝突で生じた新粒子と捉えることもできる。前述の議論と合わせれば、粒子同士の完全な合成則 (fusion rule) は以下ようになる。

$$\begin{aligned} e \times e &= 1, & m \times m &= 1, & \epsilon \times \epsilon &= 1 \\ e \times m &= \epsilon, & m \times \epsilon &= e, & \epsilon \times e &= m \end{aligned}$$

前節で登場した統計性 (braiding rule) や本節で議論した合成則 (fusion rule) はエニオンの最も基本的な性質である。トーリックコードの場合、このように割と単純なので議論する恩恵を特に感じないかもしれないが、場合によってはエニオンの fusion で量子計算ができることもある。そのような場合、fusion rule は重要である。

¹³ トーラスの場合、多少事情は異なる。例えば拘束条件 (7)(8) があるため単独の e 粒子、 m 粒子が存在することはない。

¹⁴ 異なる superselection sector に属する状態の重ね合わせはできない。その意味で、状態は sector に分割される。

1.6 実験結果

ここまでの話だけだと、トーリックコードは机上の空論のような模型だと感じるかもしれない。しかし、近年の実験技術の進歩の結果、前述した準粒子の統計性等は現実に実験で確認されるようになった。実際、2021年4月に google のチームが 31 個の超伝導量子ビットを用いてトーリックコードの基底状態を実現し、その上で準粒子の braiding を行なった。その結果、 e 粒子や m 粒子はボソンの統計性を示す一方、複合粒子 ϵ はフェルミオンの統計性を示すことが確認された。(図 17) また、「トポジカルエンタングルメントエントロピー」¹⁵ と呼ばれる量を測定することで、トーリックコードの基底状態が確かにトポジカル秩序相¹⁶を示すという証拠が得られた [4]。

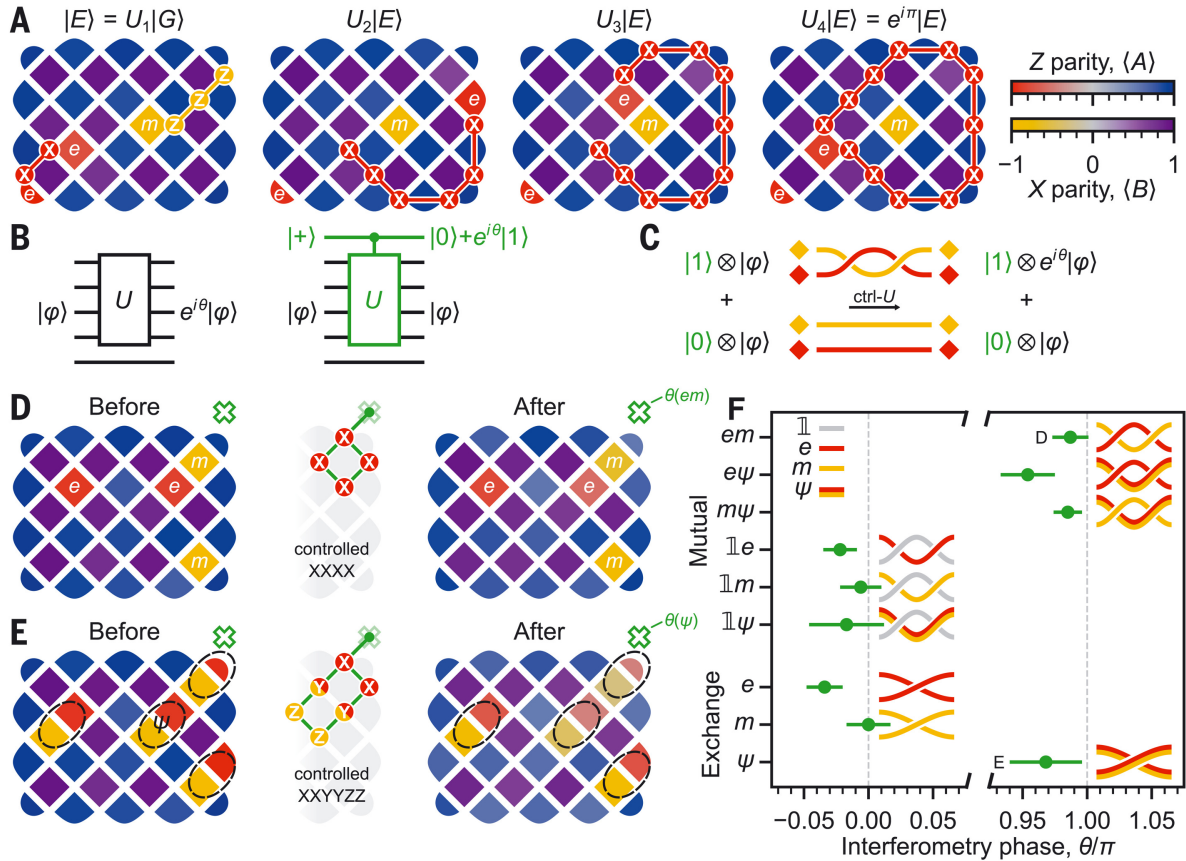


図 17: トーリックコードに出現する準粒子の統計性に関する実験。まず、基底状態が *vortex-free* なスピン配置の均等重ね合わせで得られることを利用して、初期状態 $|\uparrow\uparrow\dots\uparrow\rangle$ から CNOT ゲートを計画的にかけていくことでトーリックコードの基底状態が用意された。その後、 σ^x, σ^z 演算子をかけることで準粒子が生成、braiding され、操作後の状態についての位相が干渉計で測定された。ただし、実際には $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ の状態に用意された余分な量子ビット (ancilla qubit) と系との control-U 操作 (U は braiding を行う量子ゲート) を行うことで、U によって系に生じた位相因子を ancilla qubit の位相変化に押しつけており、干渉計の測定は ancilla qubit に対して行われた。(図 B) 位相因子の測定結果は、右下の図 F に示されている。 e 粒子や m 粒子の braiding では位相は変化しないものの、複合粒子 ϵ (図 F では ψ) の場合は位相 π が獲得されることが見てとれる。図は [4] から引用した。

このように、トーリックコードの基底状態は実験的に実現することができるようになってきており、後述するような量子計算への応用が期待されている。

¹⁵系を A,B,C の三つに分割した時にエンタングルメントエントロピーを用いて $S_{topo} = S_A + S_B + S_C - S_{AB} - S_{BC} - S_{CA} + S_{ABC}$ で定義される量である。これは分割の方法によらない「トポジカルな」量であることが知られている [5]。詳細な説明は付録 B を参照。

¹⁶トポジカル秩序相の詳細な説明は付録 B を参照。

2 量子情報とトーリックコード

ここからは少し趣向を変え、トーリックコードを量子情報の観点から眺めることにする。まず、star 演算子や plaquette 演算子、経路演算子などの概念を量子情報の言葉で捉え直す。また、「局所的な摂動に対する頑強性」というトーリックコードの最も重要な性質について述べ、誤り訂正の方法についても触れる。

2.1 stabilizer 形式

はじめに、以降の議論に必要となる概念を整備しておこう。まず、Pauli 群 \mathcal{P}_n というものを導入する。これは恒等演算子 I と Pauli 行列 X, Y, Z ¹⁷の中から重複を許して n 個選んでテンソル積をとり、係数として $\{\pm 1, \pm i\}$ を許した演算子全体のなす群¹⁸のことである。

$$\mathcal{P}_n \equiv \{\pm 1, \pm i\} \times \{I, X, Y, Z\}^{\otimes n} \quad (24)$$

また、 \mathcal{P}_n の部分群¹⁹ \mathcal{S}_n であって、 $-I \notin \mathcal{S}_n$ かつ任意の $S_i, S_j \in \mathcal{S}_n$ に対して

$$[S_i, S_j] = 0 \quad (25)$$

を満たすものを stabilizer 群と呼び、その要素を stabilizer 演算子と呼ぶ。Pauli 群の元は二乗すると I または $-I$ となるため、 $-I \notin \mathcal{S}_n$ の条件から $S_i^2 = I$ である。よって、 S_i の固有値は ± 1 のいずれかとなる。²⁰そこで、特に全ての $S_i \in \mathcal{S}_n$ に対して固有値が 1 となる状態、すなわち

$$S_i |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \quad (26)$$

となる状態 $|\Psi\rangle$ を stabilizer 状態と呼び、stabilizer 状態のなす空間を stabilizer 空間と呼ぶ。この stabilizer 空間に量子情報を符号化する手法は、stabilizer 形式と呼ばれる。このような形式を導入したのは、スピン $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ などのテンソル積で量子状態を表すよりも、演算子で量子状態を記述の方が簡便であるためである。²¹以上の用語を踏まえて再びトーリックコードを眺めると、式 (3)(4)(5)(6) より star 演算子や plaquette 演算子はいずれも stabilizer 群の要素となっており、基底状態の空間 $\mathcal{H}_{G.S.}$ は stabilizer 空間になっていることがわかるであろう。

2.2 論理量子ビットと論理演算子

2.2.1 論理量子ビット、論理演算子

次に、論理量子ビットと論理演算子という概念を説明する。そもそも、量子計算では適当な状態 $|0\rangle, |1\rangle$ を用いて記述される以下の状態 $|\Psi\rangle$ の振幅 α, β に情報を記録するのであった。これは古典計算の「ビット」に相当し、「量子ビット」と呼ばれる。

$$|\Psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (27)$$

$|0\rangle, |1\rangle$ にはスピンの $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ がしばしば用いられるが、これでは外部磁場等で簡単に別の状態になってしまう。

$$|\Psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \rightarrow \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle \quad (28)$$

$$|\Psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \rightarrow \alpha |0\rangle - \beta |1\rangle \quad (29)$$

前者はビット反転エラー、後者は位相反転エラーと呼ばれる。そこで、いくつかの量子ビットを組み合わせるなどして作った別の状態 $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle$ を新たに量子ビットの $|0\rangle, |1\rangle$ として定義することを考える。このようにすれば、エラーが生じにくくなったり、エラー訂正が容易になったりするなどのメリットが生じる。 $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle$ はしばしば $|0\rangle_L, |1\rangle_L$ と書かれ、論理量子ビットと呼ばれる。これは物理系の単一の量子ビット (物理的量子ビット) の状態 $|0\rangle, |1\rangle$ とは必ずしも一致しないことに注意しよう。また、 $|0\rangle_L, |1\rangle_L$ に対して Pauli 行列 X, Z と同等の作用をする演算子を論理演算子と呼び、 X_L, Z_L などと表記する。すなわち、 $X_L |0\rangle_L = |1\rangle_L, Z_L |1\rangle_L = -|1\rangle_L$ などが成り立つ。この場合もまた、論理演算子は σ^x や σ^z などとは必ずしも一致しないことに注意しよう。

¹⁷量子情報の文脈では、 $\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$ の代わりに X, Y, Z を用いることが多い。

¹⁸群とは、以下のような条件を満たす演算 $*$ が定まった集合 G のことである。i) 単位元 e が存在する： $\forall x \in G \ e * x = x * e = x$ ii) 任意の元 x に対して逆元が存在する： $\exists x^{-1} \ s.t. \ x^{-1} * x = x * x^{-1} = e$ iii) 結合法則が成り立つ： $\forall x, y, z \in G \ (x * y) * z = x * (y * z)$

¹⁹群の部分集合であって、それ自身も群になっているものを部分群という。

²⁰ $-I \notin \mathcal{S}_n$ という条件をつけることで、係数に i が入らないようにしている。つまり、エルミートな演算子を考えている。

²¹単に記述が簡単になるというだけでなく、シミュレーションを効率的に行うことができるなどの利点もある。

2.2.2 stabilizer 形式の論理量子ビットと論理演算子

では、stabilizer 形式の考え方を使得論理量子ビットや論理演算子を構成する方法を一般的に考えてみよう。まず、stabilizer 群 S_n の任意の演算子と交換する Pauli 行列のテンソル積 \hat{O}_1, \hat{O}_2 であって、 S_n には属さないものがあるとす。stabilizer 群の任意の演算子と交換することから、 \hat{O}_1 や \hat{O}_2 は stabilizer 空間 \mathcal{L} を保つ。すなわち、 \hat{O}_1 や \hat{O}_2 の作用後の状態は再び \mathcal{L} の元になる。実際、任意の $S_i \in S_n$ と $|\psi\rangle \in \mathcal{L}$ に対して

$$S_i(\hat{O}_1 |\psi\rangle) = \hat{O}_1(S_i |\psi\rangle) = \hat{O}_1 |\psi\rangle$$

となるため、 $\hat{O}_1 |\psi\rangle \in \mathcal{L}$ となる。また、Pauli 行列の 2 乗は I になるため $\hat{O}_1, \hat{O}_2 \notin S_n$ の固有値は ± 1 であり、 \mathcal{L} は \hat{O}_1, \hat{O}_2 の固有値に応じて部分空間に分割することができる。²² 上述の性質に加え、 \hat{O}_1, \hat{O}_2 がさらに

$$\hat{O}_1 \hat{O}_2 = -\hat{O}_2 \hat{O}_1 \quad (30)$$

を満たすとす。この時、 $|0\rangle_L$ を \hat{O}_1 の固有値 $+1$ の固有状態、 $|1\rangle_L$ を \hat{O}_1 の固有値 -1 の固有状態とすれば

$$\begin{aligned} \hat{O}_1(\hat{O}_2 |0\rangle_L) &= -\hat{O}_2(\hat{O}_1 |0\rangle_L) = -\hat{O}_2 |0\rangle_L \\ \hat{O}_1(\hat{O}_2 |1\rangle_L) &= -\hat{O}_2(\hat{O}_1 |1\rangle_L) = \hat{O}_2 |1\rangle_L \end{aligned}$$

なので、 $\hat{O}_2 |0\rangle_L = |1\rangle_L, \hat{O}_2 |1\rangle_L = |0\rangle_L$ などが成り立つ。よって $\hat{O}_1 = Z_L, \hat{O}_2 = X_L$ と定めればよいということがわかる。すなわち、「互いに反交換する二つの Pauli 行列のテンソル積であって stabilizer 群の要素ではなく、なおかつ stabilizer 群の任意の要素と交換するもの」を見つければ、それが論理演算子 Z_L, X_L のペアとなる。

2.2.3 トーリックコードの論理量子ビットと論理演算子

では、トーリックコードの論理演算子がどのようなものになるかを具体的に考えてみよう。実は、これは下図のように互いに直交するトーラスの 2 種類の「非自明なループ」の一方に沿って X 、もう一方のループに沿って Z をかけた経路演算子のペアに取れば良い。(図 18) 実際、この二つの経路演算子は一点のみで交わり、その点で Z, X が反交換するため全体としても反交換する。また、両演算子ともに端点がないので star 演算子や plaquette 演算子といった stabilizer 演算子と交換する。さらに、経路演算子自身は stabilizer 群には含まれない。よって、上述した stabilizer 形式における論理演算子の条件を確かに満たしている。

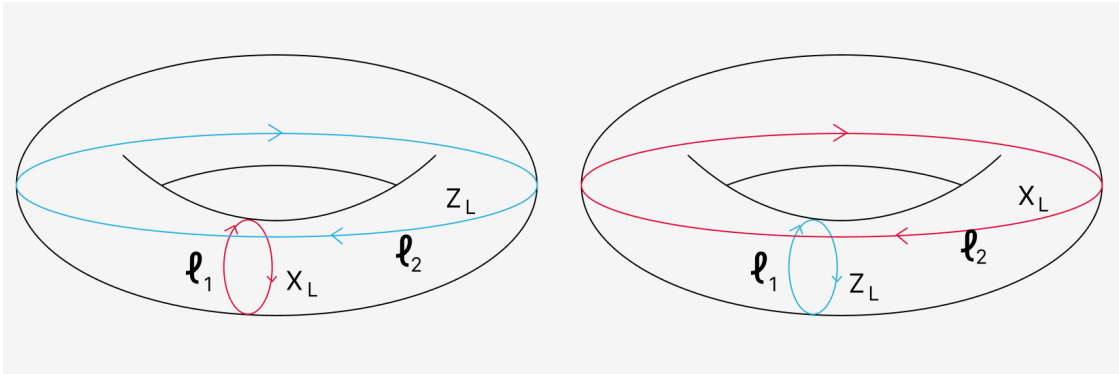


図 18: トーラスの二つの「非自明なループ」に沿った経路演算子。トーラスの非自明なループ l_1 に沿って X 、 l_2 に沿って Z をかける場合(左)と、 l_1 に沿って Z 、 l_2 に沿って X をかける場合(右)の二つが考えられ、これら 4 つはみな論理演算子となる。以下、 l_1 に沿って Z, X をかける経路演算子をそれぞれ Z_{L_1}, X_{L_1} 、 l_2 に沿って Z, X をかける経路演算子をそれぞれ Z_{L_2}, X_{L_2} と呼ぶことにす。

では、論理量子ビットはどうであろうか。2.2.2 での議論に従えば、stabilizer 空間は上図の Z_{L_1}, Z_{L_2} の固有値 ± 1 に応じて 4 つに分割できる。すなわち、 \mathcal{L} の基底は $|0\rangle_{L_1} \otimes |0\rangle_{L_2}, |0\rangle_{L_1} \otimes |1\rangle_{L_2}, |1\rangle_{L_1} \otimes |0\rangle_{L_2}, |1\rangle_{L_1} \otimes |1\rangle_{L_2}$ と書け、 $(|0\rangle_{L_1}, |1\rangle_{L_1})$ と $(|0\rangle_{L_2}, |1\rangle_{L_2})$ の二組の論理量子ビットがあることになる。

²²stabilizer 空間の次元の計算方法を思い出そう。例えば、 \hat{O}_1 の固有値が $+1$ という条件を課すと全体の空間は半分分割される。 $\hat{O}_1, \hat{O}_2 \in S_n$ の場合は \mathcal{L} の任意の元に対して固有値が 1 となってしまう、「分割」はできないことに注意。

2.1 stabilizer 形式/2.2 論理量子ビットと論理演算子 要約

トーリックコードは stabilizer 形式で記述でき、連続的な変形で一点に縮められない「非自明なループ」に沿った経路演算子が論理演算子になる。また、種数が1のトーラスでは2組の論理量子ビットが存在する。

2.3 物理的解釈と局所摂動に対する頑強性

上述した論理量子ビットが具体的にどのような状態になっているのかを考えてみよう。まず、論理量子ビットが埋め込まれている stabilizer 空間は物理的に言えば、トーリックコードの基底状態の空間 $\mathcal{H}_{G.S.}$ になのであった。また、1.2.2 の議論によれば、 $\mathcal{H}_{G.S.}$ を張る4つの基底はトーラスの「非自明なループ」 l_1, l_2 に対するウィルソンループ w_{l_1}, w_{l_2} の値で特徴づけられる \mathbb{Z}_2 ゲージ同値類において均等重ね合わせをした状態なのであった。ここで、式(14)を思い出すと、 w_{l_1}, w_{l_2} は論理演算子 Z_L の固有値に他ならないことに気が付く。つまり、 $|0\rangle_{L_1} \otimes |0\rangle_{L_2}, |0\rangle_{L_1} \otimes |1\rangle_{L_2}, |1\rangle_{L_1} \otimes |0\rangle_{L_2}, |1\rangle_{L_1} \otimes |1\rangle_{L_2}$ は4つの \mathbb{Z}_2 ゲージ同値類から均等重ね合わせを行って得られた状態のどれかである。このように考えれば、論理量子ビットをより解像度よくイメージできるであろう。

また、準粒子的な見方をすれば、論理演算子は「真空から準粒子のペアを生成し、トーラスの非自明なループを1周させるように移動させ、最終的に衝突させて対消滅させる」という過程に対応することがわかる。このような過程を実現するためには局所的に X や Z をかけて準粒子を移動させるだけでは足りず、トーラスを一周するほどの広い領域にわたって連続して X や Z をかけなければならない。この確率 P はシステムサイズ L と一つのスピンの摂動 X や Z がかかる確率 p を用いて大まかに $P \sim p^L$ と表されるため、 L が十分に大きく p が十分小さければ、局所的に磁場をかけても論理量子ビットに対するビット反転エラーや位相反転エラー²³

$$X_L(\alpha|0\rangle_L + \beta|1\rangle_L) = \beta|0\rangle_L + \alpha|1\rangle_L \quad (\text{ビット反転エラー})$$

$$Z_L(\alpha|0\rangle_L + \beta|1\rangle_L) = \alpha|0\rangle_L - \beta|1\rangle_L \quad (\text{位相反転エラー})$$

が起きる確率は非常に小さい。(図19) このような「局所摂動に対する頑強性」は「トポロジカル秩序相」のもつ貴重な性質であり、わざわざトーリックコードに量子情報を符号化する理由はここにある。

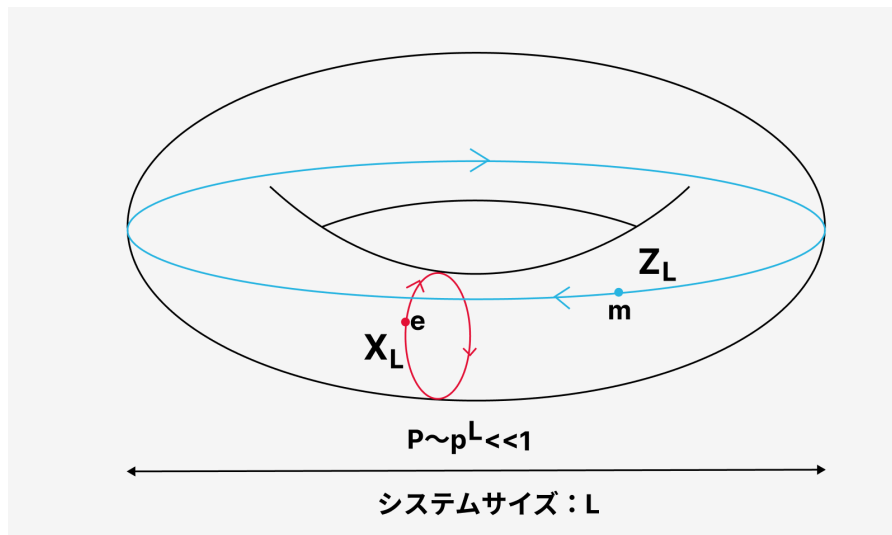


図 19: トーリックコードの局所摂動に対する頑強性。基底状態に符号化した情報 $\alpha|0\rangle_L + \beta|1\rangle_L$ が外部摂動で書き換えられることは「 e, m 粒子が生成してトーラスを一周し、元に戻って消滅する」過程に対応する。このようなことが生じる確率 P はシステムサイズ L に対して $P \sim p^L$ と指数関数的に小さくなる。

²³量子状態に対するエラーとしては、この二種類を考えれば十分であることが知られている。

2.4 誤り訂正

前節でトーリックコードに符号化した量子情報が外部磁場などの局所的な摂動の影響を受けにくい、と述べたが、このことの意味をもう少しはっきりさせておこう。まず、これは「基底状態が局所的な摂動の元で安定である」という意味ではないことに注意しよう。実際、たとえば x 方向の局所磁場があると、基底状態に局所的に X が作用することでいくつかの plaquette 演算子の固有値が -1 となり簡単に励起状態へと遷移してしまう。(図 20)

そうではなく、i) 局所摂動による基底状態から励起状態への遷移は比較的容易に起きるが検知と訂正が可能であり、ii) 局所摂動による基底状態内での遷移 (つまり論理量子ビットに対する論理演算) は検知不可能だがほぼ起こらない、ということである。ii) については前節で説明したので、図 20 の場合を例として i) について説明しよう。

まず、励起状態への遷移の検知は簡単である: plaquette 演算子を測定して -1 が含まれるかどうか調べれば良い。一方、plaquette 演算子の固有値の情報から具体的にどのスピンの X がかったのかを一意に定めることは出来ないため、エラー訂正はやや非自明である。ここで、式 (15) の議論と同様に、連続的に一点に縮められる「自明なループ」にそった経路演算子 $W_{\text{loop}}^{(m)}$ はトーリックコードの基底状態に対して恒等演算子となることに注目する。

$$W_{\text{loop}}^{(m)} = \prod_{s \text{ inside loop}} A_s = I_d \quad (31)$$

ただし、式 (7) より基底状態に対して star 演算子は恒等演算子になることに注意しよう。この式から、仮に本来 X がかかっていないスピンに対してエラー訂正で X かけてしまったとしても、実際に摂動でかかった X と合わせた時に「自明なループ」に沿った経路演算子となれば、元の状態が復元されると分かる。言い換えれば、外部磁場の作用でいくつかの経路演算子 (エラー鎖) が基底状態に作用し、励起状態 $\prod_l W_l^{(E)} (\alpha |0\rangle_L + \beta |1\rangle_L)$ へと遷移が起きてしまったとしても、 e 粒子 (別の言い方では *vortex*) を結ぶ経路演算子 $\prod_{l'} W_{l'}^{(EC)}$ (エラー訂正鎖) をかけることで元の状態が復元できる。(図 21)

$$\prod_{l'_n} W_{l'_n}^{(EC)} \left(\prod_{l_n} W_{l_n}^{(E)} (\alpha |0\rangle_L + \beta |1\rangle_L) \right) = I_d \cdot (\alpha |0\rangle_L + \beta |1\rangle_L) = \alpha |0\rangle_L + \beta |1\rangle_L \quad (l_n + l'_n \text{ は「自明なループ」}) \quad (32)$$

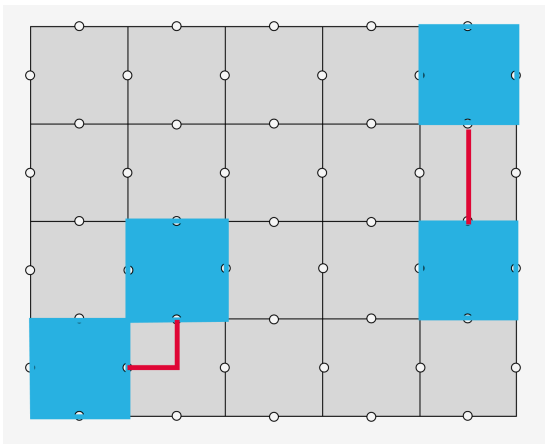


図 20: 局所磁場による基底状態の変化。スピンの X がかかることで周辺の青の面の plaquette 演算子の固有値が -1 に反転してしまっている。これは青の面に m 粒子、または *vortex* ができたと言っても同じことである。あるいは、双対格子上的経路演算子 $W_l^{(m)}$ が作用して励起状態に遷移したとも言える。この経路演算子 $W_l^{(m)}$ は「エラー鎖」と呼ばれ、図では赤線で示されている。

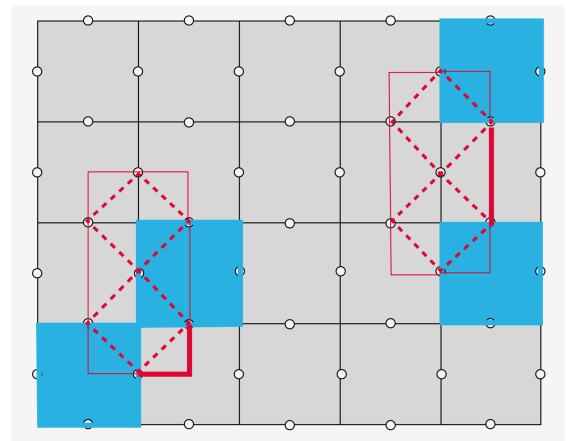


図 21: トーリックコードにおけるエラー訂正。摂動でかかったエラー鎖 $W_{l_n}^{(E)}$ (赤太線) とエラー訂正でかけた経路演算子 $W_{l'_n}^{(EC)}$ (赤細線) を合わせた経路 $l_n + l'_n$ が連続変形で一点に縮められる「自明なループ」となれば、エラーが起こる前の基底状態が復元される。赤点線は「自明なループ」の内部に存在する star 演算子である。

ところが、エラー訂正鎖とエラー鎖が全体として連続変形で一点に縮められない「非自明なループ」となってしまうと、恒等演算子の代わりに論理演算子ができてしまう。この場合、ビット反転エラーが生じ、訂正は失敗する。

$$W_l^{(EC)} W_l^{(E)} (\alpha |0\rangle_L + \beta |1\rangle_L) = X_L \cdot (\alpha |0\rangle_L + \beta |1\rangle_L) = \beta |0\rangle_L + \alpha |1\rangle_L \quad (l+l' \text{は「非自明なループ」}) \quad (33)$$

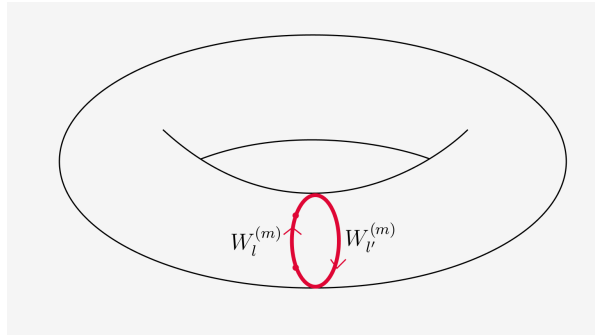


図 22: エラー訂正の失敗。エラー鎖とエラー訂正鎖が全体で連続変形で一点に縮められない「非自明なループ」となると、論理演算子が作用してしまい元の状態とは異なる状態が得られてしまう。

一つ一つのスピンの対して摂動が作用する確率 p がごく小さければこのような失敗はほとんど起きないものの、 p が大きくなって e 粒子 (または *vortex*) が増えると、励起の結び方によってはエラー訂正が失敗する場合も出てくる。(図 23) そこで、誤り訂正でかける経路演算子の選び方は工夫する必要がある。

一つの考え方としては、なるべくエラー訂正鎖を実際のエラー鎖と一致させれば良い、というものがある。つまり各スピンに摂動がかかる確率 p が一定であると考え、plaquette 演算子の測定で判明した e 粒子 (*vortex*) の配置を実現するエラー鎖として最も確率の高いものを求める。これは実際に生じたエラーに最も似通っていると考えられるため、比較的高い確率で訂正が成功することが想定される。このようなエラー鎖の経路を求めるには minimum-weight-perfect match algorithm(MWPMA) という古典アルゴリズムを用いれば良いことが知られており [6]、他にも種々の工夫がなされているようである。

また、エラー訂正の成功/失敗はある種のイジング模型と対応づけて議論することができるため、相転移と同様の現象が生じることが知られている [6]。具体的には、転移点に対応するある閾値 p_c が存在し、 $p < p_c$ となると誤り訂正の失敗率が系のサイズ L に対して指数関数的に減少する。(図 24) そのため、実際に物理的な実装を行うにあたってこの閾値 p_c 以下のノイズを実現することは一つの重要な課題となる。

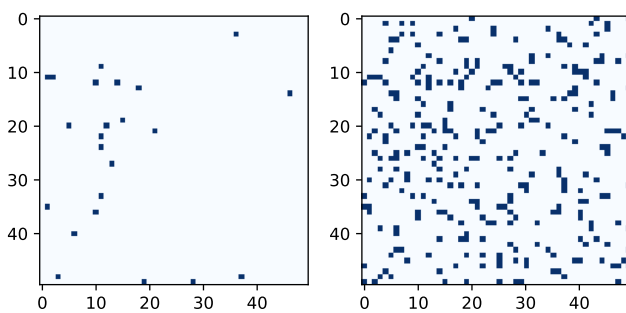


図 23: 異なるエラー確率 p の元での e 粒子 (または *vortex*) の配置。左は $p = 0.01$ の場合に対応し、右は $p = 0.10$ の場合に対応する。 p が大きくなると e 粒子を結ぶ際に間違っ論理演算子ができやすくなることや、訂正の成功/失敗が Ising 模型と対応づけられることが想像できるであろう。

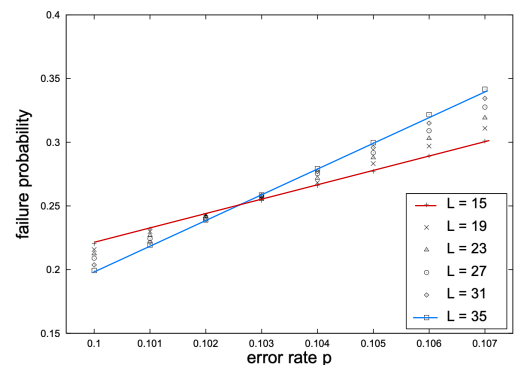


図 24: MWPMA を用いて誤り訂正を行う場合の物理的量子ビットに対するエラー確率 p と訂正失敗率の関係。閾値 $p_c = 0.10330 \pm 0.00002$ より低い p では、系のサイズ L が大きくなればなるほど訂正失敗率が小さくなっている。図は [7] から引用した。

第II部

ハニカムコード

ハニカム格子模型はトーリックコードと同じく A.Kitaev によって提唱された模型である。この模型は六角格子の頂点に配置されたスピン 1/2 の粒子が方向によって異なる形の相互作用を持ち、「量子スピン液体」を実現する模型として長らく物性物理の文脈で興味をもたれてきた。一方、比較的最近になって、この模型のハミルトニアンの各項を周期的に測定することで量子情報の符号化や誤り訂正を行う「ハニカムコード」と呼ばれる手法が提案された。そこで本稿では、まず背景となる物性物理の文脈でハニカム格子模型を紹介し、厳密解の方法や相図について紹介する。その後、関連する話題として量子情報の文脈でハニカムコードを紹介する。最後に、この二つの話題の共通点や相違点について簡単に紹介する。

3 ハニカム格子模型

3.1 モデル

下図のような六角格子の頂点にスピン 1/2 の粒子を配置する。各辺は結合の方向に応じて”x-link”, ”y-link”, ”z-link”の三種類に分けられる。議論をわかりやすくするために格子内の各頂点に番号をつけ、偶数が割り振られた「偶格子」(白丸)と奇数が割り振られた「奇格子」(黒丸)を定義する。(図 25) ひとまず境界条件には特に注意を払わず、十分に広い平面で議論することにする。

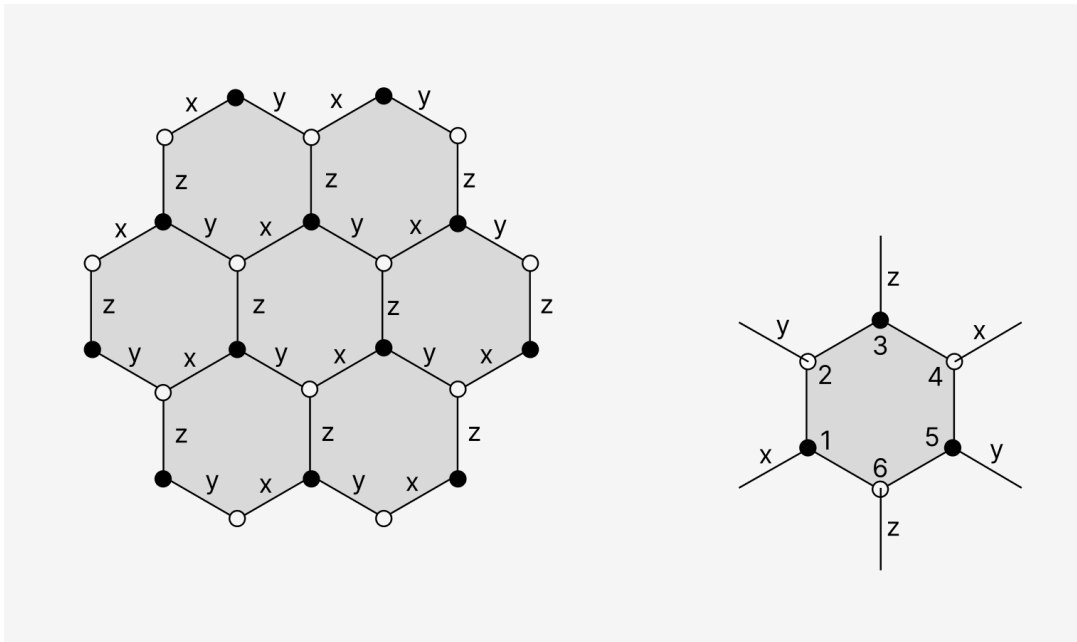


図 25: ハニカム格子模型のセットアップ。スピン粒子が六角格子の頂点に配置されている。格子は偶格子(白丸)と奇格子(黒丸)に分けられ、辺は方向に応じてそれぞれ”x-link”, ”y-link”, ”z-link”と呼ばれる。

この系において、以下のようなハミルトニアンを考える。

$$H = -J_x \sum_{x\text{-link}} \sigma_i^x \sigma_j^x - J_y \sum_{y\text{-link}} \sigma_i^y \sigma_j^y - J_z \sum_{z\text{-link}} \sigma_i^z \sigma_j^z \quad (34)$$

これがハニカム格子模型である。 J_α が正のとき、 α -link で結ばれたスピン同士は α 方向に向きを揃えようとするが、この模型の場合どの点においても x, y, z -link が 1 つずつ存在する。そのため各スピンはどちらの方向を向いて良いのかわからず、いわゆる「磁性体のフラストレーション」が生じている。

3.2 厳密解の導出法

3.2.1 スピン形式におけるヒルベルト空間の分割： \mathcal{L}_w

では、模型を具体的に解いていこう。まず、plaquette 演算子と呼ばれる以下の演算子 W_p を定義する。

$$W_p = \sigma_1^x \sigma_2^y \sigma_3^z \sigma_4^x \sigma_5^y \sigma_6^z \quad (35)$$

そして、 W_p に対して以下の式が成り立つことに注目する。

$$[W_{p1}, W_{p2}] = 0 \quad (36)$$

$$W_p^2 = 1 \quad (37)$$

$$[H, W_p] = 0 \quad (38)$$

すなわち、異なる面に対する plaquette 演算子同士は交換し、それらの固有値は ± 1 のどちらかで保存する。よって各面の plaquette 演算子の固有値が ± 1 のどちらをとるかに応じて 2^N 通り (N は六角形の面の数) の場合が考えられ、ヒルベルト空間を 2^N 個の部分空間に分割することができる。

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{w_1 w_2 \dots w_N} \mathcal{L}_{w_1 w_2 \dots w_N} \quad (39)$$

ただし、上式において各 w_i は ± 1 の値をとるラベルであり、必要に応じて全体のラベル $w_1 w_2 \dots w_N$ を省略して単に w と書く。たとえば、全ての plaquette 演算子の固有値が 1 となるような状態の空間は $\mathcal{L}_{(1,1,\dots,1)}$ などと表記する。こうすることで、各 \mathcal{L}_w に制限されたハミルトニアンを考えれば良いことになる。六角格子の面一つあたりにスピンは 2 つある一方、 W_p の固有値の条件は各面に 1 つなので、 $\dim \mathcal{L}_w > 1$ となることに注意しよう。

3.2.2 Majorana 演算子によるハミルトニアンの書き換え

次に、Majorana 演算子と呼ばれる道具を導入する。これはフェルミオンの生成消滅演算子 a_j, a_j^\dagger を用いて

$$c_{2j-1} = a_j + a_j^\dagger \quad (40)$$

$$c_{2j} = \frac{a_j - a_j^\dagger}{i} \quad (41)$$

で定義される。²⁴ N 体のフェルミオン系に対応する Majorana 演算子は $2N$ 個であり、以下の式が成立する。

$$c_i^\dagger = c_i, \quad \{c_j, c_k\} = 2\delta_{jk} \quad (42)$$

つまり、Majorana 演算子によって生成される粒子は反粒子が自分自身に等しいようなフェルミオンである。²⁵ここで、各スピンに対して上記の Majorana 演算子を独立に 4 つ用意し、各頂点での 2 次元のヒルベルト空間 \mathcal{M} を 4 次元のヒルベルト空間 $\tilde{\mathcal{M}}$ に拡張することを考える。²⁶(図 26) このような方法で次元を増やして考えた空間のことを「拡大ヒルベルト空間」と呼ぶことにする。そして、以下のような条件 (ゲージ固定条件²⁷) を追加し、スピン演算子の書き換えを行う。

$$\tilde{\sigma}^\alpha = ib^\alpha c \quad (\alpha = x, y, z) \quad (43)$$

$$D|\psi\rangle \equiv b^x b^y b^z c|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad (\text{ゲージ固定条件}) \quad (44)$$

つまり、一度余分な Majorana 演算子を導入してヒルベルト空間の次元を 2 から 4 に拡張するのだが、ゲージ固定条件の式 (44) によって次元を再び 2 に戻すというわけである。²⁸

²⁴定義式の形が複素数の実部と虚部をとる操作に対応していることに気づくであろう。

²⁵あるいは、フェルミオンとその反粒子を重ね合わせた状態と言っても良い

²⁶4 つの Majorana 演算子は 2 つのフェルミオンの生成演算子に対応するため、ヒルベルト空間の次元は 4 次元となる。

²⁷「ゲージ固定条件」という名前の由来は D が \mathbb{Z}_2 ゲージ変換を生成することからきている。

²⁸ $D^2 = 1$ であるため、 D の固有値が ± 1 のどちらかであることに注意しよう。固有値を $+1$ に制限することで、次元を半分になっている。

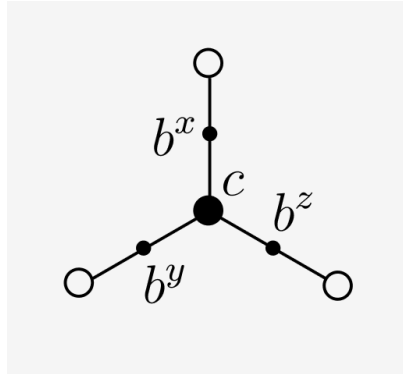


図 26: Majorana 演算子の導入。各スピンに対して頂点に対応する c という Majorana 演算子と、辺に対応する $b^\alpha (\alpha = x, y, z)$ という Majorana 演算子を導入する。こうすることで、 $D = b^x b^y b^z c = 1$ というゲージ固定条件のもとでスピン演算子を $\sigma^\alpha = i b^\alpha c$ と書きかえることができる。

これが実際にスピンの書き換えになっていることを確かめるには、i) 「スピン演算子が \mathcal{M} を保つこと」および ii) 「スピン演算子が \mathcal{M} 内でスピンの演算子の要件を満たしていること」、の二つの条件を確認する必要がある。まず、i) 「スピン演算子が \mathcal{M} を保つこと」は

$$[D, \tilde{\sigma}^\alpha] = 0 \quad (45)$$

からわかる。なぜなら、スピン演算子をかける前に $|\psi\rangle \in \mathcal{M}$ であったのなら

$$D(\sigma^\alpha |\psi\rangle) = \sigma^\alpha D|\psi\rangle = \sigma^\alpha |\psi\rangle$$

となつて、 $\sigma^\alpha |\psi\rangle \in \mathcal{M}$ となるからである。一方、ii) 「スピン演算子が \mathcal{M} 内でスピンの演算子の要件を満たしていること」は「エルミート性」と「スピンの代数を満たしていること」を確認すればよい。「エルミート性」は

$$(\tilde{\sigma}^\alpha)^\dagger = -i c^\dagger (b^\alpha)^\dagger = \tilde{\sigma}^\alpha \quad (\alpha = x, y, z) \quad (46)$$

から確認できる。また、「スピンの代数が満たされていること」は、ゲージ固定条件のもとで

$$\tilde{\sigma}^x \tilde{\sigma}^y = (i b^x c)(i b^y c) = b^x b^y = -b^z c = i \tilde{\sigma}^z \quad (47)$$

が成り立つことなどから確認できる。3番目の等号がゲージ固定条件 (44) の恩恵である。よつて、Majorana 演算子を用いてスピン演算子を書き換えることができ、それに伴い (34) 式のハミルトニアンは以下ようになる。

$$H = \frac{i}{4} \sum_{\langle j, k \rangle} \hat{A}_{jk} c_j c_k \quad (48)$$

$$\hat{A}_{jk} = 2J_\alpha \hat{u}_{jk} \quad (49)$$

$$\hat{u}_{jk} = i b_j^\alpha b_k^\alpha \quad (50)$$

ただし、 $\langle j, k \rangle$ は頂点 j, k によって挟まれた辺を表す。 $\langle k, j \rangle$ と $\langle j, k \rangle$ が同じ辺を2回数えていることと、 $\hat{u}_{jk} = -\hat{u}_{kj}$ となることに注意しよう。

3.2.3 Majorana 形式におけるヒルベルト空間の分割: $\tilde{\mathcal{L}}_u$

ここまではハミルトニアンを複雑に書き換えただけで特にいいことはないように見えるかもしれない。しかし、実は式 (50) で定義された演算子 \hat{u}_{jk} に対して以下の有用な関係式が成立する。

$$[\hat{u}_\alpha, \hat{u}_\beta] = 0 \quad (51)$$

$$\hat{u}_\gamma^2 = 1 \quad (52)$$

$$[H, \hat{u}_\delta] = 0 \quad (53)$$

ただし、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は六角格子の勝手な辺を表す。これらの式から、辺 $\langle j, k \rangle$ において定義された演算子 \hat{u}_{jk} の固有値は ± 1 のどちらかであり、かつ保存することがわかる。したがって、plaquette 演算子の場合と同様に、拡大ヒルベルト空間を分割することができる。すなわち、各頂点において定義された拡大ヒルベルト空間の直積空間である「全系の拡大ヒルベルト空間」 $\tilde{\mathcal{L}}$ を

$$\tilde{\mathcal{L}} = \bigoplus_{u_1 u_2 \dots} \tilde{\mathcal{L}}_{u_1 u_2 \dots} \quad (54)$$

と分割することができる。ただし、 u_i は i 番目の辺に対するラベルであり、 ± 1 の値をとる。 $\hat{u}_{jk} = -\hat{u}_{kj}$ であるため、頂点 j と頂点 k に挟まれた辺に対して $\hat{u}_{jk}, \hat{u}_{kj}$ のどちらの固有値を使うかで辺 $\langle j, k \rangle$ のラベルは反転してしまうのだが、混乱を避けるため以下では常に j を偶格子にとることにする。（「偶格子」の定義は図 25 を参照）また、必要に応じて全体のラベル $u_1 u_2 \dots$ を単に u と書く。このような分割を行うと、各部分空間内で Majorana 演算子の積で書かれていた \hat{u}_{jk} を ± 1 に置き換えることができ、式 (48) で \hat{A}_{jk} は単なる数になる。すなわち、特定のラベル u に対して Majorana 演算子の二次形式の形をしたハミルトニアン

$$\tilde{H}_u = \frac{i}{4} \sum_{j,k} A_{jk} c_j c_k \quad (55)$$

が一つ定まる。 \hat{u}_{jk} が添字に関して反対称であることを反映して、 A_{jk} が交代行列となることに注意しよう。

後述するように、 \tilde{H}_u は古典力学の連成振動と同じ要領で解けるため、それぞれのラベル u に対して個別にエネルギースペクトルや対応する基底状態 $|\tilde{\Psi}_u\rangle$ を求めることができる。スピン形式ではハミルトニアンの各項が交換しなかったが、点に対応する「 c 」と辺に対応する「 b 」という 2 種類の Majorana 演算子を導入することで可換な量を作り出せたことが特筆すべき点である。²⁹

3.2.4 Majorana 演算子の二次形式と Majorana モード

では、 \tilde{H}_u のような Majorana 演算子の二次形式の解き方を一般的に考えよう。すなわち、 $n \times n$ の実交代行列 $A (n = 2m)$ に対して

$$H(A) = \frac{i}{4} \sum_{j,k} A_{jk} c_j c_k \quad (56)$$

のエネルギー固有値やエネルギー固有状態を考える。³⁰まず、 iA がエルミート行列になることに注意する。実際、

$$(iA)^\dagger = -iA^T = iA$$

したがって、 iA はユニタリー行列 U で対角化できて、その固有値は実数である。また、 iA の固有値 ϵ (実数) に対応する固有ベクトルが \mathbf{u} であるとする。この時、 $-\epsilon$ もまた iA の固有値であって、対応する固有ベクトルは \mathbf{u}^* となる。実際、複素共役をとることで

$$(iA)\mathbf{u} = \epsilon\mathbf{u} \Leftrightarrow (iA)\mathbf{u}^* = -\epsilon\mathbf{u}^*$$

である。したがって、

$$(iA)U = Q \begin{pmatrix} -\epsilon_1 & 0 & & & & \\ & \epsilon_1 & & & & \\ & & -\epsilon_2 & 0 & & \\ & & & 0 & \epsilon_2 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & -\epsilon_m & 0 \\ & & & & & & & 0 & \epsilon_m \end{pmatrix} \quad (57)$$

ただし、 $-\epsilon_k (\epsilon_k \geq 0)$ に対応する固有ベクトルを \mathbf{u}_k とし $U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2^*, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m^*]$ である。

²⁹また、ハニカム格子モデルのハミルトニアンがスピンの二体相互作用の項からなることも重要である。トリークコードの場合、スピンの四体相互作用の項が含まれるため、Majorana 演算子を導入しても二次形式には帰着できない。

³⁰ちなみに、係数の $\frac{i}{4}$ は $[-iH(A), -iH(B)] = -iH([A, B])$ が成り立つように選ばれている。証明は省略するが、 (j, k, l, m) に 3 種類の数が含まれるときだけ $[c_j c_k, c_l c_m] \neq 0$ となることを使う。

また、

$$i \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} \quad (58)$$

$$[\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k^*] \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} = [\text{Re}(\mathbf{u}_k), \text{Im}(\mathbf{u}_k)] \quad (59)$$

なので、 $Q = [\text{Re}(\mathbf{u}_1), \text{Im}(\mathbf{u}_1), \text{Re}(\mathbf{u}_2), \text{Im}(\mathbf{u}_2), \dots, \text{Re}(\mathbf{u}_n), \text{Im}(\mathbf{u}_n)]$ を用いると

$$AQ = Q \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_1 & & & & \\ -\epsilon_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & \epsilon_2 & & \\ & & -\epsilon_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & \epsilon_m \\ & & & & & -\epsilon_m & 0 \end{pmatrix} \quad (60)$$

となることがわかる。ただしここで、 U はユニタリ行列であったから

$$QQ^T = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\dagger = I_n \quad (61)$$

となり、 Q は直交行列になることに注意しよう。さて、ここで

$$(b'_1, b''_1, b'_2, b''_2, \dots, b'_m, b''_m) = (c_1, c_2 \dots c_{2m})Q \quad (62)$$

$$a_k = \frac{1}{2}(b'_k + ib''_k), \quad a_k^\dagger = \frac{1}{2}(b'_k - ib''_k) \quad (63)$$

によって新たに演算子 $b'_k, b''_k, a_k, a_k^\dagger$ を定義すると、

$$b'_k b''_k = -b''_k b'_k \quad (64)$$

$$\{a_j, a_k^\dagger\} = \delta_{jk} \quad (65)$$

が成り立つ。ただし、 Q が直交行列であることを用いた。よって、式 (56) は

$$\begin{aligned} H(A) &= \frac{i}{4} (c_1 \dots c_{2m}) A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{2m} \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{4} (\vec{\mathbf{b}}_k, \vec{\mathbf{b}}'_k) Q^T A Q \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{b}}_k \\ \vec{\mathbf{b}}'_k \end{pmatrix} \quad \because (62) \\ &= \frac{i}{2} \sum_k \epsilon_k b'_k b''_k \quad \because (60), (64) \\ &= \sum_k \frac{\epsilon_k}{2} (a_k^\dagger a_k - a_k a_k^\dagger) \quad \because (65) \\ &= \sum_k \epsilon_k \left(a_k^\dagger a_k - \frac{1}{2} \right) \quad \because (60) \end{aligned}$$

と書き換えることができる。ここで、式 (65) から a_k, a_k^\dagger はフェルミオンの生成消滅演算子であることに注意すれば、 $H(A)$ の基底状態 $|\Psi\rangle$ は任意の k に対して $a_k |\Psi\rangle = 0$ となる状態である。このように、 iA の固有値と固有ベクトルから $H(A)$ のエネルギー固有値 ϵ_k やエネルギー固有状態を構成できることがわかる。つまり、(55) 式のような Majorana 演算子の二次形式で書けるハミルトニアンは厳密に解けることがわかった。

ちなみに、上式から $\epsilon_k = 0$ となる場合に対応するフェルミオンの生成消滅演算子 a_k, a_k^\dagger の占有/非占有は全エネルギーに影響を与えないことが分かる。このようなモードは「マヨラナゼロモード」(MZM) と呼ばれ、ハニカム格子模型に限らず様々な物理系で登場する。

3.2.5 \mathcal{L}_w と $\tilde{\mathcal{L}}_u$ の関係

さて、ここまでスピン形式と Majorana 形式の二つを紹介した。いずれの場合も保存量を見つけて全体のヒルベルト空間を分割したわけであるが、二つの形式は互いにどのように関連しているのだろうか。それを理解するために、各六角面 p に対して以下の演算子を考えよう。

$$\tilde{W}_p = \prod_{j \in p \text{ の偶格子}} \hat{u}_{jk} \quad (66)$$

$\tilde{\mathcal{L}}_u$ 内で \hat{u} は保存量であるため、 \tilde{W}_p もまた保存量である。ここで、 \tilde{W}_p を Majorana 演算子で書くと、

$$\begin{aligned} \tilde{W}_p &= \hat{u}_{21} \hat{u}_{23} \hat{u}_{43} \hat{u}_{45} \hat{u}_{65} \hat{u}_{61} \\ &= (ib_2^z b_1^z) (ib_2^x b_3^x) (ib_4^y b_3^y) (ib_4^z b_5^z) (ib_6^x b_5^x) (ib_6^y b_1^y) \\ &= (-1)^3 (ib_2^z b_2^x) (ib_1^z b_3^x) (ib_4^y b_4^z) (ib_3^y b_5^z) (ib_6^x b_6^y) (ib_5^x b_1^y) \\ &= (ib_2^z b_2^x) (ib_4^y b_4^z) (ib_6^x b_6^y) (ib_1^y b_1^z) (ib_3^x b_3^y) (ib_5^z b_5^x) \end{aligned}$$

となる。ただし、計算途中で (56) 式を用いた。ここで、ゲージ固定条件 (44) の元では

$$b^y b^z = b^x c, \quad b^z b^x = b^y c, \quad b^x b^y = -b^z c$$

となるため、

$$\begin{aligned} \tilde{W}_p &= (ib_2^z b_2^x) (ib_4^y b_4^z) (ib_6^x b_6^y) (ib_1^y b_1^z) (ib_3^x b_3^y) (ib_5^z b_5^x) \\ &= (ib_1^x c_1) (ib_2^y c_2) (ib_3^z c_3) (ib_4^x c_4) (ib_5^y c_5) (ib_6^z c_6) \\ &= \tilde{\sigma}_1^x \tilde{\sigma}_2^y \tilde{\sigma}_3^z \tilde{\sigma}_4^x \tilde{\sigma}_5^y \tilde{\sigma}_6^z \end{aligned}$$

となることがわかる。つまり、拡大ヒルベルト空間 $\tilde{\mathcal{L}}_u$ で定義された演算子 \tilde{W}_p は、ゲージ固定条件を満たす部分空間 $\mathcal{L}_w \subset \tilde{\mathcal{L}}_u$ の中では W_p と同じ演算子と見做せる。また、ラベル w と u は任意の六角面 p に対して

$$w_p = \prod_{j \in p \text{ 上の偶格子}} u_{jk} \quad (67)$$

の関係で結ばれている。このように、 \tilde{W}_p は拡大ヒルベルト空間における plaquette 演算子と見做せる。以上の話を総合すると、以下のような図式でまとめることができる。

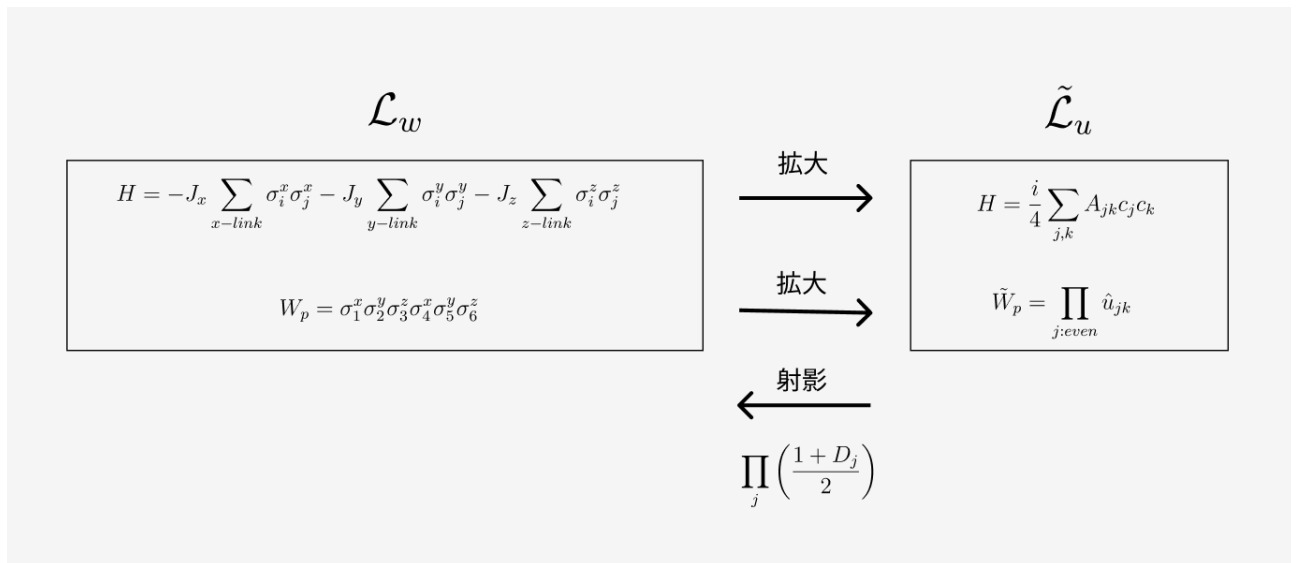


図 27: \mathcal{L}_w と $\tilde{\mathcal{L}}_u$ の関係。ハミルトニアンと保存量の対応関係を示す。 $\tilde{\mathcal{L}}_u$ から \mathcal{L}_w へ戻すためには、ゲージ固定条件 $D = 1$ を満たすように射影演算子をかけてやればよい。

3.3 基底状態

以上の話を総合して、ハニカム格子模型の基底状態を求めよう。具体的には、以下のようにすれば良い。

1. まず、各六角面 p に対して w_p の固有値を固定する。すなわちラベル w を一つ定め、 \mathcal{L}_w にハミルトニアンを制限する。ここで、数理物理の一般的な定理から、基底状態では全ての面で $W_p = 1$ となることが知られている。³¹(Lieb の定理) によって、ラベルは $w = (w_1, w_2, \dots) = (1, 1, \dots)$ と定める。
2. Majorana 演算子を導入することで、問題を \mathcal{L}_w から $\tilde{\mathcal{L}}_u$ に拡大して考える。この際、plaquette 演算子 W_p は拡大ヒルベルト空間で \tilde{W}_p に対応するため、(67) の条件 $w_p = \prod u_{jk}$ が満たされるようにラベル u を定める必要がある。ここでは $(u_1, u_2, \dots) = (1, 1, \dots)$ とすれば良い。³²この時、 $\tilde{\mathcal{L}}_u$ 内でハミルトニアンは

$$\tilde{H}_u = \frac{i}{4} \sum_{j,k} A_{jk} c_j c_k \quad (A_{jk} = \pm 2J_\alpha \text{ または } 0)$$

となる。ただし、 j, k が α -link で結ばれている場合 $A_{jk} = \pm 2J_\alpha$ (j が偶格子のとき正、奇格子のとき負) であり、 j, k が結ばれていない場合 $A_{jk} = 0$ である。

3. 交代行列 A_{jk} をブロック対角化してエネルギー固有値およびエネルギー固有状態を求める。最低エネルギーに対応するエネルギー固有状態を $|\tilde{\psi}_u\rangle$ とする。
4. $\tilde{\mathcal{L}}_u$ の状態から \mathcal{L}_w の状態に戻す。そのためにはゲージ固定条件 (44) を満たすように射影演算子をかければよい。すなわち、

$$|\Psi_w\rangle = \prod_j \left(\frac{1 + D_j}{2} \right) |\tilde{\psi}_u\rangle \quad (68)$$

とすることで基底状態 $|\Psi_w\rangle$ を得ることができる。³³

3.4 A 相と B 相

以上のように、Majorana 演算子を導入することでハニカム格子模型のエネルギースペクトルやエネルギー固有状態は厳密にもとまることがわかった。では、基底状態を含む $w = (1, 1, \dots), u = (1, 1, \dots)$ のラベルのもとで周期的境界条件を課したとき、エネルギー固有値がどうなるかを具体的に求めよう。そのために、ハミルトニアンを以下のように Fourier 変換する。

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}, \lambda, \mu} i \tilde{A}_{\lambda\mu}(\mathbf{q}) a_{-\mathbf{q}, \lambda} a_{\mathbf{q}, \mu} \quad (69)$$

$$\tilde{A}_{\lambda\mu}(\mathbf{q}) = \sum_t e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_t} A_{0\lambda, t\mu} \quad (70)$$

$$a_{\mathbf{q}, \lambda} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_s e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_s} c_{s\lambda} \quad (71)$$

ただし s, t などの添字は六角格子の番号を表し、 λ, μ などは格子内のサイト番号を表す。これが実際にハミルトニアンの書き換えになっていることは、以下のように確認できる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}, \lambda, \mu} i \tilde{A}_{\lambda\mu}(\mathbf{q}) a_{-\mathbf{q}, \lambda} a_{\mathbf{q}, \mu} &= \frac{1}{4N} \sum_{\mathbf{q}, s, t, t', \lambda, \mu} i e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_{t'}} A_{0\lambda, t'\mu} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_s} c_{s\lambda} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_t} c_{t\mu} \\ &= \frac{i}{4} \sum_{s, t, \lambda, \mu} A_{s\lambda, t\mu} c_{s\lambda} c_{t\mu} \end{aligned}$$

³¹これは非自明な主張であるが、詳細な説明は私の能力を超えている。 $W_p = -1$ となる面は vison 励起と呼ばれる。

³² u の定め方は一通りではないが、適当に一つ取ればよい。実は (67) 式の条件 $w_p = \prod u_{jk}$ を満たすラベル同士は $D_j = b_j^x b_j^y b_j^z c_j$ によって生成される \mathbb{Z}_2 ゲージ変換で互いに移り合うため、後々 (68) 式で条件を満たす u はどのみち全て均等に重ね合わせられる。

³³ \mathbb{Z}_2 ゲージ理論の観点から見ると、ゲージ同値類に属する元の均等重ね合わせを行っていると解釈することもできる。

ただし、二行目から三行目で $\sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_{t'}+\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_t)} = N\delta(\mathbf{r}_{t'}+\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_t)$ であることと、並進対称性より $A_{0\lambda,(t-s)\mu} = A_{s\lambda,t\mu}$ となることを用いた。また、

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{q},\lambda}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_s e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_s} c_{s\lambda}^\dagger = a_{-\mathbf{q},\lambda} \\ a_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{q},\mu}^\dagger + a_{\mathbf{q},\mu}^\dagger a_{\mathbf{p},\lambda} &= \frac{1}{2N} \sum_{s,s'} e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_s - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}_{s'})} \{c_{s\lambda}, c_{s'\mu}\} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_s e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{r}_s} 2\delta_{\lambda\mu} \\ &= \delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \delta_{\lambda\mu} \end{aligned}$$

なので、式 (69) はフェルミオンの生成消滅演算子の二次形式の形をしている。よって、求めるエネルギー固有値は $i\tilde{A}$ の固有値である。そこで、以下の図 28 のように単位格子と単位ベクトルを設定し、実際に $(i\tilde{A})_{\lambda\mu}$ を計算する。

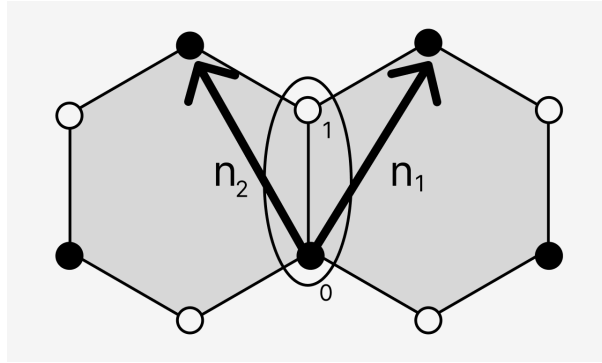


図 28: 単位格子の定義。白丸に 0、黒丸に 1 の番号を割り振り、 $\mathbf{n}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\mathbf{n}_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ と定める

まず、隣接するサイトは偶奇が異なるため、 $\tilde{A}_{00} = \tilde{A}_{11} = 0$ である。また、対角項は

$$\tilde{A}_{01} = 2J_x e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}_1} + 2J_y e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}_2} + 2J_z, \quad \tilde{A}_{10} = -2J_x e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}_1} - 2J_y e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}_2} - 2J_z$$

となる。よって、

$$iA = \begin{pmatrix} 0 & f(\mathbf{q}) \\ -if(\mathbf{q})^* & 0 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{q}) = 2J_x e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}_1} + 2J_y e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}_2} + 2J_z \quad (72)$$

であり、固有値は $\epsilon(\mathbf{q}) = \pm|f(\mathbf{q})|$ である。ギャップレスの励起がある場合、 $\epsilon(\mathbf{q}) = \pm|f(\mathbf{q})| = 0$ となる \mathbf{q} が存在するため、以下のように三角不等式の条件が成り立つ。(図 29)

$$|J_x| + |J_y| \geq |J_z|, \quad |J_y| + |J_z| \geq |J_x|, \quad |J_z| + |J_x| \geq |J_y|$$

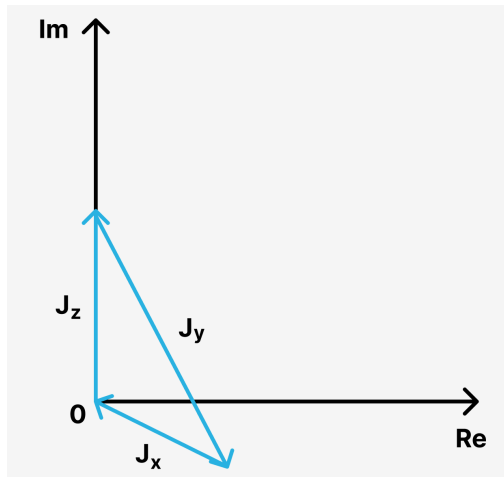


図 29: ギャップレスの励起が存在するための条件 $f(\mathbf{q}) = 0 \Leftrightarrow J_x e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}_1} + J_y e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}_2} + J_z = 0$ を複素数平面上で図示したもの。位相因子は複素数の大きさを変化させないことに注意しよう。

したがって、ギャップレスの励起が存在しない A 相と、ギャップレス励起が存在する B 相の二つの相が存在し、 J_x, J_y, J_z の大きさに関する以下のような相図を作成することができる。(図 30)

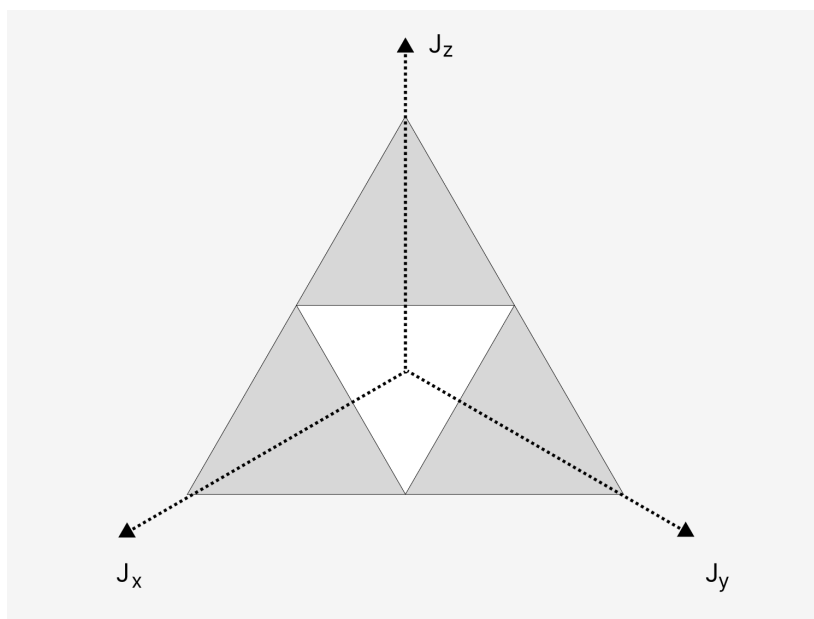


図 30: A 相と B 相の相図。図は \mathbb{R}^3 内で描かれており、相図は $(1, 1, 1)$ に垂直な平面内に存在する。色付き領域で示された A 相は J_x, J_y, J_z の大きさに異方性があり、ギャップがある。一方、白色領域で示された B 相は J_x, J_y, J_z の大きさが等方的であり、ギャップレスである。

これら二つの相はギャップの有無以外にも「チャーン数」と呼ばれる物性理論における重要な量が異なっており、熱伝導度などの物性値に違いが生じることが知られている。図 30 の相図については後で再び言及するので、記憶に留めておいていただきたい。

4 ハニカムコード

ここからは「ハニカムコード」と呼ばれる、比較的最近提唱された量子情報の話題を紹介する。これは、前述したハニカム格子模型のハミルトニアン各项を周期的に測定することで量子情報を符号化するというアイデアである。量子力学では、互いに交換しない演算子を同時測定することはできないため、ハニカム格子模型の全ての項に対する固有値 $+1$ の同時固有状態、すなわち通常の stabilizer 状態は定義できない。そのため、stabilizer 形式を一般化した考え方が必要になる。まず初めにモデルを説明し、stabilizer 形式の一般化の一つとなる「サブシステムコード」と呼ばれる枠組みの観点では論理量子ビットが存在しないことを見る。これでは一見量子計算には使えないように思えるが、測定の時間順まで考慮した「瞬間的 stabilizer 群」と呼ばれる考え方を導入すれば、量子情報の符号化と誤り訂正が可能になることを説明する。最後に、ハニカム格子模型と測定操作に関する最近の結果を簡単に紹介する。

4.1 モデル

六角格子の頂点にスピン $1/2$ の粒子を配置し、ハニカム格子模型と同様にして各辺に x, y, z -link を設定する。また、頂点 i と頂点 j を結ぶ α -link $\langle i, j \rangle$ に対して $\sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha$ という二体の演算子を考え、「チェック演算子」と呼ぶことにする。チェック演算子はハニカム格子模型のハミルトニアンに登場する項である。また、各六角面に対して隣り合う面の番号が異なるように $0, 1, 2$ の番号をふり、3色の塗り分けを行う。その上、同じ番号 α の六角面同士をつなぐ辺に対して番号 α を割り当て、辺も3色に塗り分ける。(図 31) 以下の議論では、周期的境界条件が満たされるように種数 1 のトーラス上で考える。

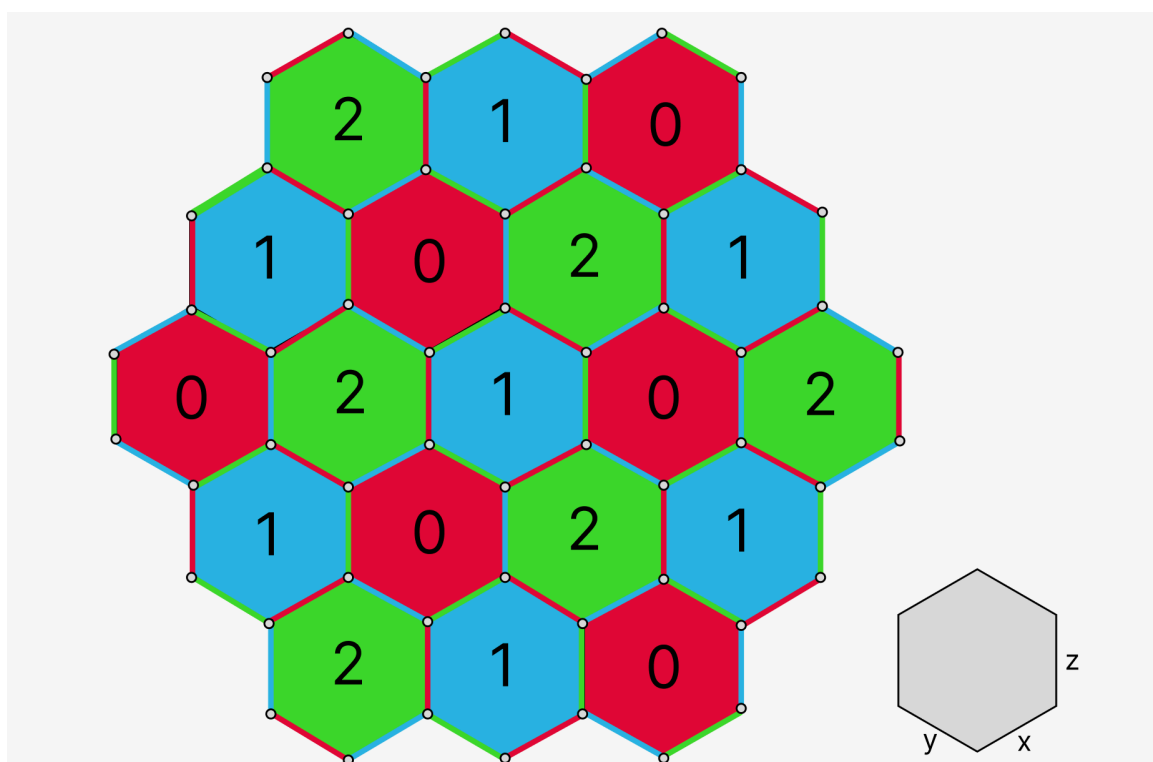


図 31: ハニカムコードのセットアップ。 x, y, z -link が定められたハニカム格子模型の設定で、さらに六角格子を 3 色に塗り分ける。また、番号 α のついた面同士を結ぶ辺に α を割り当てることで、辺も 3 色に塗り分ける。図では赤が番号 0、青が番号 1、緑が番号 2 にそれぞれ対応している。

さて、以上の設定のもとで、チェック演算子を周期的に測定する。まず、番号 0 の辺のチェック演算子を全て測定する。続いて、番号 1 の辺のチェック演算子を全て測定する。以下同様に $0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$ の順番で番号 r ($r = 0, 1, 2$) のチェック演算子を順に測定していく。これがハニカムコードである。

4.2 サブシステムコード

トリークコードでは star 演算子や plaquette 演算子といった互いに交換する演算子の同時固有状態に量子情報を符号化し、それらの固有値を測定することでエラー検知(シンδροーム測定)を行った。ところが、ハニカムコードの場合には、このような stabilizer 形式の考え方は使えない。なぜなら、ハニカムコードで測定するチェック演算子は互いに交換しないため、これらの演算子の同時固有状態からなる stabilizer 空間がそもそも定義できないからである。そこで、より一般化した考え方が必要になる。

そのような考え方の一つとして、「サブシステムコード」というものが知られている。以下、物理的量子ビットが n 個の系に対するサブシステムコードの構成法を述べよう。まず、「ゲージ群」と呼ばれる、Pauli 行列のテンソル積からなる群 G を一つ定める。stabilizer 群 S はこの G の任意の要素と交換する G の元全体(中心と呼ばれる)として定められる。そこで、 S に対応する stabilizer 空間を C とし、 $C = A \otimes B$ という分割を考える。すなわち、系のヒルベルト空間を

$$\mathcal{H} = C \oplus C^\perp = (A \otimes B) \oplus C^\perp \quad (73)$$

と分割する。ただし、任意の $G \in G$ が A に対して恒等演算子として作用し、かつ $G \in G$ 全体で B 上の線形演算子全体を生成するように A, B を定義する。これがサブシステムコードである。

これだけでは意味がわからないと思うので、物理的な意味づけを説明する。まず、 G の元はエラー検知などで測定する演算子が生成する群に対応する。ハニカムコードで言えば、チェック演算子が生成する群である。次に、stabilizer 群 S を G の中心として定めることで G の演算子のうち交換するものを取り出し、stabilizer 群と同様の定式化ができるようにしている。実際、 S の元同士は可換なので通常の stabilizer 空間 C を定めることができる。ここで、 $G \in G$ の測定は stabilizer 空間 C を保つことに注意しよう。実際、任意の $S_i \in S, |\psi\rangle \in C$ に対して

$$S_i \left(\frac{1 \pm G}{2} \right) |\psi\rangle = \left(\frac{1 \pm G}{2} \right) S_i |\psi\rangle = \left(\frac{1 \pm G}{2} \right) |\psi\rangle \quad (74)$$

なので、測定結果が ± 1 の時の測定後の状態 $\left(\frac{1 \pm G}{2} \right) |\psi\rangle$ もまた stabilizer 状態である。この性質のため、stabilizer 空間に埋め込まれた論理量子ビットに対する測定が定義できる。³⁴さらに、 $C = A \otimes B$ という分割を考えることで、 A に対応する「測定の影響を受けない論理量子ビット」と B に対応する「測定の影響を受ける論理量子ビット」の二種類の論理量子ビットを考えている。³⁵ B に対応する論理量子ビット(ゲージ量子ビット)はその定義から G の作用を受けるので、チェック演算子の測定の反作用 $\frac{1 \pm G}{2}$ の影響で次々に書き換えられてしまう。そのため、量子情報の符号化には用いられない。一方、 A に対応する論理量子ビットはその定義から G の作用を受けないため、チェック演算子の測定によって変化することはない。そのため、これを量子情報の符号化に用いる。このような事情があるため、以降、論理量子ビットといった時にはゲージ量子ビットは除外する。

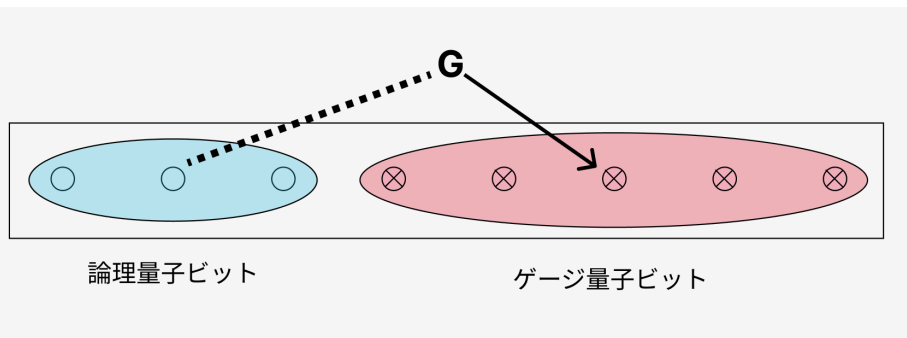


図 32: サブシステムコードの概念図。 G の射影測定を行うと測定の反作用で stabilizer 空間に対して G が作用するため、一部の量子ビットは書き換えられてしまう。書き換えられる部分は「ゲージ量子ビット」呼ばれ、任意の G に対して trivial な作用のみ受けるものは「論理量子ビット」と呼ばれる。

³⁴仮に測定で stabilizer 状態が stabilizer 空間の外に写されてしまうと、測定後に論理量子ビットがなくなってしまうということになる。これでは論理量子ビットに対する測定がそもそも定義できない。

³⁵(32) 式でも用いたように、 $G \in G$ を測定すると、射影測定の反作用のため、測定結果に応じて状態に $\frac{1 \pm G}{2}$ がかかる。よって、測定後の状態には $G \in G$ がかった状態が含まれる。

また、サブシステムコードの論理演算子としては「stabilizer 群に含まれず、なおかつ G の任意の元と交換するような \hat{O} 」を取れば良い。実際、 \hat{O} は stabilizer 群に含まれないため stabilizer 空間に作用する。加えて、 $\hat{O} \notin G$ である。なぜなら、仮に $\hat{O} \in G$ とすると \hat{O} が G の任意の元と交換することから $\hat{O} \in S$ となって矛盾するためである。 $\hat{O} \notin G$ は \hat{O} が stabilizer 空間のうち特に A に作用することを意味するので、 \hat{O} は確かに論理演算子になっていることが分かる。

4.3 サブシステムコードとしてのハニカムコード

では、ハニカムコードにサブシステムコードの考え方を具体的に適用してみよう。まず、チェック演算子全体が生成する群がゲージ群 G であった。ハニカムコードのチェック演算子全体の積は 1 であることに注意すると、六角格子の面が n_p 個あるとき、ゲージ群の独立な生成元は六角格子の辺の数から 1 をさしひいて $3n_p - 1$ 個である。

一方、stabilizer 群は任意のチェック演算子と交換するような $G \in G$ 全体であった。そのような演算子は、端での反交換が起こらないように閉経路に沿ってチェック演算子をかけることで得られる。したがって、各六角面の辺に沿ってチェック演算子をかけた「plaquette 演算子」と、トラスに巻きつく二つの非自明なループに沿ってチェック演算子をかけた「経路演算子」の二種類が stabilizer 演算子となる。plaquette 演算子全体の積が 1 になることにも注意すれば、stabilizer 群の独立な生成元は $(n_p - 1) + 2 = n_p + 1$ となる。以上のことから、stabilizer 空間に作用する独立な演算子の数は $(3n_p - 1) - (n_p + 1) = 2n_p - 2$ となり、ゲージ量子ビットは $(2n_p - 2)/2 = n_p - 1$ 個存在するとわかる。

ここでよくよく考えてみると、ハニカム格子に置かれた物理的量子ビットは $2n_p$ 個なので、stabilizer 空間の次元は物理的量子ビットの空間を stabilizer 演算子で分割することを考えて $2^{2n_p - (n_p + 1)} = 2^{n_p - 1}$ となる。よって stabilizer 空間には $n_p - 1$ 個の量子ビットを収容できることになるが、これは上で求めたゲージ量子ビットの数と一致している。よって、stabilizer 空間にはゲージ量子ビットしか存在しないことがわかる。(図 33) つまり、サブシステムコードの観点では、ハニカムコードに論理量子ビットは存在しない。³⁶しかし、これはあくまでサブシステムコードの見方をとった場合の話であり、後述するようにチェック演算子の測定順も考慮に入れると、論理量子ビットを構成できていることが分かる。

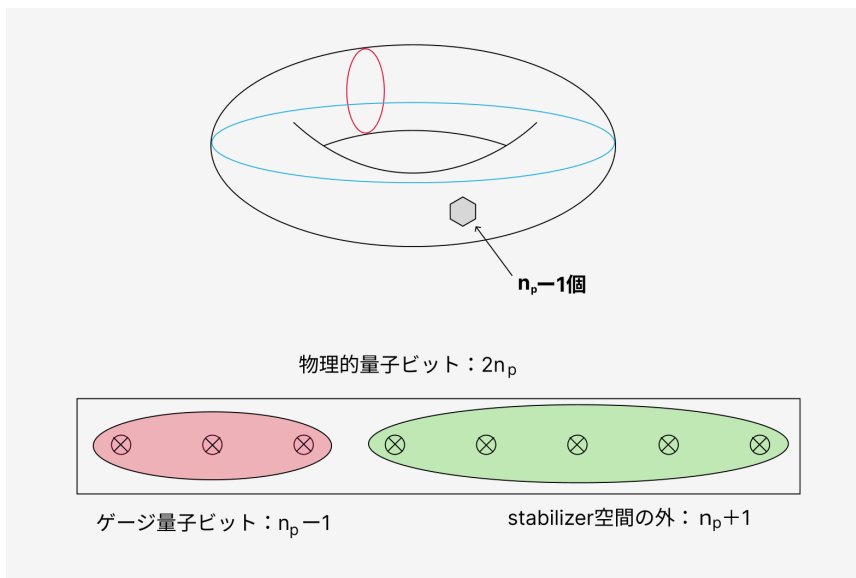


図 33: サブシステムコードとしてのハニカムコード。物理的量子ビットは全部で $2n_p$ 個であり、stabilizer 演算子は $n_p - 1$ 個の plaquette 演算子と 2 個の経路演算子の合計 $n_p + 1$ 個からなる。よって stabilizer 空間の次元は $2^{2n_p - (n_p + 1)}$ となる。一方、ゲージ量子ビットの数は $3n_p - 1$ 個の独立なチェック演算子から stabilizer 演算子の数を引くことで $n_p - 1$ 個となるので、stabilizer 空間にはゲージ量子ビットしか収容できない。

³⁶ちなみに、stabilizer 演算子を定義から何個か外せば stabilizer 空間に新しく量子ビットができるが、これはゲージ量子ビットである。

4.4 stabilizer 形式と測定

ここで、以降の準備として stabilizer 形式における測定について概観しておこう。まず、量子力学における「測定」という操作は、言わばベクトルをある基底に射影することに対応しており、一般に状態を変化させるものであったことを思い出そう。これを測定の反作用などと言うのであった。したがって、たとえ測定前に stabilizer 状態であったとしても、その状態に対して適当な演算子 \hat{O} の測定を行なった後の状態が引き続き stabilizer 状態になっているとは限らない。よって、測定後も stabilizer 形式を使い続けるには、状態ではなく stabilizer 群の方を修正しなければならない。つまり、測定後の状態が固有値 $+1$ の固有状態になっているような演算子を新たに stabilizer 演算子に加えたり、もはや測定後の状態に対して stabilizer 演算子ではなくなったものを stabilizer 群から外したりするのである。

以下では、ある stabilizer 群 S を指定し、対応する stabilizer 状態に対してパウリ行列のテンソル積 P を測定することを考える。 $P^2 = 1$ より P の固有値は ± 1 であり、測定結果は ± 1 のどちらかになることに注意しよう。ここで、測定前の状態 $|\psi\rangle$ は測定結果に応じてそれぞれ以下のように変化する。

$$\mathcal{P}_+ |\psi\rangle = \frac{I+P}{2} |\psi\rangle, \quad \mathcal{P}_- |\psi\rangle = \frac{I-P}{2} |\psi\rangle$$

この変化に伴う stabilizer 群の変化を定めるルールを調べる。以下の三通りの場合がある。

1. $P \in S$ または $-P \in S$ のとき。

stabilizer 状態は既に P の固有状態なので、測定によって別の状態に射影されることはない。よって、対応する stabilizer 群も変化しない。

2. $P \notin S$ かつ $-P \notin S$ であり、さらに P が S の任意の元 S_i と交換するとき。

$$S_i \mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_+ S_i, \quad S_i \mathcal{P}_- = \mathcal{P}_- S_i$$

なので、測定後も S_i は stabilizer 演算子となることがわかる：

$$S_i(\mathcal{P}_+ |\psi\rangle) = \mathcal{P}_+ S_i |\psi\rangle = \mathcal{P}_+ |\psi\rangle, \quad S_i(\mathcal{P}_- |\psi\rangle) = \mathcal{P}_- S_i |\psi\rangle = \mathcal{P}_- |\psi\rangle$$

また、測定結果が ± 1 である時、測定後の状態は複合同順で $\pm P$ の固有値 1 の固有状態になっているので、 $\pm P$ が新たに stabilizer 群に加わることがわかる。

3. $P \notin S$ かつ $-P \notin S$ であり、さらに P が S のある元 S_i と反交換するとき。

$$S_i \mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_- S_i, \quad S_i \mathcal{P}_- = \mathcal{P}_+ S_i$$

なので $S_i(\mathcal{P}_+ |\psi\rangle) = \mathcal{P}_- S_i |\psi\rangle = \mathcal{P}_- |\psi\rangle$, $S_i(\mathcal{P}_- |\psi\rangle) = \mathcal{P}_+ S_i |\psi\rangle = \mathcal{P}_+ |\psi\rangle$ である。

ここで、 $\mathcal{P}_+ \mathcal{P}_- = \mathcal{P}_- \mathcal{P}_+ = 0$ なので、 $\mathcal{P}_+ |\psi\rangle$ と $\mathcal{P}_- |\psi\rangle$ は直交する。よって、 S_i は測定後の状態に対する stabilizer 演算子ではなくなっていることがわかる。一方、測定結果が $+1$ ならば S_i の代わりに P が、 -1 ならば S_i の代わりに $-P$ が新たに stabilizer 群に加わる。なぜなら、

$$P \mathcal{P}_+ = P \left(\frac{I+P}{2} \right) = \left(\frac{P+I}{2} \right) = \mathcal{P}_+, \quad -P \mathcal{P}_- = -P \left(\frac{I-P}{2} \right) = \left(\frac{-P+I}{2} \right) = \mathcal{P}_-$$

より $P(\mathcal{P}_+ |\psi\rangle) = \mathcal{P}_+ |\psi\rangle$, $-P(\mathcal{P}_- |\psi\rangle) = \mathcal{P}_- |\psi\rangle$ が成り立ち、測定後の状態は $P, -P$ に対する stabilizer 状態になっているためである。

以上まとめると、stabilizer 群は測定によって、以下のようなルールで変更を受けることが分かる。

- i) $P \in S$ または $-P \in S$ のとき：stabilizer 群はそのまま
- ii) $P \notin S$ かつ $-P \notin S$ であり、さらに P が S の任意の元 S_i と交換するとき：測定結果が ± 1 の時 $\pm P$ が stabilizer に追加される
- iii) $P \notin S$ かつ $-P \notin S$ であり、さらに P が S のいくつかの元 S_i と交換しないとき：測定結果が ± 1 の時 $\pm P$ が stabilizer に追加され、 P と交換しない元 S_i は stabilizer 群から外れる

4.5 瞬間的 stabilizer 群

さて、以上で準備が整ったので、「周期的な測定」というハニカムコードの特徴を十分に捉える見方を導入しよう。具体的には、各番号のチェック演算子の測定終了時点における stabilizer 群を考えていく。以下、これを「瞬間的 stabilizer 群」(ISG) と呼ぶ。ただし、ISG の生成元の符号はひとまず無視する。具体的な手順は以下である。

1. 初期状態を最大混合状態とする。³⁷この時、ISG は恒等演算子のみからなる。

$$ISG = \{I\}$$

2. 続いて、番号 0 のチェック演算子を測定する。前節のまとめで記したルール ii) に基づき、測定直後の ISG は番号 0 のチェック演算子で生成される。

$$ISG = \langle \{(XX)_0\}, \{(YY)_0\}, \{(ZZ)_0\} \rangle$$

ここで、 $\{(XX)_0\}$ で番号 0、 XX 型のチェック演算子の集合を表す。番号 0 のチェック演算子同士は互いに交わらないため交換することに注意しよう。

3. 続いて、番号 1 のチェック演算子を測定する。測定直後の ISG は、番号 1 のチェック演算子と番号 2 の plaquette 演算子で生成される。

$$ISG = \langle \{(XX)_1\}, \{(YY)_1\}, \{(ZZ)_1\}, \{W_{p_2}\} \rangle$$

ただし、 $\{W_{p_2}\}$ は番号 2 の六角面に対するハニカム格子模型の plaquette 演算子の集合である。以下、上式が成り立つ理由を説明しよう。番号 2 の六角形は互いに独立なので、代表して一つの六角面で考えればよい。(図 34) この六角面に対し、番号 1 のチェック演算子を $(XX)_1, (YY)_1, (ZZ)_1$ の順に測定していくと、ISG は以下のように変化する。

$$\begin{aligned} \langle (XX)_0, (YY)_0, (ZZ)_0 \rangle &\longrightarrow \langle (XX)_0, (YY)_0, (ZZ)_0, (XX)_1 \rangle && \text{(ルール ii), iii)} \\ &\longrightarrow \langle (XX)_0, (YY)_0, (ZZ)_0, (XX)_1, (YY)_1 \rangle && \text{(ルール ii), iii)} \\ &\longrightarrow \langle (XX)_0, (YY)_0, (ZZ)_0, (XX)_1, (YY)_1, (ZZ)_1 \rangle && \text{(ルール ii)} \\ &= \langle (XX)_1, (YY)_1, (ZZ)_1, (XX)_0, (YY)_0, (ZZ)_0, (XX)_1, (YY)_1, (ZZ)_1 \rangle \end{aligned}$$

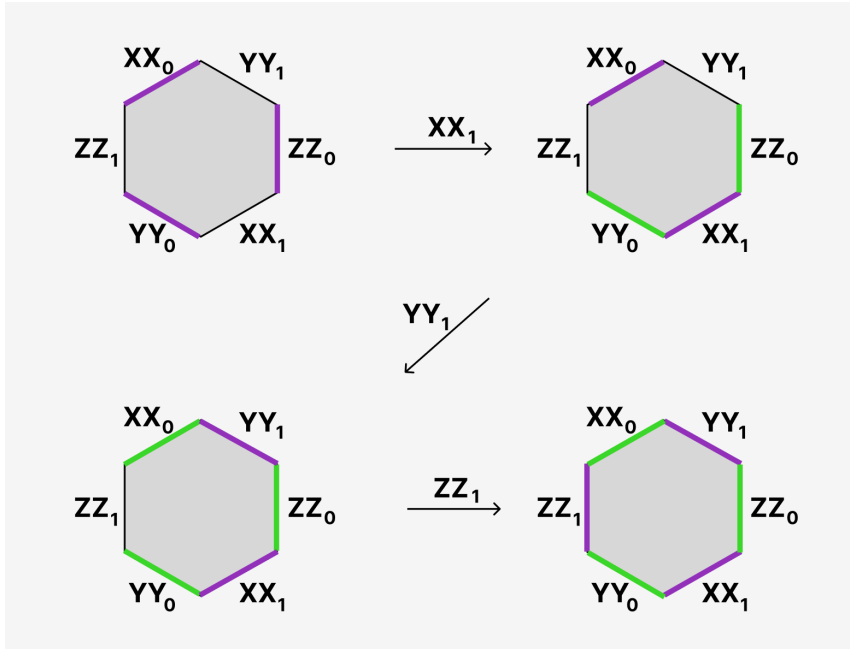


図 34: stabilizer 群に残る演算子の変遷。紫の線は単体で ISG を生成するチェック演算子を表し、緑の線は複数のチェック演算子の積で ISG の生成元になるものを表す。たとえば、 $(XX)_1$ の測定によって $(YY)_0$ と $(ZZ)_0$ は stabilizer 群から消えるが、それらの積 $(YY)_0(ZZ)_0$ は $(XX)_1$ と可換なので stabilizer 群に残る。以下、同様。

³⁷混合状態については付録 B を参照。

ここで、 $XY = iZ, YZ = iX, ZX = iY$ などに注意すると、

$$(XX)_0(YY)_0(ZZ)_0(XX)_1(YY)_1(ZZ)_1 \propto \sigma_1^x \sigma_2^y \sigma_3^z \sigma_4^x \sigma_5^y \sigma_6^z = W_{p_2} \quad (75)$$

すなわち、チェック演算子を六角面の周りで全てかけると、ハニカム格子模型の plaquette 演算子になることがわかる。このことから、 $ISG = \{(XX)_1, \{(YY)_1, \{(ZZ)_1, \{W_{p_2}\}$ となる。

4. 続いて、番号 2 のチェック演算子を測定した直後の ISG は、番号 2 のチェック演算子、番号 0 の plaquette 演算子、番号 2 の plaquette 演算子で生成される。すなわち、

$$ISG = \{(XX)_2, \{(YY)_2, \{(ZZ)_2, \{W_{p_0}, \{W_{p_2}\}$$

これが成り立つ理由は、以下のように説明できる。任意の plaquette 演算子は任意のチェック演算子と交換するため、ISG から決して除外されない。よって、ISG の変化を考える上ではチェック演算子だけに注目すれば良く、plaquette 演算子分の違いを無視すれば、3. で $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 0$ と考えればよい。

5. 同様に考えることで、番号 r のチェック演算子を測定した直後の ISG は番号 r のチェック演算子と plaquette 演算子によって生成される。すなわち

$$ISG = \langle \{(XX)_r, \{(YY)_r, \{(ZZ)_r, \{W_{p_0}, \{W_{p_1}, \{W_{p_2}\} \rangle \quad (76)$$

4.6 論理量子ビット

以上のように、番号 r のチェック演算子の測定を終えた直後は式 (76) の ISG が stabilizer 群となっている。そこで、ISG に対して通常の stabilizer 形式の議論をし、論理量子ビットと論理演算子を考えてみよう。plaquette 演算子が全部で n_p 個ある時、番号 r のチェック演算子は n_p 個である。また、plaquette 演算子を全て書けると 1 になり、番号 r のチェック演算子全体と番号 r の plaquette 演算子全体の積も 1 になるため、独立な ISG の元は $2n_p - 2$ 個である。一方、スピンは六角格子の頂点に配置されており、全部で $2n_p$ 個である。よって、stabilizer 空間の次元は $2^{2n_p - (2n_p - 2)} = 4$ であり、2 つの論理量子ビットを符号化できるとわかる。サブシステムコードの場合とは異なり、トーラスに巻きつく非自明なループが stabilizer 群に含まれないことに注目しよう。測定を行う順番、という時間方向の自由度が重要であったと分かる。

4.7 論理演算子

4.7.1 内部論理演算子

では、論理演算子はどのように取ればよいであろうか。瞬時的 stabilizer 空間の次元が 4 であることから、独立な論理演算子は 4 つ存在するはずである。まず初めに見つかるのは、トーリックコードの場合と同じようにトーラスに巻きつく非自明なループにそってチェック演算子をかけたものである。サブシステムコードの場合と異なりこれらの演算子は ISG には入っておらず、なおかつチェック演算子と交換するため、論理演算子となることができる。これらを「内部論理演算子」³⁸と呼ぶ。plaquette 演算子をかけることで連続的に変形できる場合を同一視して考えれば、独立なものは 2 つとなる。

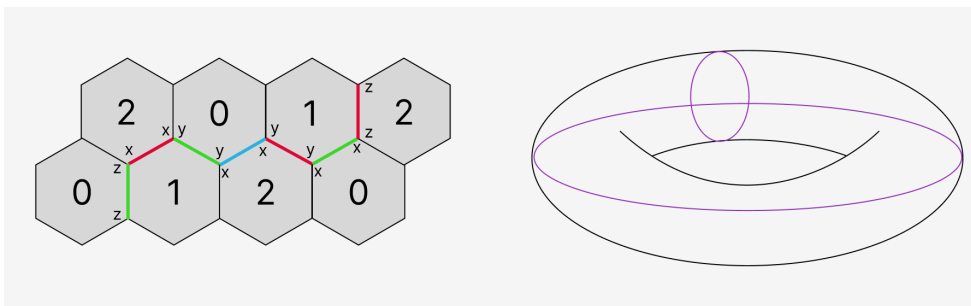


図 35: 内部演算子。トーラスに巻きつく「非自明なループ」に沿ってチェック演算子をかけると、内部論理演算子が得られる。

³⁸ 「内部」という用語はサブシステムコードでは stabilizer 群の中に含まれる、ということからきている。

4.7.2 外部論理演算子

さて、あと2つの論理演算子について考えよう。そのために、ハニカムコードを六角格子上のトーリックコードに対応させる。具体的には、番号 r のチェック演算子の測定が終了した時点で、番号 r の link で結ばれた二つのスピンを一つの有効スピンとみなす。たとえば、 r 番目の z -link で結ばれたスピンに対してチェック演算子 $Z \otimes Z$ の測定を行い、+1 という測定結果が得られたとする。この時、測定後の状態は $\mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^2$ の射影を受けて

$$a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\downarrow\downarrow\rangle \quad (a, b \in \mathbb{C})$$

となる。この時 $|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle$ とおくと

$$(Z \otimes I)(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle) = (I \otimes Z)(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle) = a|\uparrow\rangle - b|\downarrow\rangle \quad (77)$$

$$(X \otimes Y)(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle) = (Y \otimes X)(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle) = -ib|\uparrow\rangle + ia|\downarrow\rangle \quad (78)$$

なので、 z -link の有効量子ビットに対して $Z \otimes I$ や $X \otimes Y$ はそれぞれ Z, Y として作用することが分かる。同様に、 y -link の測定を行なって +1 が得られた時 y -link の有効量子ビットに対して $Y \otimes I$ は Z として、 $X \otimes Z$ は Y として作用し、 x -link の測定を行なって +1 が得られた時は x -link の有効量子ビットに対して $X \otimes I$ は Z として、 $Y \otimes Z$ は Y として作用する。よって、番号 0 の link を測定した直後において、番号 0 の plaquette 演算子は六角格子のトーリックコードの面に存在する plaquette 演算子、番号 1 や番号 2 の plaquette 演算子は頂点に存在する star 演算子とみなせることが分かる。すなわち、ハニカムコードの ISG は下図のように仮想的に定義された六角格子のトーリックコードにおける基底状態と対応づけられる。³⁹(図 36)

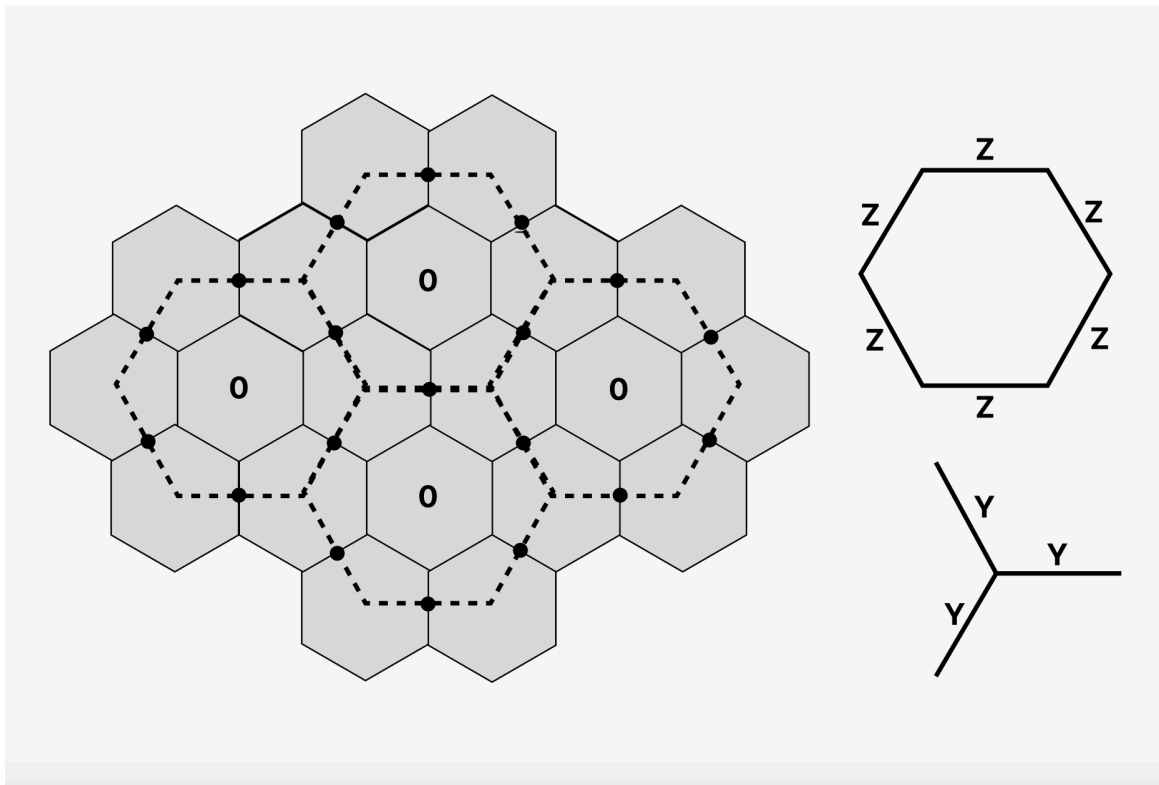


図 36: 六角格子上のトーリックコード。測定を行った边上に有効スピンがあると考え、点線で示されたような仮想的な六角格子を考えることができる。ただし、図では 0 番目のチェック演算子の測定が終了した場合を表示している。番号 0 の plaquette 演算子は仮想的な六角格子のトーリックコードでは plaquette 演算子に対応する一方、番号 1,2 の plaquette 演算子は仮想的な六角格子のトーリックコードでは star 演算子に対応している。式 (77)、(78) を参照。))

³⁹普通のトーリックコードでは Plaquette 演算子に Z , star 演算子に X を用いるが、Pauli 行列 X, Y, Z は互いにユニタリー変換で移り合うので、どの二つを用いるかは重要ではないことに注意しよう

六角格子上的トーリックコードの場合も、正方格子のトーリックコードと同様の性質がある。まず、1.2.1節の式(9)の議論が適用できて、種数 g の表面で基底状態は 4^g 重に縮退する。⁴⁰また、経路演算子を考えることで頂点の e 粒子と面の m 粒子を考えることもでき、論理演算子はトーラスの非自明なループに沿った経路演算子である。このような仮想的な六角格子上のトーリックコードの論理演算子を元のハニカムコードに翻訳しなおせば残りの論理演算子が得られ、これらは「外部論理演算子」と呼ばれる。

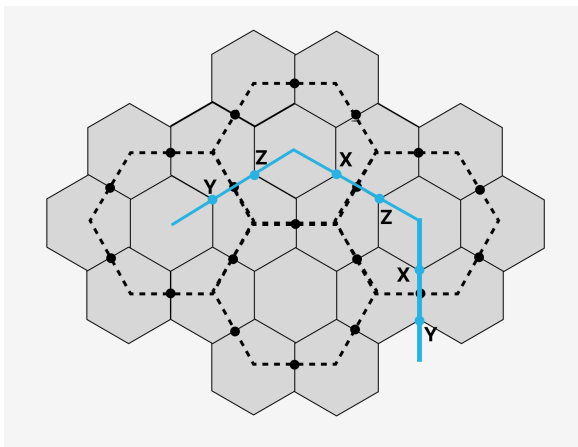


図 37: m 粒子に対応する外部論理演算子の例。点線で示された仮想的な六角格子上のトーリックコードで各有効スピンに対して Y をかけていくことは、ハニカムコードの言葉では α -link に対して σ^α 以外の二つの Pauli 行列をかけていくということである。式(77)を参照。)

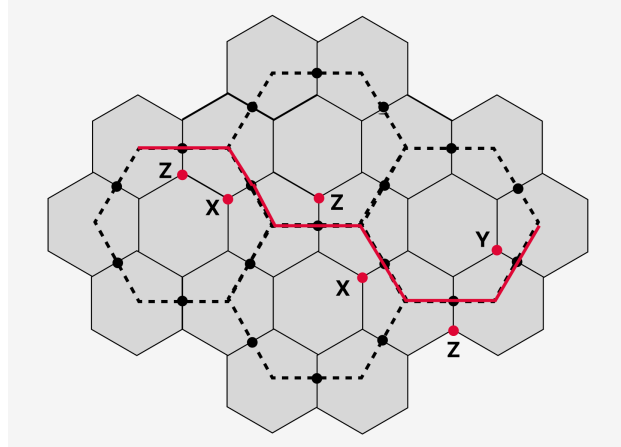


図 38: e 粒子に対応する外部論理演算子の例。点線で示された仮想的な六角格子上のトーリックコードで各有効スピンに対して Z をかけていくことは、ハニカムコードの言葉では α -link において一方のスピンに σ^α をかけていくということである。式(78)を参照。)

ここで、ハニカムコードの論理量子ビットは2つなのに、外部演算子が4つ、内部演算子が2つで合計6つの論理演算子があることに疑問を持つかもしれない。事実、4つの外部演算子と2つの演算子は独立ではない。実は、同じ方向の「非自明なループ」 $l_i (i=1, 2)$ に沿った e 粒子の経路演算子と m 粒子の経路演算子は $l_i (i=1, 2)$ に沿った内部演算子分の違いしかない。(図39)よって内部演算子と外部演算子の6つのうち独立なものは4つである。

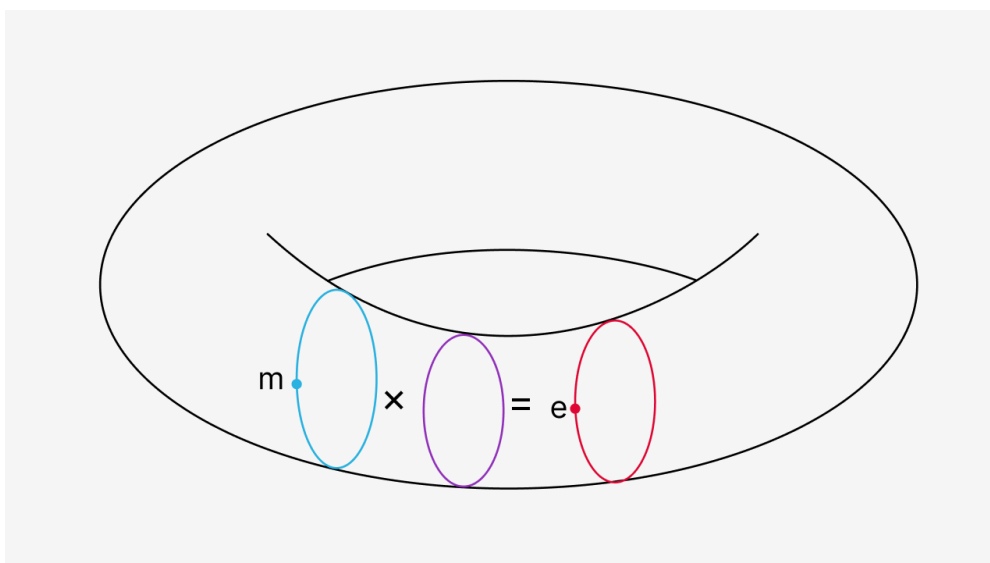


図 39: 外部演算子と内部演算子の関係。並行な方向の「非自明なループ」に沿った外部演算子は仮想的な六角格子の上の e 粒子に対応するもの(赤色)と m 粒子に対応するもの(青色)の2種類があるが、実は一方に対してそれらと並行な内部演算子(紫色)をかけると他方が得られる。そのため、独立な論理演算子は実際には4つとなる。

⁴⁰基底状態の縮退度は格子の形状に依存しない「トポロジカル」な量である

4.8 誤り訂正

4.8.1 エラーモデル

論理量子ビットと論理演算子が定義できることはわかったので、次にハニカムコードにおけるエラーについて考える。はじめに「エラー」というものを理論的に必要十分にモデル化しておこう。まず、各チェック演算子の測定操作にエラーはなく、測定操作の合間に物理的量子ビットに対するパウリエラーがランダムに起こると仮定して良いことに注意しよう。その理由を考えるために、例えば XX のチェック演算子で測定エラーが生じたとしてみよう。この時、

$$(Z \otimes I) \left(\frac{1 \pm X \otimes X}{2} \right) (Z \otimes I) = \frac{1 \mp X \otimes X}{2} \quad (\text{複合同順})$$

なので、測定エラーが起こったと考える代わりに XX のチェック演算子の測定の直前と直後に一方のスピンの対して Pauli Z エラーがおこったと仮想的に考えても同じことだと気づく。よって、「測定エラー」という種類のエラーは全くないとしてしまって問題ないのである。

また、一つの物理的量子ビットが $P_1 P_1, P_2 P_2$ 型のチェック演算子の測定を順に受けたとする。この時、 $P_1 P_1$ のチェック演算子と $P_2 P_2$ のチェック演算子の合間に起こるエラーは P_1, P_2 のみであると仮定して良いことに注意しよう。なぜなら、

$$XY = iZ, \quad ZX = iY, \quad YZ = iX$$

より、Pauli 行列のうち独立なものは2つであるためである。さらに、任意の Pauli 行列 P に対して

$$\left(\frac{1 \pm P}{2} \right) P = P \left(\frac{1 \pm P}{2} \right) \quad (\text{複合同順})$$

なので、チェック演算子の合間に起こった σ^α のエラーは $\sigma^\alpha \sigma^\alpha$ のチェック演算子の測定の前後どちらで起こったと考えようが測定結果には影響を与えない。これらを総合すると、「測定操作にエラーは生じず、 PP のチェック演算子を測定した直後において P エラーのみが起こる」と考えてよいと分かる。

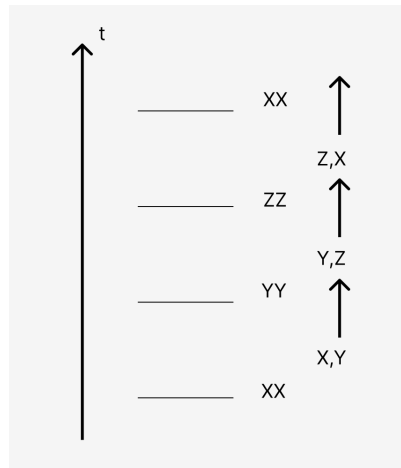


図 40: 単一の物理的量子ビットに生じるエラーのモデル。図式は下から上へと時間発展するように読む。まず、測定エラーは Pauli エラーで代用できるため、生じないとして良い。また、Pauli 行列として独立なものは2つなので、起こるエラーは前後の測定基底の Pauli 行列のみであるとして良い。さらに、同種の Pauli 行列は交換するため、エラーをチェック演算子の測定の前後で入れ替えてしまうことができる。すると、「測定操作にエラーは生じず、 PP のチェック演算子を測定した直後は P エラーのみが起こる」と考えることで、ありうるエラーを全てカバーできることになる。図では下から順に XX, YY, ZZ, XX のチェック演算子を行っており、合間に起こる Pauli エラーのうち片方の種類をチェック演算子に対して「すり抜け」させることで前述したエラーモデルの状況が得られる様子を示した。

4.8.2 シンドロームエラーの時空間配置

次に、誤り訂正の方法を説明する。以下、生じるエラーについて前述したモデルを仮定する。まず、ハニカムコードではエラーが生じたのかどうかを plaquette 演算子の固有値で判定する。ただし、固有値は直接測定するわけではなく、直前の2回のチェック演算子の測定結果から計算する。例えば、直前の2回の測定で番号0,1のチェック演算子を測定した場合、それらの積を計算することで番号2の plaquette 演算子の固有値を求めることができる。plaquette 演算子は常に ISG の要素なので、エラーが全くなければ固有値はいつでも +1 となる。しかし、現実には測定の合間に Pauli エラーが起こるため、Plaquette 演算子の固有値は ± 1 の両方の値をとりうる。このパターンからどのようにエラーが生じたのかを推定するのである。

まず、物理的量子ビットに対する単一のエラーがその後の plaquette 演算子の固有値の計算結果にどのような影響を及ぼすのかを考えてみよう。一例として、番号0の XX チェック演算子の測定直後に、一方の物理的量子ビットでエラーが生じた場合を考えよう。エラーモデルの仮定から、このエラーは X である。エラーに引き続いて番号1,2のチェック演算子を測定する際、これらのチェック演算子は一方が YY、もう一方が ZZ のチェック演算子なので、X とは反交換する。すなわち、X エラーによって次の2つの番号のチェック演算子の測定結果は反転する。よって、0番のチェック演算子と1番のチェック演算子の測定結果から計算される2番の plaquette 演算子の固有値は反転し、1番のチェック演算子と2番のチェック演算子の測定結果から計算される0番の plaquette 演算子の固有値は反転せず、2番のチェック演算子と0番のチェック演算子の測定結果から計算される1番の plaquette 演算子の固有値は反転する。(図 41)

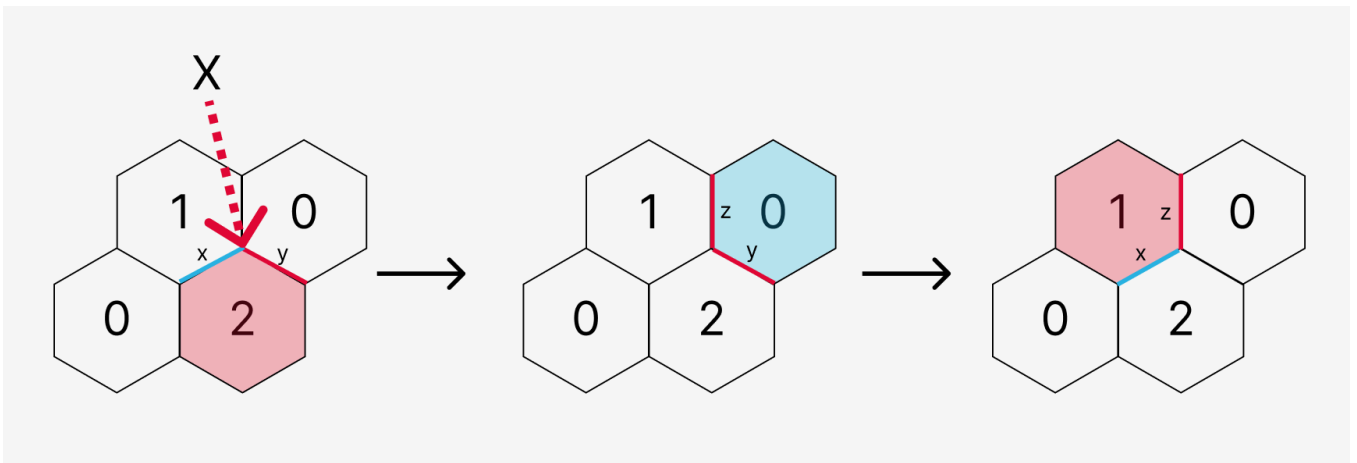


図 41: 単一のエラーに伴う plaquette 演算子の固有値の変化。図式は左から右に時間発展するように読む。赤はエラーの結果反転する部分に対応し、青は反転しないものに対応する。チェック演算子の反転が2つ起こると plaquette 演算子の計算結果は変化しないことに注意しよう。

このように、単一のエラーは2つの plaquette 演算子の反転を引き起こす。ここで、反転した2つの plaquette 演算子の配置は、空間的には隣接するが時間的には隣接しないことに注意しよう。具体的には、以下のベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 0\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} + 0\right), 1 \right) \\ \mathbf{s}_2 &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right), 1 \right) \\ \mathbf{s}_3 &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right), 1 \right) \end{aligned}$$

を定義したとき、単一エラーによって影響を受ける2つの plaquette 演算子の時空間 (x, y, t) における相対位置は

$$\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2, \quad \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3, \quad \mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_1$$

の3つのベクトルのどれかで表されることが分かる。例えば、上の図 41 の場合、二つの赤色の面は平面内での相対位置が y 方向、時間的には2ステップだけ離れているので、番号2の赤色の面から見た番号1の赤色の面は時空間における相対位置は $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ で表される。(図 42 も参照)

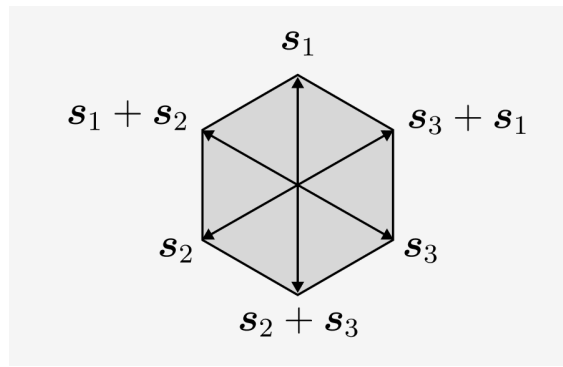


図 42: $(x, y, t) \rightarrow (x, y)$ に射影した時のベクトル s_1, s_2, s_3

よって、この3つのベクトル $s_1 + s_2, s_2 + s_3, s_3 + s_1$ によって生成される格子点上の上に単一のエラーから生じた plaquette の反転が対になって生じる。これは、トーリックコードに経路演算子が作用して e 粒子が対になって生じる図 20 の状況と同等である。よって、同様に minimum weight perfect matching algorithm(MWPMA) を用いて2つの点をマッチングすることで、原因となるエラーが時空点のどこで起きたのかを比較的高い確率で特定できる。ただし、これ3つのベクトルで生成される格子点は時空点全体のうち半分(偶格子 or 奇格子)のみをカバーするため、全体のエラーをカバーするためには偶格子と奇格子の2つの格子でのマッチングを行う必要があることに注意しよう。(図 43)

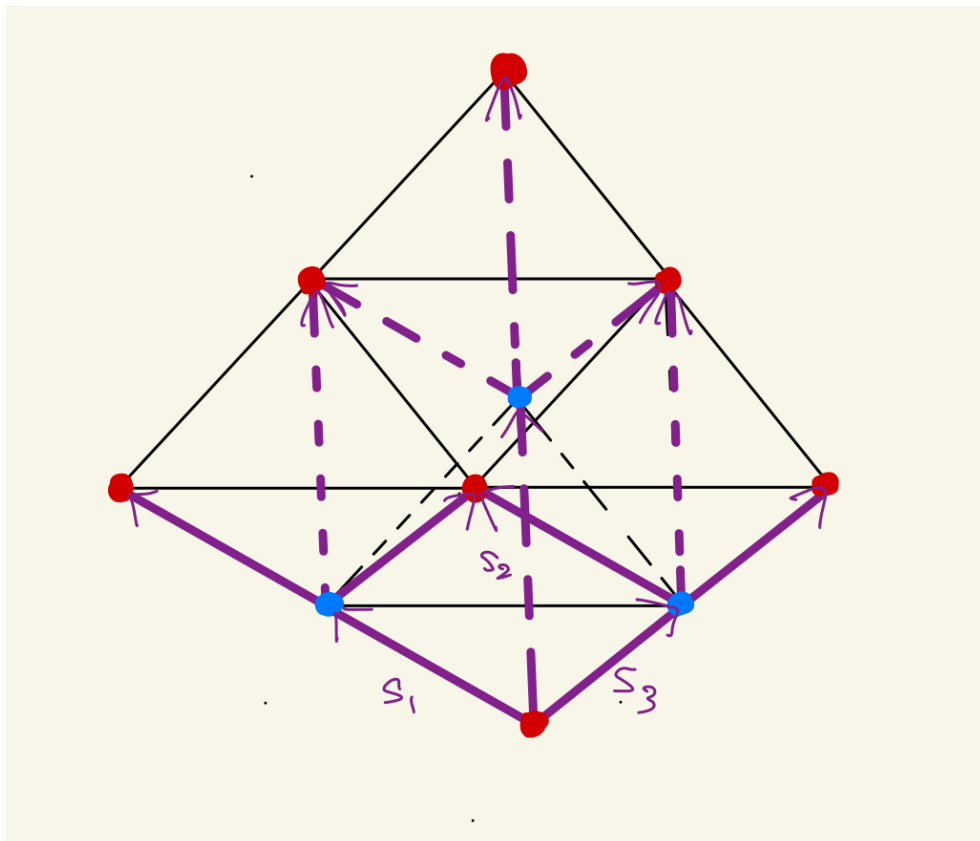


図 43: $s_1 + s_2, s_2 + s_3, s_3 + s_1$ によって生成される正四面体型の格子点。縦が時間方向に対応している。最下点となる赤点を起点にしたとき、この3つのベクトルで生成される格子点は赤点の部分のみである。時空点全体は赤点(偶格子)と青点(奇格子)の二つの部分からなるため、誤り訂正をする際は2つの格子でマッチングを行う必要がある。

また、トーリックコードの章でみたように MWPMA を使ったマッチングでは誤り訂正の閾値が存在するため、ハニカムコードの誤り訂正にも閾値が存在するということがわかる。

ハニカムコード まとめ

i) ハニカムコードは、チェック演算子の測定順を無視したサブシステムコードの見方のもとでは論理量子ビットを持たないが、周期的な測定をすれば論理量子ビットを符号化できるようになる。種数1の表面では、論理量子ビットの数は2つである。

iii) ハニカムコードの論理演算子は連続変形で一点に縮められない「非自明なループ」にそってチェック演算子をかけた「内部論理演算子」と、仮想的な六角格子上のトーリックコードにおける4つの論理演算子に相当する「外部論理演算子」に分けられるが、並行な外部論理演算子は互いに内部論理演算子をかけることでもう一方にうつるため、独立な論理演算子は4つである。

iv) ハニカムコードでは時刻 t における plaquette 演算子の固有値を時刻 $t, t-1$ におけるチェック演算子の測定結果から計算する。物理的なエラーが全くなければ plaquette 演算子は常に固有値 +1 となる。物理的なエラーが生じた時は plaquette 演算子の固有値の異常が時空点中でペアになって生じるため、対になるエラーをマッチングすることで元のエラーの時空点での位置を特定できる。それには正四面体型の立体的な格子における MWPMA を考えればよく、トーリックコードの場合と同じく誤り訂正には閾値 p_c が存在する。

4.9 現状と展望

ここまで、ハニカムコードの定義、論理量子ビット、論理演算子、誤り訂正の方法などを簡単に紹介してきた。本記事の議論は全てトーラス上で行ったが、実際の物理系で実装する際は平面の境界条件が便利である。この場合でも、前述の議論に多少の変更を加えることで同様の性質が出現することが知られている [9]。

ハニカムコードの利点としては、トーリックコードと同様に誤り定性ができ、なおかつ測定する演算子が2体のスピン演算子となっている点が挙げられる。このように測定するスピン演算子減らせば、測定エラーが減少したり、測定の際に必要な量子回路を簡素化できるのではないかと期待されている。また、ハニカムコードは 3.2.4 節で紹介した「マヨラナゼロモード」(MZM) を特殊な物理系で測定するという手法 [12] との相性の良さが指摘されており、この手法と組み合わせるとトーラスと平面の両方の場合で表面符号に劣らないくらい良い誤り訂正の閾値が得られるという数値計算の結果が報告されている [10][11]。時間方向の自由度を活用したハニカムコードのような誤り訂正手法 (Floquet Code) に関しては他にも様々な提案がされつつあり、今後の進展が期待される。

4.10 番外編：ハニカム格子模型と測定操作の物理

ハニカムコードでは、ハニカム格子模型のハミルトニアンに現れる項を周期的に測定したのであった。そこで、この二つの関係が自然と気になるであろう。一般に、スピンの強磁性相互作用があると低温でスピン同士はその方向に向きを揃えようとするが、チェック演算子の射影測定で +1 の結果を得た後の状態は $|\uparrow\uparrow\rangle$ または $|\downarrow\downarrow\rangle$ となり、これもまた向きが揃う。従って、射影測定はスピンの相互作用と類似した効果をもたらすのではないかとも思える。そう考えると、 x, y, z の三種類のチェック演算子の測定は「磁性体のフラストレーション」ならぬ「測定操作のフラストレーション」と見ることができそうである。これはハニカム格子模型における通常の「磁性体のフラストレーション」とどのような点で共通し、どのような点で異なるのだろうか。

それを考えるために、ハニカム格子模型のハミルトニアンを測定操作の言葉で焼き直すことを考えよう。既に述べた通り、チェック演算子は互いに交換しないためその全てを同時測定することはできない。よって、測定するチェック演算子の部分集合をその都度決定する必要がある。一例として、ハニカムコードのように $0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$ の周期でチェック演算子を測定する代わりに、 x, y, z, x, y, z, \dots の周期でチェック演算子を測定することが考えられる。しかし、これではスピンの揃う向きが x, y, z, x, y, z, \dots と周期的に変化するだけであまり面白くなさそうである。そこで、毎回確率 p_α ($\alpha = x, y, z, p_x + p_y + p_z = 1$) で α -link のチェック演算子をランダムに一つだけ測定することにする。こうすれば p_α というパラメータで α -link を測定する頻度を表すことができ、スピン間相互作用の強さを表すパラメータ J_α とも $J_\alpha \leftrightarrow p_\alpha$ と対応が付きそうである。このような考えのもと、上記設定でエンタングルメントエントロピー (EE)⁴¹ という量の振る舞いに基づいて相分類を行った結果が近年得られた [13][14]。

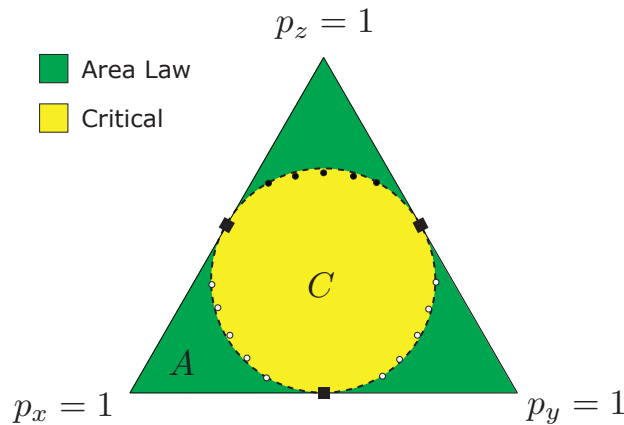


図 44: 数値計算によって得られた相図。緑で示された”area Law”の相ではエンタングルメントエントロピー S_A が領域 A の境界の長さ l に対して $S_A \sim l$ で増加するのに対して、黄色で示された”Critical”の相では $S_A \sim l \ln l$ で増加するという違いがある。この図は [14] から引用した。

一目見て分かる通り、ハニカム格子模型の相図 30 の境界が直線であったのとは違って、相の境界面は円をなしているように見える⁴²。また、”Critical”の相に見られるような $S_A \sim l \ln l$ の形のスケールリングはハニカム格子模型には見られない。一方、”Area Law”の相と”Critical”の相ではトポロジカルエンタングルメントエントロピー S_{topo} ⁴³ が等しく、この点はハニカム格子模型の A 相と B 相で S_{topo} が同じになる点と類似している [13]。このように、このモデルとハニカム格子模型は類似点もあれば、相違点もある。

また、実は plaquette 演算子に類似した六角格子型の演算子の測定に対しても全く同じような相図を描くことができることが指摘された [15]。このように、測定操作を駆使して量子状態を変化させたり量子計算への応用を考えたりする、という話題は近年流行しているテーマの一つであり、興味深い考察対象であると思われる。今後の進展が期待される。

⁴¹エンタングルメントエントロピーについては付録 B を参照

⁴²なお、これが実際に円となることは証明されていないようである。

⁴³とポロ直ルエンタングルメントエントロピーについては付録 B を参照

おわりに

本記事ではトーリックコードとハニカムコードについてレビューを行った。重要な点を再度要約しておこう。

- トーリックコードの基底状態は「トポロジカル秩序相」と呼ばれる理論的に興味深い状態にあり、「局所摂動に対する頑強性」をもつ。これは量子誤り訂正という実用的な観点からも重要である。
- ハニカム格子模型はマヨラナ演算子を導入することで厳密に解け、A相とB相という二つの相が存在する。この模型で周期的な測定を取り入れた「ハニカムコード」は少ないスピンの測定で量子情報の符号化と誤り訂正が可能である。この二つの話題の理論的關係に関しては、今後の進展が期待される。

ハニカムコードを理解する上でトーリックコードの理解は欠かせないとはいえ、二つの模型を紹介したため全体的に雑多な印象を与える記事になってしまったことは残念である。逆に言えば、比較的幅広い内容に触れることができたのではないかと思う。もしも今回の記事で面白いと思う話題があったら、末尾に記した参考文献を読んでみるのも良いかもしれない。

5 付録

5.1 付録 A：ボソン、フェルミオン、エニオン、統計性

本文中で「エニオン」というボソンでもフェルミオンでもない統計性を持つ準粒子について考えた。そこで、そもそもボソンやフェルミオンとは何かについて以下で補足する。

まず、量子力学では同種粒子を原理的に区別できないということが知られている。つまり、ある時点で同種粒子に便宜上 1, 2 などと番号をつけても、時間発展が起きるとその番号づけに意味がなくなってしまうのである。例えば、下図のように番号 1, 2 がついた始状態から粒子が時間発展したとき、終状態としてありうる 2 つの場合のうちどちらになったのかは原理的に知る事ができない。⁴⁴

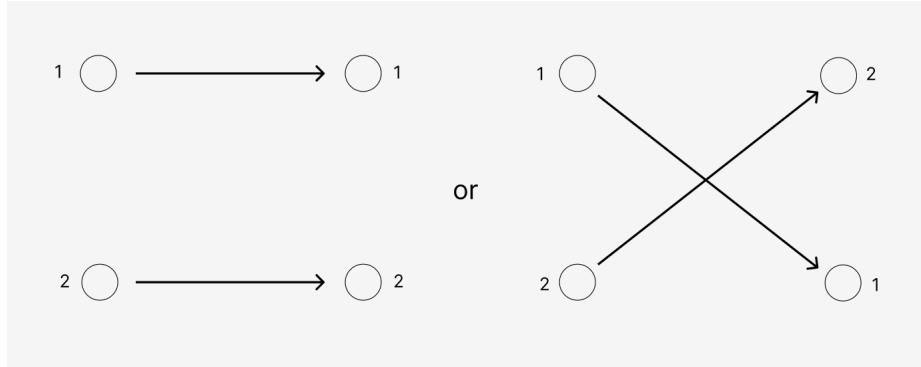


図 45: 同種粒子の時間発展。素粒子の散乱実験などでよくあるセットアップである。時間発展で二つの場合のうちどちらが起きたのかは原理的に区別不可能であるため、始状態でつけた番号は終状態では意味をなさない。

従って、番号 1 の粒子が上で番号 2 の粒子が下の状況 (上図左) を表す波動関数 $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ と番号 1 の粒子が下で番号 2 の粒子が上の状況 (上図右) を表す波動関数 $\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ は複素数倍の違いしかないことがわかる。⁴⁵

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \alpha\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \quad (79)$$

全く同じ議論から

$$\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \alpha\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (80)$$

となるので、

$$\alpha^2 = 1 \quad (81)$$

よって同種粒子の入れ替えによって波動関数は ± 1 倍のどちらかになるということがわかる。このうち入れ替えで波動関数が $+1$ 倍される粒子は**ボソン**と呼ばれ、例えば光子はこのカテゴリーに属する。一方、入れ替えで波動関数が -1 倍される粒子は**フェルミオン**と呼ばれ、例えば電子やクォークはこのカテゴリーに属する。

一見すると、入れ替えで波動関数に符号がつくかどうかなどということは些細な違いに感じられるかもしれない。しかし、この性質は統計力学を考えるときに重要になる。具体的には、「二つ以上の同種のフェルミオンは同じエネルギー固有状態を取れない」という、**Pauli の排他律**と呼ばれる性質をもたらす。数式で考えてみよう。一般に、二つの粒子をまとめて考えた系の波動関数 $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ は、それぞれの粒子に対する波動関数 $\phi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r})$ を使って

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \alpha\phi(\mathbf{r}_1)\psi(\mathbf{r}_2) + \beta\phi(\mathbf{r}_2)\psi(\mathbf{r}_1) \quad (82)$$

と書ける。フェルミオンの性質 $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\Psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ を満たすためには $\alpha = -\beta$ とならねばならないので、

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \alpha(\phi(\mathbf{r}_1)\psi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_2)\psi(\mathbf{r}_1)) \quad (83)$$

⁴⁴詳しい測定をしてどちらが起きたのかを特定しようとする、測定の反作用によって元の時間発展が乱されてしまう。

⁴⁵量子力学では、複素数倍の違いしかない状態は同じ状態である。

ところが、同種のフェルミオンに対しては $\phi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})$ となるため、波動関数が0となってしまうことがわかる。これは Pauli の排他律を意味する。上述の議論において、入れ替えで波動関数に負号がつくことが重要であったことに注意しよう。

このように、ボソンの場合は各状態を無数の粒子が占有することができる一方、フェルミオンの場合は Pauli の排他律のため各状態を一つの粒子しか占有できないので、物理現象にも大きな違いが生じる。例えば、低温で巨視的な数の粒子が基底状態を占有する Bose-Einstein 凝縮と呼ばれる現象はボソンでのみ生じ、フェルミオンでは決して生じない。このように、波動関数につく符号の性質は (統計力学の) さまざまな性質に影響を及ぼすため、粒子の**統計性**と呼ばれて重視される。

ちなみに、上記の論法が成り立つのなら、エニオンはそもそも存在してはいけないのではないかと思うかもしれない。しかし、実は「2回入れ替えると状態が元に戻る」という性質は空間が3次元以上の場合には成り立つのだが、空間が2次元の場合では必ずしも成り立たない。この理由を以下でみよう。まず、粒子1と粒子2を2回入れ替える操作は、粒子1を粒子2のまわりに一周させることに対応する。ここで3次元の場合、どのような経路 C_1 で粒子1を回したとしても、連続変形で何もしない操作 C_0 に帰着できる。(図46) によって、波動関数は元に戻らなければおかしい。

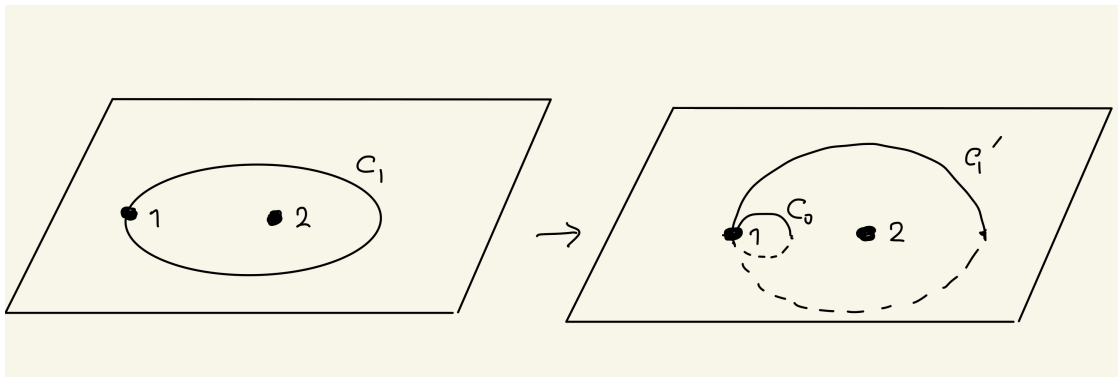


図 46: 3次元空間内での粒子の軌跡の連続変形。はじめ平面内にあった経路 C_1 を平面に垂直な方向に「持ち上げる」ことで連続的に入れ替えを一切しない操作 C_0 にすることができる。

一方、二次元に限定された系の場合、他方の粒子に「引っかかってしまう」ため、 C_1 は連続的には C_0 に変形できない。(図47) によって、2回の入れ替えで状態が必ずしも元に戻るとは限らない。そのため、2次元系という限定された状況に限って「エニオン」が存在しうることになる。⁴⁶

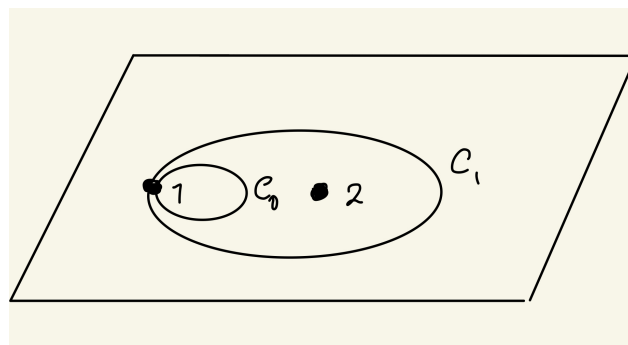


図 47: 2次元空間内での粒子の軌跡の連続変形。平面内の連続変形で経路 C_1 を C_0 にすることはできない。

⁴⁶ちなみに、素粒子は3次元空間の粒子なので、エニオンにはならない。エニオンになるのは準粒子である。

5.2 付録 B：トポロジカル秩序相

本文中で、トーリックコードの基底状態が「トポロジカル秩序相にある」と述べた。これが何を意味するのかについて、ミニマムな予備知識を想定して補足する。まず、「通常の物質の相」の確認から始める。

5.2.1 ランダウ理論とトポロジカル秩序相

通常の相転移は、「系の対称性の変化」という観点で理解できる。例えば、液体の水が凍って氷になるという相転移を考えよう。液体は特別な方向を持たないため、はじめ系は回転対称性を持っている。一方、相転移が起こって氷になると、特別な方向が出現するので回転対称性は破れる。すなわち、液体と固体という二つの異なる相では系のもつ対称性が異なるので、二相間の相転移は系の対称性の変化として記述できる。

これに加えて、通常の相では、その相を特徴づける「秩序変数」というものを定義することができる。例えば、ある温度を境に磁性が消失する「磁気相転移」という現象があるが、この場合「磁化」と呼ばれる量が転移温度 T_c より高い温度では 0、それより低い温度では 0 でない有限の値となる。つまり、磁化の値を見れば系がどの相にあるかを明確に決めることができ、高温相から低温相への相転移は磁化の値の変化として記述することができる。

このように、「対称性の変化」や「秩序変数」といった概念を用いて相転移を記述する理論は「ランダウ理論」と呼ばれ、通常の物質の相を記述する上では大成功を収めてきた。ところが、一昔前に、ランダウ理論では記述することができない「トポロジカル秩序相」(TO) と呼ばれる新奇な相が見つかった。これは、以下のような性質を持つ物質の相である [4]。

トポロジカル秩序相の性質

1. 長距離に及ぶエンタングルメントが存在する
2. エニオンが出現する
3. (境界条件に依存した形で) 基底状態が縮退し、励起状態との間にはエネルギーギャップが存在する

このうち、一番目の性質に登場する「エンタングルメント」とは、量子状態に存在する非局所的な相関を表す量である。(詳しい定義はすぐ後で述べる) これが長距離にわたって存在するということは、大雑把言えば TO が長距離にわたって「絡み合った」ような複雑な状態であることを意味する。この性質のため、TO に対しては局所的な秩序変数というものがそもそも定義できず、伝統的なランダウ理論では記述できない状態となる。では、ある状態が TO であるか否かはどのように判定したら良いのであろうか。その基準を与えるのが、**トポロジカルエンタングルメントエントロピー (TEE)** と呼ばれる量である。本文中の google の実験でも、トーリックコードの基底状態が TO になっていることを示すために TEE の測定がなされた。以下、TEE やこの google の実験を理解するために必要な諸知識を準備していく。

5.2.2 エンタングルメント

まず、エンタングルメントについて説明する。いくつかの系が合わさってできた複合系 (例えば、多数の粒子があるような系) のヒルベルト空間を \mathcal{H} とする。この部分系として、 \mathcal{H}_A と \mathcal{H}_B を考えるとする。すなわち、

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (84)$$

という分割を考える。この時、注目する状態 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ が、どのような $|\phi_A\rangle \in \mathcal{H}_A, |\phi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$ を用いても

$$|\psi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle \quad (85)$$

のように分解できないとき、部分系 A と B の間にエンタングルメントがあるという。直観的には、「A のみだけで完結した状態 $|\phi_A\rangle$ 」と「B のみだけで完結した状態 $|\phi_B\rangle$ 」にわけることができないということであり、非局所的な相関があるということに対応する定義となっている。

5.2.3 密度演算子

一般にある量子系が確率 p_i で互いに直交する状態 $|\phi_i\rangle$ ($i = 1, 2, \dots, n$) のいずれかになっている、という状況が考えられる。これは**混合状態**と呼ばれる状態であり、**密度演算子**と呼ばれる以下のような演算子で記述される。

$$\rho = \sum_{i=1}^n p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i| \quad (86)$$

ただし、 $|\phi_i\rangle$ や $\langle \phi_i|$ はディラックのブラケット記法と呼ばれる記法で、 $\langle \phi_i|$ は右にきた状態に対して状態 $|\phi_i\rangle$ との内積を計算する、という演算子を表す。例えば、

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |\phi_i\rangle$$

ならば

$$\begin{aligned} \langle \phi_j | \psi \rangle &= \sum_{i=1}^n c_i \langle \phi_j | \phi_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \delta_{ij} \\ &= c_j \end{aligned}$$

である。ただし、二行目では、 $|\phi_i\rangle$ 同士が互いに直交するため、内積 $\langle \phi_j | \phi_i \rangle$ が $i = j$ の時のみ 1、その他の場合は 0 となることを用いた。 $(\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタ記号と呼ばれ、 $i = j$ の時 1、 $i \neq j$ の時 0 である) ここで、密度行列を $|\phi_i\rangle$ 基底で成分表示すると、定義から

$$\rho = \begin{pmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{pmatrix}$$

である。確率の和は 1 なので、この表示から ρ は $\text{Tr}(\rho) = 1$ を満たすことがわかる。また、 $p_1 = 1$ で他の p_i が 0 になっている場合、すなわち状態の確率混合がない**純粋状態**の場合、

$$\rho = |\phi_1\rangle \langle \phi_1| \quad (87)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad (88)$$

となり $\rho^2 = \rho$ の**冪等条件**が成り立つこともわかる。⁴⁷

5.2.4 エンタングルメントエントロピー

さて、再び全系のヒルベルト空間 \mathcal{H} とその部分系への分割 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ を考える。 \mathcal{H}_A の一つの正規直交基底 $|i\rangle$ と \mathcal{H}_B の一つの正規直交基底 $|j\rangle$ を用いると、 $|i\rangle \otimes |j\rangle$ は \mathcal{H} の正規直交基底をなし、全系の状態に対する密度演算子は

$$\rho_{AB} = \sum_{i,j} c_{ij} (|i\rangle \otimes |j\rangle)(\langle i| \otimes \langle j|) \quad (89)$$

⁴⁷逆に、純粋状態と混合状態を密度行列を使って定義する流儀もある

と書ける。ここで、 \mathcal{H}_B の一つの正規直交基底 $|j\rangle$ に関して、「トレースアウト」と呼ばれる以下の操作を考える。

$$\rho_A = \sum_j \langle j| \left(\sum_{i,j} c_{ij} (|i\rangle \otimes |j\rangle) \langle i| \otimes \langle j| \right) |j\rangle \quad (90)$$

ここで得られた ρ_A は縮約密度行列と呼ばれる。これを用いると、エンタングルメントエントロピー (EE) と呼ばれる以下の量を定義することができる。

$$S_A = -\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A) \quad (91)$$

これが名称の通り、エンタングルメントの量を定量的に表す指標になっていることを説明しよう。

まず、 $\rho_{AB} = |\Psi\rangle \langle \Psi|$ とし、 $|\Psi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$ であったとする。この時、A と B の間にエンタングルメントはないはずであるから、EE は 0 になるのが望ましい。実際、 $|\Psi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$ の時

$$\rho_{AB} = \left[\left(\sum_i a_i |i\rangle \right) \otimes \left(\sum_j b_j |j\rangle \right) \right] \left[\left(\sum_i a_i^* \langle i| \right) \otimes \left(\sum_j b_j^* \langle j| \right) \right]$$

よって

$$\begin{aligned} \rho_A &= \sum_j \langle j| \left[\left(\sum_i a_i |i\rangle \right) \otimes \left(\sum_j b_j |j\rangle \right) \right] \left[\left(\sum_i a_i^* \langle i| \right) \otimes \left(\sum_j b_j^* \langle j| \right) \right] |j\rangle \\ &= \left(\sum_j |b_j|^2 \right) |\phi_A\rangle \langle \phi_A| \\ &= |\phi_A\rangle \langle \phi_A| \end{aligned}$$

となり、縮約密度行列は純粋状態になることがわかる。ここで、 λ_i を ρ_A の i 番目の固有値として

$$S_A = -\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A) = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i \quad (92)$$

が成り立つ⁴⁸が、純粋状態の密度行列は式 (88) のような行列表示を持つので、 $\lambda_i = 0$ or 1 である。よって

$$S_A = 0 \quad (93)$$

となり、確かに EE も 0 になることがわかった。

次に、エンタングルメントがある例として最も有名な Bell ペアに対して EE を計算してみよう。これは

$$|\Psi\rangle_{Bell} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) \quad (94)$$

で表される状態である。この状態は 1 番目のスピンと 2 番目のスピンの測定結果が常に揃うという相関を持っており、エンタングルしている。2 番目のスピンをトレースアウトすることで、縮約密度行列を計算すると、

$$\rho_1 = \frac{|\uparrow\rangle \langle \uparrow| + |\downarrow\rangle \langle \downarrow|}{2} \quad (95)$$

となるため、

$$S_A = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \ln 2 \quad (96)$$

このように、EE は確かにエンタングルメントの有無を判定することができている。

⁴⁸最右辺が shanon entropy と同じ形をしている

5.2.5 面積則とトポロジカルエンタングルメントエントロピー

このように、EEはエンタングルメントの指標として使えることがわかった。では、量子系におけるエンタングルメントは、注目する系のサイズに対してどのように増えるのであろうか。一般に、短距離に及ぶエンタングルメントしかないような系では、部分系 A とそれ以外 \bar{A} の間のエンタングルメントは、 A と \bar{A} の境界近辺からの寄与が大半になる。なぜなら、 A のうち \bar{A} から遠く離れた部分は \bar{A} とはエンタングルしておらず、EEに関係なくなってしまうからである。よって、EEは大まかには「面積則」と呼ばれる以下のような増え方を示す。

$$S_A \sim \alpha l \quad (l \text{ は } A \text{ の境界 } \partial A \text{ の長さ}) \quad (97)$$

ところが、トポロジカル秩序相のような長距離にわたるエンタングルメントを持つ系では、これに加えて

$$S_A \sim \alpha l - \gamma + \dots \quad (l \text{ は } A \text{ の境界 } \partial A \text{ の長さ}) \quad (98)$$

のような部分系のサイズ l に依存しない定数項 $-\gamma$ が出現することが知られている。⁴⁹これは系の大局的な性質を反映しており、**トポロジカルエンタングルメントエントロピー (TEE)** と呼ばれる。トポロジカル秩序相はこれが0になるかならないかで判定することができる [6]。

さて、 $-\gamma = S_{topo}$ は部分系のサイズや取り方に依存しない、系に固有の定数なのであった。そこで、考えている系を図 48 のように3つの部分系 A, B, C とその補集合 D に分割すれば、以下のように

$$S_{topo} = S_A + S_B + S_C - S_{AB} - S_{BC} - S_{CA} + S_{ABC} \quad (99)$$

という式で S_{topo} を計算することができると分かる。ただし、 $AB = A \cup B, ABC = A \cup B \cup C$ などの記法を用いた。領域を上手く定めることで、EEの面積則 $S_A \sim \alpha \partial A$ からの寄与が相殺されていることに注意しよう。このように、TOの指標となる TEE はいくつかの部分系に対する EE から計算することができ、特にトーリックコードの基底状態の場合は理論的計算から $S_{topo} = -\ln 2$ になることが知られている。

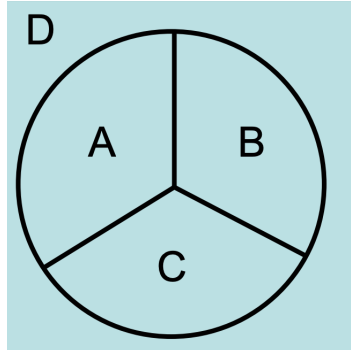


図 48: S_{topo} を計算するための部分系の取り方。図は [6] から引用した。

5.2.6 トーリックコードの基底状態とトポロジカル秩序相

前述したように、トポロジカルエンタングルメントエントロピー (TEE) はトポロジカル秩序相を特徴づける指標になる。ところが、この量を計算するために必要なエンタングルメントエントロピー (EE) を実験で測定するのは必ずしも容易ではない。そこで、本文中で紹介した google の実験では、EEの代わりに以下の式で定義される**第 n 種の Rényi エントロピー (RE)** という量を測定して TEE を計算している。

$$S_A^{(n)} = \frac{1}{1-n} \ln \text{Tr}[(\rho_A)^n] \quad (100)$$

ちなみに、 $n \rightarrow 1$ の極限でこの量は

$$\lim_{n \rightarrow 1} S_A^{(n)} = - \left. \frac{\partial}{\partial n} \ln \text{Tr}[(\rho_A)^n] \right|_{n=1} = - \left. \frac{\text{Tr}[(\rho_A)^n \ln \rho_A]}{\text{Tr}[(\rho_A)^n]} \right|_{n=1} = - \text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A) \quad (101)$$

⁴⁹ 詳細な議論は場の理論の高度な知識が必要なため、筆者の能力を超えている

となってエンタングルメントエントロピーと一致するので、RE は EE のある種の一般化になっているといえる。実は、TEE の定義式 (49) において、EE の代わりに任意の n に対する第 n 種の RE を用いても TEE の値は同じになることが知られている [16]。このことから、EE の代わりに RE を測定することが正当化される。

以下に、google の実験で得られたトーリックコードの基底状態に対する TEE の測定結果を示す。右下の図から、TEE は 0 ではない値をとることが示唆され、トーリックコードの基底状態が確かにトポロジカル秩序相の状態にあることが分かる。

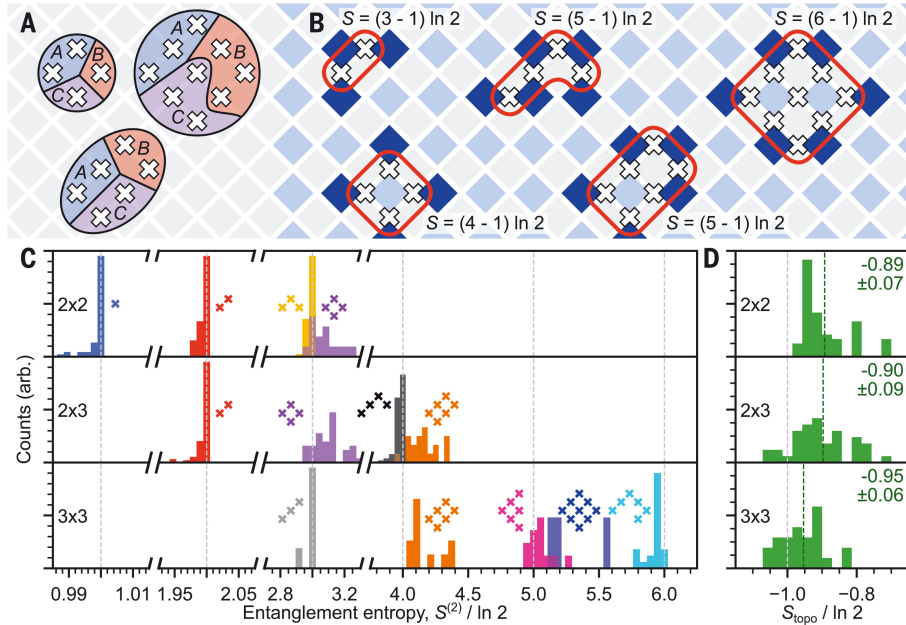


図 49: トーリックコードの基底状態のトポロジカルエンタングルメントエントロピー S_{topo} に関する実験結果。 $S_{topo}/\ln 2$ のデータが緑色で右下に示されている。 $S_{topo}/\ln 2 = 0$ ならばトポロジカル秩序相ではないということになり、 $S_{topo}/\ln 2 = -1$ ならば場の理論で計算された理論値と一致することになる。図から、少なくとも $S_{topo}/\ln 2 \neq 0$ にはなりそうであり、トポロジカル秩序相が実現していることが示唆される。図は [4] から引用した。

参考文献

- [1] Alexei Kitaev and Chris Laumann, "Topological phases and quantum computation", (2009) [arXiv:0904.2771](#).
- [2] Alexei Kitaev, "Fault-tolerant quantum computation by anyons", *Ann. Phys.*, 303(1), 2 – 30(2003), [arXiv:quant-ph/9707021](#)
- [3] Alexei Kitaev, "Anyons in an exactly solved model and beyond", *Ann. Phys.*, 321(1), 2 – 111 (2006), [arXiv:cond-mat/0506438](#).
- [4] K. J. Satzinger, Y. J. Liu, A. Smith, C. Knapp, M. Newman, C. Jones, Z. Chen, C. Quintana, X. Mi, A. Dunsworth, C. Gidney, I. Aleiner, F. Arute, K. Arya, J. Atalaya, R. Babbush, J. C. Bardin, R. Barends, J. Basso, A. Bengtsson, A. Bilmes, M. Broughton, B. B. Buckley, D. A. Buell, B. Burkett, N. Bushnell, B. Chiaro, R. Collins, W. Courtney, S. Demura, A. R. Derk, D. Eppens, C. Erickson, L. Faoro, E. Farhi, A. G. Fowler, B. Foxen, M. Giustina, A. Greene, J. A. Gross, M. P. Harrigan, S. D. Harrington, J. Hilton, S. Hong, T. Huang, W. J. Huggins, L. B. Ioffe, S. V. Isakov, E. Jeffrey, Z. Jiang, D. Kafri, K. Kechedzhi, T. Khattar, S. Kim, P. V. Klimov, A. N. Korotkov, F. Kostritsa, D. Landhuis, P. Laptev, A. Locharla, E. Lucero, O. Martin, J. R. McClean, M. McEwen, K. C. Miao, M. Mohseni, S. Montazeri, W. Mruczkiewicz, J. Mutus, O. Naaman, M. Neeley, C. Neill, M. Y. Niu, T. E. O'Brien, A. Opremcak, B. Pató, A. Petukhov, N. C. Rubin, D. Sank, V. Shvarts, D. Strain, M. Szalay, B. Villalonga, T. C. White, Z. Yao, P. Yeh, J. Yoo, A. Zalcman, H. Neven, S. Boixo, A. Megrant, Y. Chen, J. Kelly, V. Smelyanskiy, A. Kitaev, M. Knap, F. Pollmann, P. Roushan, "Realizing topologically ordered states on a quantum processor", *Science* **374** 1237-1241 (2021), [arXiv:2104.01180](#)
- [5] Alexei Kitaev and John Preskill, "Topological entanglement entropy", *Phys. Rev. Lett.* **96**, 110404 (2006), [arXiv:hep-th/0510092](#).
- [6] Eric Dennis, Alexei Kitaev, Andrew Landahl, and John Preskill, "Topological quantum memory", *J. Math. Phys.* **43**, 4452-4505 (2002), [arXiv:quant-ph/0110143](#).
- [7] Chenyang Wang, Jim Harrington, and John Preskill, "Confinement-Higgs transition in a disordered gauge theory and the accuracy threshold for quantum memory", *Ann. Physics* **303**, 31–58 (2003), [arXiv:quant-ph/0207088](#)
- [8] Matthew B. Hastings and Jeongwan Haah, "Dynamically generated logical qubits", *Quantum* **5** 564 (2021), [arXiv:2107.02194](#).
- [9] Jeongwan Haah and Matthew B. Hastings, "Boundaries for the honeycomb code", *Quantum* **6**, 693 (2022), [arXiv:2110.09545](#).
- [10] C. Gidney, M. Newman, A. Fowler, and M. Broughton, "A fault-tolerant honeycomb memory", *Quantum* **5**, 605 (2021).
- [11] Adam Paetznick, Christina Knapp, Nicolas Delfosse, Bela Bauer, Jeongwan Haah, Matthew B. Hastings, and Marcus P. da Silva, "Performance of Planar Floquet Codes with Majorana-Based Qubits", *PRX Quantum* **4**, 010310 (2023)
- [12] T. Karzig, C. Knapp, R. M. Lutchyn, P. Bonderson, M. B. Hastings, C. Nayak, J. Alicea, K. Flensberg, S. Plugge, Y. Oreg, C. M. Marcus, and M. H. Freedman, "Scalable designs for quasiparticlepoisoning-protected topological quantum computation with Majorana zero modes", *Physical Review B* **95**, 235305 (2017), [arXiv:1610.05289](#).
- [13] Adithya Sriram, Tibor Rakovszky, Vedika Khemani, and Matteo Ippoliti, "Topology, criticality, and dynamically generated qubits in a stochastic measurement-only Kitaev model", [arXiv:2207.07096](#)

- [14] Ali Lavasani, Zhu-Xi Luo, and Sagar Vijay, "Monitored Quantum Dynamics and the Kitaev Spin Liquid", [arXiv:2207.02877](#)
- [15] Guo-Yi Zhu, Nathanan Tantivasadakarn, and Simon Trebst, "Structured volume-law entanglement in an interacting, monitored Majorana spin liquid", [arXiv:2303.17627](#)
- [16] Steven T. Flammia, Alioscia Hamma, Taylor L. Hughes, and Xiao-Gang Wen, "Topological Entanglement Rényi Entropy and Reduced Density Matrix Structure", *Phys. Rev. Lett.* **103**, 261601 (2009), [arXiv:0909.3305](#)