

# 量子情報入門から高階量子演算まで

文責：Physics Lab. 2023 量子班班長 小泉勇樹

2023年5月11日

## 0 目次

1	初めに	2
2	量子情報理論の基礎 [1-3] <sup>*1</sup>	3
2.1	量子論という枠組み	3
2.2	状態の密度演算子による記述	4
2.3	測定 [4, 5]	7
2.4	合成系, エンタングルメント	10
2.5	時間発展	14
3	高階量子演算 [6]	18
3.1	Choi 行列と量子超通信路	19
3.2	1-slot 量子超通信路	22
3.3	multi-slot 超通信路	24
4	ユニタリ操作に対する高階変換	28
4.1	高階変換のパフォーマンスの指標	29
4.2	性能演算子と半正定値計画	30
4.3	双対問題	31
5	高階関数が準同型の場合： $f(UV) = f(U)f(V)$	33
5.1	$f(U) = U^*$ に関して $k = 1$ の場合	34
5.2	$f(U) = U^*$ に関して, $\langle F \rangle = 1$ になる場合	35
6	$f$ が反準同型の場合： $f(UV) = f(V)f(U)$	36
6.1	ユニタリ転置を返す並列量子超通信路とユニタリ演算推定	37
6.2	直列量子超通信路の優越性	39
7	まとめ	40

<sup>\*1</sup> 以下, section 初めにこのように引用をするが, これは参考の中心となった文献を示す.

## 1 初めに

量子という概念が提唱されてから早 120 年、紆余曲折の議論を経て完成した量子力学は今なお最も成功した物理理論としてその立場を保っている。ナノテクノロジーの進歩により、我々の取扱うことの可能な範囲は量子力学的領域まで広がり、量子力学の性質を有する媒体を用いた計算、検出といった情報処理が現実に見えてきている。これらの量子技術によって、我々人類が計算できる領域、検出できる限界が大きく拡大する一つの転換期を迎えているのが現在と言っても過言ではない。そういった中で、量子情報科学の重要性については疑う余地がなく、量子情報科学は何を可能とし何が不可能なのかを考察するのが現代的な課題として挙げられるだろう。

そのような量子情報科学の一分野である量子計算に着目する。量子計算では、量子力学による禁則定理によって古典計算機<sup>\*2</sup>では存在しなかった制限が存在するが、それを回避しつつ我々にとって有用な計算をする必要がある。そのため、古典計算機で考えていた計算体系をその量子版と呼べるものに修正しつつ、修正した枠組みを使って量子計算の限界を調べることが量子計算の分野における課題として挙げられる。そこで本記事では、量子計算のフレームワークの一つである函数型量子プログラミングを考える上で、興味深い結果を与える、高階量子演算に関する成果について紹介する。

本記事の構成として、第 2 節まで伝統的な量子力学の導入ではなく情報理論としての量子力学の数学的構築を行う。あくまでも量子情報理論、高階量子演算を考える上で適した数学的記述を考えており、物理的な実体が見えにくい構成になっているため、実際の物理系の話を変えた量子情報の資料を一読しておく物理的な対応がつけやすいと思われる。注意として、 $\hbar = 1$  とし、何度か後述するが有限次元系の線型代数のみで考えている。そして、第 3 節から高階量子演算として、Choi 行列という表現を用いて量子超通信路を定義し、その超通信路に関する性質に関する数理解析結果を導く。

解説記事として、自身の興味のある結果を紹介するためかなり端を折った構成になってしまっており、殊に第 5,6 節については数理的な発想も計算も個人的に難しいと思われる内容を含んでいるため、これらの節においては定理の内容のみ一読して概要を理解するだけで十分だと思われる。重要なのは、**数理的な解析によって、量子計算の性能限界を見つけることができる**という内容である。

必要とする知識は線型代数の知識、量子力学の基礎的な知識、読むのに助けとなる知識は群上の調和解析、量子通信路、数値最適化に関する知識といったものであり、量子計算の数理解析に興味のある大学 3,4 年生を対象として書いた。注意として、この記事は学生が自身の学んだ内容をまとめたものであり、専門家によって内容をチェックされていない。「解説記事」と銘打ってはいるがその内容の正確さを保証するものではないことを、ご了承いただきたい。また、非標準的な訳語等が含まれている場合があることに留意していただきたい。

---

<sup>\*2</sup> 量子力学に対して、古典力学と評することに習って、普通の計算機、コンピュータを量子計算機と比較の意味で古典計算機と呼ぶ。

## 2 量子情報理論の基礎 [1-3]\*3

### 2.1 量子論という枠組み

量子論においては、古典論とは異なり素朴実在性を仮定しない。すなわち、物理現象に付随する物理量は原理的に各時刻で定まった値をとるという常識を棄て、実験によって得られる測定結果とその確率分布のみを考えることにする。古典論では測定に擾乱も誤差もなく、物理量の値そのものが状態であり、その値を計測することが測定と等価であったが、量子論では、その物理的物体の状態、測定の枠組みを拡張することによって古典論では説明できない現象をうまく説明する事ができるようになったのである。従って、のちに記述する数学的な拡張が古典論と量子論の本質的な違いになると言える。<sup>\*4</sup>

量子論という枠組みにおいて、物理実験というものを以下に定める：

#### 公理 2.1: 物理実験

物理実験とは、対象の物理系とは独立した古典論的存在である測定者が、対象の物理系に対して、

- (1) 状態生成<sup>a</sup>
- (2) 測定

という一連の流れを行うものとする。ここで、測定とは、物理系に対して一意に定まる確率分布に従って、何らかの結果（後に記述する物理量の値など）を得る行為とし、状態生成とは、物理系に対する、任意の可能な測定に関する確率分布を決定する操作全てを指す。このような実験操作において、物理系の状態とは**任意の測定に対して、一意に定まる確率分布を返すもの**とする。

<sup>a</sup> 物理系に対する操作と生成を区別しても良いが、ここでは操作も生成に含めることにする。すなわちのちに記述する測定過程に含まれない操作はこの操作に含まれることとする。

このような物理実験の枠組みの中で、物理理論として我々が求める要求とは**任意の状態生成した物理系に対して、任意の測定に関する情報（測定結果、その従う確率分布、および測定後の状態）を計算する事ができる**という事である。この枠組みを構築するのがこの章の目的である。

ここである物理系に対して異なる状態生成を与えたとする。そして偶然にも任意の可能な測定によって得られる情報が一致したとする。すると、この物理生成の異なる物理系は、いかなる物理的な方法を用いても、区別不可能になっている。すると確率的な予言を目的とする量子論においては、

#### 公理 2.2: 状態の同一視

任意の測定に対して、同じ情報（測定結果、その従う確率分布、および測定後の状態）を与える物理系の状態は同一視する。

という要請を加える。さらに、測定に関しても同様の事が言える：

\*3 以下、section 初めにこのように引用をするが、これは参考の中心となった文献を示す。

\*4 量子論を超えた確率分布

### 公理 2.3: 測定の同一視

同じ測定結果あるいは測定値の集合を与え、かつ任意の生成可能な状態に対して同じ確率分布を与える二つの測定は同一視する..

という要請を加える。

以上より、量子論を操作主義的に記述する上での重要な概念を述べた。ここで一つ留意点として、ここでの状態とは個々の系に対する描像というよりは、統計集団に関する状態の描像を指す事が挙げられる。つまり、何も知らない状況から量子系一つからその量子系の情報を全て知ることはできないことを留意せよ。

## 2.2 状態の密度演算子による記述

あくまでも、この説は密度演算子、物理量の意味するところを理解した上で読むのをお勧めする<sup>\*5</sup>。以下記法として、Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  上の有界な線型演算子を  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  として、 $I$  をその空間に属する恒等演算子、Hermite 演算子の集合を  $\mathcal{A}$  と定義する。ここで一般の量子系に対して、次のような公理を認める：

### 公理 2.4: 物理系の記述

量子系には複素 Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  が付随する。つまり、 $\mathcal{H}$  上において、物理系に関連する物理量は何らかの Hermite 演算子  $A \in \mathcal{A}$  で与えられ<sup>a</sup>、量子系の状態は物理量から実数へ移す線型汎関数  $\tilde{\rho}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  に対応する。ここで  $\tilde{\rho}[A] = \langle A \rangle \in \mathbb{R}$  が物理量  $A$  の期待値を与える。

<sup>a</sup> 実際には、無限次元系の量子系については非 Hermite 演算子であるが固有値が実数となる演算子が存在し、それに対応する物理量が存在する。しかしながら、ここで考えている系については有限次元系のみを考えているため、固有値実数の演算子は Hermite 演算子のみに限られると考えて良い。

ここでわざわざ、線型汎関数  $\tilde{\rho}$  を与えたわけだが、物理量に対する双対空間として  $\mathcal{A}^*$  を与えれば、 $\tilde{\rho} \in \mathcal{A}^*$  である。また、このような線型汎関数に関して、天下り的に次の要請を加える：

### 公理 2.5: 線型汎関数に対する正規化, 正定値性

任意の状態  $\tilde{\rho}$  に対して、

$$\tilde{\rho}[I] = \langle I \rangle = 1 \quad \text{i.e., } I \in \mathcal{A}, \quad (2.1)$$

$$\forall A \in \mathcal{A}, \langle A^\dagger A \rangle \geq 0 \quad (2.2)$$

が成立する。上の条件を正規化条件、下の条件を正定値性と呼ぶ。

後の文章においても記述するが、これらの条件が状態  $\tilde{\rho}$  が、物理量の期待値  $\langle A \rangle$  を考えた上で生じる確率分布  $\{p_i\}$  において、その総和が 1 になる (確率の保存) および確率の正定値性を保証する。したがって、この二つの条件は  $\tilde{\rho}$  が確率の公理を満たす確率分布を返す汎関数として正当化するために必須の条件となる。

量子系の次元が  $d$  次元、つまり  $\dim \mathcal{H} = d$  であれば、物理量の表現は  $d \times d$  複素行列の集合  $M_d$  の部分集合、

<sup>\*5</sup> すなわち、量子力学初学者がこの節を読んだところで、全く物理的描像が思い浮かばないものと思われる。ここでは、 $C^*$  環による量子系の表現を念頭において最小限の記述にとどめている。

Hermite 行列  $A$  で与えられる。ここで  $M_d$  は、Hilbert-Schmidt 内積  $A, B \in M_d, \langle B, A \rangle := \text{tr}(B^\dagger A)$  を定義することによって、Hilbert 空間として拡張する事ができた。この内積は  $M_d$  からその双対空間  $M_d^* \cong M_d$  の元を与えることを思い出す。すると、公理 2.4 で与えた線型汎関数に関して、 $\tilde{\rho} \in \mathcal{A}^*$  もまた  $M_d \cong \mathcal{L}(\mathcal{H}) \cong \mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$  で表現が与えられる。有限系  $d < \infty$  においては、この表現と線型演算子の同一視を行なったとしても基本問題は生じないことから、以下、表現と線型演算子を同一視する、つまり  $M_d = \mathcal{L}(\mathcal{H})$  として議論を進める。さらに状態  $\tilde{\rho} \in \mathcal{A}^*$  を  $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  と表記することにして、物理量と状態に関して行列積によって演算が可能であると認めてしまう。以上より、公理から導かれる状態の表現に関して定義をまとめる：

### 定義 2.1: 密度演算子

上の議論によって、正当化される状態  $\rho$  を密度演算子、あるいは密度行列と呼ぶ。また、この密度行列  $\rho$  を用いて

$$\langle A \rangle = \tilde{\rho}[A] := \langle \rho^\dagger, A \rangle = \text{tr}(\rho A) \quad (2.3)$$

と与えられる。

ここで公理 2.5 により、密度行列の性質として次の命題が導かれる。

### 命題 2.1:

$$\text{tr}[\rho] = 1 \quad (2.4)$$

$$\rho \geq 0 \Leftrightarrow \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0 \quad (2.5)$$

以下、上の性質を満たす演算子の集合を  $\mathcal{S}$  と表記することにして、これを状態集合と呼ぶ。

ここで状態集合の重要な性質として、それが凸集合である事が挙げられる。すなわち、物理系の状態に対して確率混合を考えたとしてもそれもまた状態となっているはずであるという直感に従う：

### 命題 2.2: 状態空間の凸性

$\mathcal{S}$  は凸集合。

$$\forall \rho, \sigma \in \mathcal{S}, p \in [0, 1] \Rightarrow p\rho + (1-p)\sigma \in \mathcal{S} \quad (2.6)$$

**証明** 正規化条件は  $\text{tr}$  の性質から、 $\text{tr}(p\rho + (1-p)\sigma) = p\text{tr}(\rho) + (1-p)\text{tr}(\sigma) = p + 1 - p = 1$  より、確かに満たす。また、正定値性についてもその定義より  $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \langle \psi | p\rho + (1-p)\sigma | \psi \rangle = p\langle \psi | \rho | \psi \rangle + (1-p)\langle \psi | \sigma | \psi \rangle \geq 0$  と与えられる。 ■

上の命題より、 $\forall i, \rho_i \in \mathcal{S}, \sum \lambda_i = 1 \Rightarrow \sum_i \lambda_i \rho_i \in \mathcal{S}$  となるが、この時、 $\sum \lambda_i \rho_i$  という状態というのは、確率  $\lambda_i$  の割合で  $\rho_i$  が生起するという状態を表している。例えば、量子系としてスピン 1/2 系の統計集団を考えた時に、スピン上向き状態を  $\rho_+$  として、下向き状態を  $\rho_-$  とした時に  $1/3\rho_+ + 2/3\rho_-$  というのは、1/3 の確率で  $\rho_+$ 、2/3 の確率で  $\rho_-$  の状態のサンプルが得られる集団を表している。

ここで、状態  $\rho$  について純粋状態と混合状態という区別を行う：

### 定義 2.2: 純粋状態, 混合状態

凸集合 (ここでは  $\mathcal{S}$ ) 上の元  $\rho$  が非自明な凸結合を持たない時, これを端点 (extreme point) と呼ぶ. すなわち, ある  $\rho$  に対して,  $\rho', \rho'' \in \mathcal{S}, p \in [0, 1]$  に対して  $\rho = p\rho' + (1-p)\rho''$  とという凸結合で表される時, それが自明な結合  $\rho' = \rho'' = \rho$  に限られるとき,  $\rho$  を端点と呼ぶ.

ここで凸集合として状態集合を考えている時, 端点の元を純粋状態 (pure state) といい, 純粋状態以外の点を混合状態 (mixed state) と呼ぶ.

ここでこの純粋状態に関して, 同値な条件を示しておく:

### 命題 2.3:

$\rho \in \mathcal{S}$  に関して, 以下の条件は同値:

- (1)  $\rho$  は  $\mathcal{S}$  上の端点
- (2)  $\rho$  は一次元射影行列で表される. つまり  $\exists |\psi\rangle \in \mathcal{H}$  s.t.  $\langle \psi | \psi \rangle = 1, \rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ . これにより, 純粋状態を  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  と同一視することをしばし行う.
- (3)  $\rho = \rho^2$ .
- (4)  $\text{tr}\{\rho^2\} = 1$ .
- (5)  $\rho$  はただ一つの固有値 1 と  $d-1$  縮退した固有値 0 を持つ.
- (6)  $\text{rank } \rho = 1$

**証明** 文献 [2] を参照せよ. ■

ここで出てきた, 正規化された  $|\psi\rangle \in \mathcal{S}$  がいわゆる状態ベクトルと呼ばれるものである. また, 純粋状態に関する条件として  $\text{tr}(\rho^2) = 1$  が出てきたが, 実はこの  $\text{tr}(\rho^2)$  は状態の純粋性の指標となり, 次のような性質がある:

### 命題 2.4:

$\text{tr}(\rho^2)$  は  $[1/d, 1]$  までの値を取り,  $\text{tr}(\rho^2) = 1$  となるのは純粋状態に限り,  $\text{tr}(\rho^2) = 1/d$  となるのは, 最大混合状態 (maximally mixed state),  $\rho = I/d$  に限る. ここで  $\text{tr}(\rho^2)$  は純粋度と呼ばれる.

**証明**  $\text{tr}(\rho^2) = 1$  となる時に関して, 命題 2.3 で示したことから省略する.  $\text{tr}(\rho^2) = 1/d$  が最小値となることについて, 未定乗数法を用いて証明する\*6. この時, 任意の  $\rho$  のスペクトル分解  $\sum_{i=1}^d \lambda_i |e_i\rangle \langle e_i|$  を考えることによって,  $\text{tr}(\rho^2) = \sum_{i=1}^d \lambda_i^2$  であることから, 正規化条件を束縛条件として  $f = -\sum_{i=1}^d \lambda_i^2, g = \sum_i \lambda_i - 1$  について, 未定乗数  $\mu$  として方程式  $f - \mu g = 0$  に関して考えれば良い. これより

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} (f - \mu g) = -2\lambda_i - \mu = 0 \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i = 1 \quad (2.8)$$

\*6 ここで最小値の存在性については,  $\mathcal{S}$  はコンパクトで  $\text{tr}(\rho^2)$  が連続であることは認めることにする.

であるから,  $\forall i, \lambda_i = \text{const.}$  となり, 正規化条件から  $\lambda_i = 1/d$ . これが, 最小値をとる必要条件となる. また, これが純粋度最小を満たす状態となっているのは,  $\forall \rho = \sum_{i=1}^d \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i| \in \mathcal{S}$  に対して, Gram-Schmidt 内積  $(\rho I/d)$  に対する Cauchy-Schwartz の不等式を考えれば,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^d \frac{\lambda_i}{d} \right|^2 &\leq \text{tr}(\rho^2) \text{tr}(I/d^2) \\ \therefore \frac{1}{d} &\leq \text{tr}(\rho^2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

であり, 等号成立条件を考えれば最大混合状態に限る. ■

## 2.2 (余談) 古典系に関する状態 [7]

ここでは量子系の状態を記述するために状態ベクトルを与えずに線型汎函数を与えていったが, このような数学的構成における利点としては, 実は上で述べた状態の構成を古典論にも適応する事ができるということである. 本稿では, 一貫して物理量の表現としてエルミート行列の集合  $\mathcal{A}$  を考えているわけだが, 別の抽象的代数構造  $\mathcal{M}$  を持ってきても良い. ただ, この  $\mathcal{M}$  としては, 付録に載っているような  $*$ -代数構造を持つ必要がある. 例としては, 古典系ならば  $\mathcal{M}$  としては単なる相空間の座標変数を独立変数としてもつ函数  $f(x, p)$  を与えれば良いし, 量子系ならば, これまでやってきたように  $\mathcal{A}$  である. そして, 状態というのは  $\mathcal{M}$  上の正定値線型汎函数  $\omega: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  であり, その値を物理量の期待値として扱うわけである.

具体的な表現を用いて解説すると, ここでは古典系の相空間として  $(p, q) \in \Gamma$  を考え, 古典系が  $(p_0, q_0)$  に位置する時の汎函数の表現として  $\rho_{p_0, q_0}(p, q) = \delta(p - p_0)\delta(q - q_0)$ . ここで物理量として何らかの函数  $f(p, q)$  について状態  $\rho_{p_0, q_0}$  の  $f$  の期待値は次のように表現で表される:

$$\langle f \rangle := \int_{\Gamma} dp dq f(p, q) \rho_{p_0, q_0}(p, q) \quad (2.10)$$

を考える. この系のハミルトニアンを  $H$  として,  $\rho$  に対する時間発展を次のように与えれば,

$$\frac{d\rho(p, q, t)}{dt} + \{\rho, H\} = 0 \quad (2.11)$$

Hamilton 力学と同じように記述する事ができる. よって, 古典状態についてもいわゆる純粋状態, 混合状態を定義する事ができる.

では, 古典系と量子系を分けるものとは何か? まず, 一つ挙げられるものが古典状態は必ず  $\omega$  に関して上で定義した, 純粋状態による凸結合の分解が一意に定まる, すなわち単体を構成する. 逆に量子状態であれば混合状態\*7について, その凸結合の分解の仕方は無限に存在する. これが大きな差異である. この意味するところは, 古典状態の純粋状態というものは互いに排反的な事象を示すという事である.

## 2.3 測定 [4, 5]

物理量というのは, 量子的な統計集団に対する測定過程を通して初めて情報を得る事ができる. 前節においては, 物理量  $A \in \mathcal{A}$  の期待値  $\text{tr}(\rho A)$  を得るという過程にのみ着目し議論を進めたわけだが, そもそも測定

\*7 当然だが, 純粋状態ならば量子系であったとしても凸結合の分解は一意. そうでなければ, 状態の同一視に矛盾する.



過程とは何なのかを定義していない。そのため、本節では、同一の状態生成に対して必ず同じ情報を返す測定のクラスを考察する。ここで定義する測定の描像により、何を測定するかということよりもどのように測定するかに着眼点を置く事ができ、原理的に許される測定操作の限界を考察する事ができる。

物理量は Hermite 演算子で与えられたわけだが、これに関する測定について公理を与える：

### 公理 2.6: Born 統計公式

原理的に任意の状態  $\rho$  に対して、任意の物理量  $A \in \mathcal{A}$  の正確な測定は可能であり、その測定値が  $\alpha$  である確率  $p_\alpha$  は、

$$p_\alpha = \text{tr}(\rho P_\alpha) \quad (2.12)$$

で与えられる。ここで、 $P_\alpha$  は  $A$  の射影演算子である。

この公理は、 $A$  のスペクトル分解が  $A = \sum \alpha P_\alpha$  で与えられることを考えれば、公理 2.4 で与えた状態に対する期待値  $\langle A \rangle = \sum \alpha p_\alpha = \sum \text{tr}(\rho \alpha P_\alpha) = \text{tr}(\rho A)$  と整合的である事がわかる。また、確率の保存より  $\sum P_\alpha = I$  であることは直ちに導かれる。

しかしながら、物理系の物理量に関する測定のみで原理的に実行可能な測定過程を記述できるわけではない。そもそも、物理量の測定には測定装置なるものが必要であるが、その描像について具体的なものを与えておらず、その意味で不明瞭である。そのため、系  $S$  を測定する装置に関して次の公理を与える：

### 公理 2.7: 出力分布

系  $S$  を測定する装置  $A(\mathbf{i})$  は、測定直前の系の状態  $\rho$  に依存して、その測定値  $\mathbf{i} = i$  の確率分布  $\{p_i\}$  を定める。この確率分布は確率の公理を満たすことは認める。これと同時に測定直前の状態  $\rho$  と生起可能な測定結果  $\{i\}$  に依存して、測定直後の系の状態  $\rho_i$  を定める。

ここで、 $\rho$  を入力状態と呼び、 $\rho_i$  を条件付き出力状態と呼ぶ。

このような測定装置に対して、統計的性質に関する定義を次のように与える：

### 定義 2.3: 出力分布

次の組み合わせを測定装置  $A(i)$  の統計的性質と呼ぶ。

- (1)  $\forall \rho \in \mathcal{S}$  に対する出力分布  $\{p_i\}$
- (2)  $\forall \rho \in \mathcal{S}$  に対する生起可能な測定結果に対する条件付き出力状態  $\rho_i$

ここで要請 2.3 により、二つの測定装置について統計的性質が一致するときに、統計的同値といい、測定装置として同一視する。

ここで、入力状態  $\rho$  において  $A(\mathbf{i})$  による測定後に、出力変数として  $\mathbf{j}$  を持つ測定装置  $A(\mathbf{j})$  による測定を考える。この場合、条件付き確率として、 $\mathbf{i} = i$  であった時に  $\mathbf{j} = j$  となる確率  $\Pr(\mathbf{j} = j \mid \mathbf{i} = i \parallel \rho) = \Pr(\mathbf{j} = j \parallel \rho_i)$



が考えられる。これを用いて、変数  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  の結合確率分布<sup>\*8</sup> $\Pr(\mathbf{i} = i, \mathbf{j} = j \parallel \rho)$  は次の様に与えられるはずである。

$$\Pr(\mathbf{i} = i, \mathbf{j} = j \parallel \rho) = \Pr(\mathbf{j} = j \parallel \rho_i) \Pr(\mathbf{i} = i \parallel \rho) \quad (2.13)$$

このような結合確率分布に対して、たとえば考えている状態として  $\rho = p\rho' + (1-p)\rho''$  のような凸結合を考えた時に、次の自然な要請を与える：

### 公理 2.8: 結合出力分布の混合則

任意の装置  $A(\mathbf{i}), A(\mathbf{j})$  に対して、函数  $\rho \mapsto \Pr(\mathbf{i} = i, \mathbf{j} = j \parallel \rho)$  は任意の測定結果の組み  $(i, j)$  に対して  $\rho$  に対する affine 函数となる：

$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{i} = i, \mathbf{j} = j \parallel p\rho' + (1-p)\rho'') \\ = p\Pr(\mathbf{i} = i, \mathbf{j} = j \parallel \rho') + (1-p)\Pr(\mathbf{i} = i, \mathbf{j} = j \parallel \rho'') \end{aligned} \quad (2.14)$$

ここで  $0 \leq p \leq 1$  とする。この公理および式 (2.13) を踏まえた上で、次の式が得られる：

$$\begin{aligned} \sum_j \Pr(\mathbf{i} = i, \mathbf{j} = j \parallel \rho) &= \sum_j \Pr(\mathbf{j} = j \parallel \rho_i) \Pr(\mathbf{i} = i \parallel \rho) \\ &= \Pr(\mathbf{i} = i \parallel \rho) \end{aligned} \quad (2.15)$$

ここで最初の式は  $\rho$  の affine 函数の和になっており、最後の式も  $\rho$  の affine 函数となる。従って、やや回り道をしたものの結合確率分布の導入と自然な仮定である結合出力分布の混合則によって、出力分布の性質が次の定理として得られる：

### 定理 2.1: 出力分布の混合則

任意の測定装置  $A(\mathbf{i})$  と測定値  $\mathbf{i} \subseteq \mathbb{R}$  に対して、出力分布の対応  $\rho \mapsto \Pr(\mathbf{i} = i \parallel \rho)$  は、 $\rho$  に対する affine 函数となる。

そして、このような affine 性を満たす函数というのは次で与えられる POVM (Positive Operator Valued Measure) と等価である：

### 定義 2.4: POVM 正作用素値測度

ここでは測定値の集合にのみ興味があるので、所謂標本空間を  $\mathbb{R}$  に固定する。この時、 $\mathbb{R}$  からヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上の線型演算子空間  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  に写す写像  $\Pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  で次の性質を満たすもの：

- (1) 正値性： $\forall x \in \mathbb{R}, \Pi(x) \geq 0$ .
- (2) 単位性： $\sum_{x \in \mathbb{R}} \Pi(x) = 1$ .
- (3) 有限性：ある有限集合  $S$  (今回であれば測定値の集合  $\mathbf{i}$  など) が存在して、 $x \notin S \Rightarrow \Pi(x) = 0$ .

を (有限)<sup>a</sup>POVM と呼ぶ。

<sup>a</sup> POVM としては有限性の代わりに測度空間をきちんと定義する必要があるが、ここでは測定値として高々有限個の測定

\*8 結合確率分布と述べているが、量子論において必ずしも  $\Pr(\mathbf{i} = i, \mathbf{j} = j \parallel \rho) = \Pr(\mathbf{j} = j, \mathbf{i} = i \parallel \rho)$  が成立するとは限らないので、測定の順序に気をつける必要がある。

値集合しか考えないので、有限性を入れて議論を終わらせている。

これより、POVM 測定を与えることができこれが量子情報理論における最大測定のクラスとなる\*9。

### 定理 2.2: POVM 測定

任意の測定装置  $A(\mathbf{i})$  に POVM  $\Pi$  が一意に対応し、任意の状態  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  と任意の測定値  $i$  に対して

$$\Pr(\mathbf{i} = i \mid \rho) = \text{tr}(\rho \Pi(i)) \quad (2.16)$$

このような測定を POVM 測定と呼ぶ。

これにより、天下一的に与えていた公理の Born 統計公式\*10の代わりに、測定装置に関する出力分布の公理と自然な仮定である結合出力分布の混合則から、具体的な物理量によらない測定の概念を導入することができた。以下、PVOM 測定  $\Pi$  としては表記として、測定値の集合  $\mathbf{i}$  に対して  $\{E_i\}_{i \in \mathbf{i}}$  と表記することにして、単に  $\{E_i\}$  と表すこともある。

## 2.4 合成系, エンタングルメント

量子系の合成系に関しては、テンソル積を使って表現する：

### 公理 2.9: テンソル積による合成系の表現

量子系  $\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b$  の合成系  $\mathcal{H}$  は Hilbert 空間のテンソル積  $\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$  によって描写される。つまり、この合成系における物理量として、Hermite 演算子のテンソル積  $A \otimes B$  が対応する。また、部分系  $\mathcal{H}_a$  へのみ着目する場合、物理量は  $A \otimes I_b$ 、測定演算子は  $E_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_a)$  で表現される族  $\{E_i \otimes I_b\}_{i \in \mathbf{i}}$  で与えられる。

これにより、テンソル積の性質から  $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{H}_a \dim \mathcal{H}_b$  と表される。ここで、古典系の合成系については直積を用いて表現していたが、これに対応する単純な状態が各量子系の状態のテンソル積  $\rho_a \otimes \rho_b$  であり、積状態 (product state) と呼ばれる。

量子系においてテンソル積を導入した理由として、量子系  $\mathcal{H}$  の状態  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  に関して部分系の物理量について相関が生じる場合があることを描像する事ができるからという理由である： $\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b$  上の物理量  $A, B$  に対して  $\langle A \otimes B \rangle \neq \langle A \otimes I \rangle \langle I \otimes B \rangle$ 。

このような合成系に対して、片方の系に関する測定に着目している場合を考える。この際、目的の量子系を対象系  $S$  (system of interest) と呼称し、その他の部分系を環境系  $E$  (environment system) と呼ぶことにする。この際、対象系の状態にのみ考える場合、部分トレースを利用することによって対象系にのみ量子系を考える事ができます。そのため、まず部分トレースの定義を与える：

\*9 ただし、測定直後の系の状態に対する操作を考える場合は、一般化測定を考える必要がある。詳細は [2]などを参照せよ。

\*10 この場合、物理量の値から対応する射影演算子を POVM として選択すれば、Born の統計公式が得られる。このような射影演算子による測定を PVM (Projector Valued Measure) 測定と呼ぶ。

### 定義 2.5: 部分トレース

環境系  $\mathcal{H}_E$  の部分トレース (partial trace) とは、次のように与えられる線型行列のテンソル積  $C^a$ :

$$C = \sum_j A_j \otimes B_j, \quad A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S), B_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_E) \quad (2.17)$$

に対して、次の線型演算子を返す写像  $\text{tr}_E: \mathcal{L}(\mathcal{H}_{SE}) := \mathcal{L}(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_S)$  である:

$$\text{tr}_E(C) := \sum_j (\text{tr} B_j) A_j \quad (2.18)$$

<sup>a</sup> ここで任意の  $\forall C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{SE})$  は  $\sum_j A_j \otimes B_j$  の形でかけることは簡単な計算によって確かめられる.

これに関する性質として次の命題が示せる:

### 命題 2.5:

部分トレースの定義は以下と等価:

$$\forall C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{SE}), \forall |\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}_S, \langle \psi | (\text{tr}_E C) | \phi \rangle := \sum_k (\langle \psi | \otimes \langle e_k |) C (|\phi\rangle \otimes |e_k\rangle) \quad (2.19)$$

ただし,  $\{|e_k\rangle\}_k$  は  $\mathcal{H}_E$  の任意の正規直交基底.

**証明** まず、最初の定義から命題 2.5 を示す. 有限次元のトレースの定義より

$$\begin{aligned} \langle \psi | \text{tr}_E(C) | \phi \rangle &= \sum_j \langle \psi | \text{tr}(B_j) A_j | \phi \rangle \\ &= \sum_j \langle \psi | A_j | \phi \rangle \sum_k \langle e_k | B_j | e_k \rangle \\ &= \sum_k (\langle \psi | \otimes \langle e_k |) C (|\phi\rangle \otimes |e_k\rangle) \end{aligned} \quad (2.20)$$

上の式変形を逆に行えば、逆も示せる. ここで、式 (2.5) に関しては、 $C$  のテンソル積の分解によらないこともわかる. ■

さらに以下の命題も示せる:

### 命題 2.6:

部分トレースに関する性質として

(1) 任意の  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S), C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{SE})$  に対して、

$$\text{tr}[(A \otimes I_E)C] = \text{tr}(A \text{tr}_E(C)) \quad (2.21)$$

(2)  $C \geq 0 \Rightarrow \text{tr}_E(C) \geq 0$

(3)  $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{SE}), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$  に対し、

$$\text{tr}_E(\alpha C_1 + \beta C_2) = \alpha \text{tr}_E(C_1) + \beta \text{tr}_E(C_2) \quad (2.22)$$

**証明** 証明は略. 2. については、命題 2.5 により、ほぼ自明. ■

このような部分トレースを、全体系の状態  $\rho_{SE}$  に対して作用させることで、縮小した対象系の状態  $\rho_S$  が与えられます。それを示した命題が次で与えられる：

**命題 2.7:**

$\rho_{SE}$  を系  $\mathcal{H}_{SE}$  上の状態とすれば、その部分トレース  $\rho_S := \text{tr}_E(\rho_{SE})$  は  $\mathcal{H}_S$  上の状態になる。

**証明** 前の命題により、 $\rho_{SE} \geq 0 \Rightarrow \rho_S \geq 0$  であり、 $\mathcal{H}_S$  の完全正規直交系  $\{|\psi_i\rangle\}$  を持って来れば、

$$\begin{aligned} \text{tr}_S(\rho_S) &= \sum_i \langle \psi_i | \rho_S | \psi_i \rangle \\ &= \sum_{i,k} \langle \psi_i | \otimes \langle e_k | \rho | \psi_i \rangle \otimes | e_k \rangle \end{aligned}$$

ここで、 $\{|\psi_i\rangle \otimes |e_k\rangle\}$  は、新しい完全正規直交系を作るので

$$= \text{tr}(\rho) = 1 \tag{2.23}$$

以上より、確かに状態としての性質を満たす。 ■

このようにして、全体系から対象系の状態を得る事ができたが、これが確かに全体系から対象系のみを着目した時の状態ということを保証する命題が次になる。

**命題 2.8:**

全体系  $\mathcal{H}_{SE}$  系の状態が  $\rho_{SE}$  で記述される時、S 系にのみ着目した状態、**縮約状態**は部分トレース  $\rho_S := \text{tr}_E(\rho_{SE})$  で与えられる。

**証明**  $S$  の縮約状態に対応する密度演算子が  $\sigma_S$  で与えられる時、ここで  $S$  上の任意の測定  $\{E_i\}_{i \in i}$  に対して、測定値  $i$  が出る確率は

$$\Pr(\mathbf{i} = i | \sigma_S) = \text{tr}((E_i \otimes I_b)\rho_{SE})$$

式 (2.21) により

$$= \text{tr}_S(E_i(\text{tr}_E(\rho_{SE}))) = \Pr(\mathbf{i} = i | \rho_S) \tag{2.24}$$

したがって、任意の測定について上式が成立するので、公理 2.2 により  $\sigma_S = \rho_S$  で同一視される。 ■

以上の議論によって、合成系および対象系と環境系に関する諸概念を定義しその性質を確かめた。ここで合成系  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  に対しても積状態の凸結合：

$$\rho = \sum_i \lambda_i \rho_i^{(A)} \otimes \rho_i^{(B)} \tag{2.25}$$

もまた、状態になっているのは前節で見た通りである。ここで、このような積状態の凸結合として表現するときは、前述したとおり直積として表現する事ができて、「古典的に相互作用している」という事ができる状態だと考えられる。このような状態は、縮約状態を考えれば独立に各系の状態を考える事ができるため分離可能 (separable) な状態と言う。このような状態は、局所操作 (Local Operations) と古典通信 (Classical Communication) の操作集合 (LOCC) によって、生成する事ができる。逆にこのような積状態の凸結合で表

現できない状態のことを<sup>もつ</sup>纏れた状態 (entangled state) と呼ぶ。

明らかに、ある純粋状態が分離可能となるのは、それが積状態の時かつその時に限る。これは、すなわち任意の相関というものは量子纏れ由来のものとなっている。これに関して、量子纏れの性質を調べるために、次のような一般系を与えることにする。

### 命題 2.9: Schmidt 分解

任意ベクトル  $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  に対して、 $d = \min\{\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B\}$  として、次のような正規直交基底  $\{|e_j\rangle \in \mathcal{H}_A\}, \{|f_j\rangle \in \mathcal{H}_B\}$  が存在して、

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle \quad \text{with } \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = \|\psi\|^2 \quad (2.26)$$

このとき、 $\lambda_j$  は Schmidt 係数と呼ばれる。

この命題の証明については、概略だけ述べると元の  $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$  な勝手な基底を持ってきてそれによるベクトルの分解を考えると  $|\psi\rangle = \sum_{a,b} C_{a,b} |a\rangle \otimes |b\rangle$  で書く事ができる。ここで  $C_{a,b}$  を  $a$  行  $b$  列の行列と見なし、これの対角化を行うことによって、Schmidt 分解の形にする事ができる。

この Schmidt 分解によって示唆されることを色々述べておこう。式 (2.26) によって、与えられる  $|\psi\rangle \langle \psi|$  の縮約状態は、どちらの Hilbert 空間の部分とレースを考えても、その縮約状態は  $\lambda_j$  をスペクトルを持つ状態となる。逆に考えれば、 $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$  で与えられる状態は、任意の  $\rho_A = \sum_j \lambda_j |e_j\rangle \langle e_j|$  の純粋化を与えているのだと考える事ができる。ここで最小拡大空間  $\mathcal{H}_B^{\min}$  の次元は  $\dim(\mathcal{H}_B^{\min}) = \text{rank}(\rho_A)$  で与えられる。ここで、ある純粋化した状態  $|\psi\rangle \langle \psi| \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B^{\min}$  に対して、別の純粋化した状態  $|\psi'\rangle \langle \psi'|$  は、等長写像  $V: \mathcal{H}_B^{\min} \rightarrow \mathcal{H}_B$  を用いて  $|\psi'\rangle \langle \psi'| = I \otimes V |\psi\rangle \langle \psi| (I \otimes V)^\dagger$  で与えられる。

量子纏れに関して、纏れの指標としても使われる最大纏れ状態を定義する。以下、記法として  $|jj\rangle = |j\rangle \otimes |j\rangle$  のようなテンソル積の演算記号を略記したものをしばし用いる。：

### 定義 2.6: 最大纏れ状態

次のように全ての Schmidt 係数が  $1/\sqrt{d}$  で与えられる状態  $|\Omega\rangle$  :

$$|\Omega\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=1}^d |jj\rangle \quad (2.27)$$

およびユニタリ演算子  $U$  を用いて  $(I \otimes U) |\Omega\rangle$  で与えられる状態のことを最大纏れ状態という。

ここで、最大纏れ状態に関して Hilbert-Schmidt 直交ユニタリ族  $\{U_j\}_{j=1, \dots, d^2}$  を用いて、最大纏れ状態を使って構成した  $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$  の正規直交系  $\{(U_j \otimes I) |\Omega\rangle\}$  を考える事ができる。さらに、 $|\Omega\rangle$  の性質として

### 命題 2.10: 最大纏れ状態

任意の  $A, B \in M_d$  について、

$$\langle \Omega | A \otimes B | \Omega \rangle = \frac{1}{d} \text{tr}(A^T B), (A \otimes I) |\Omega\rangle = (I \otimes A^T) |\Omega\rangle \quad (2.28)$$

証明 最大纏れ状態の定義により

$$\begin{aligned}
 \langle \Omega | A \otimes B | \Omega \rangle &= \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \langle ii | A \otimes B | jj \rangle \\
 &= \frac{1}{d} \sum_{i,j=1}^d \langle i | A | j \rangle \langle i | B | j \rangle \\
 &= \frac{1}{d} \sum_{i,j=1}^d \langle i | A^T | j \rangle \langle j | B | i \rangle \\
 &= \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \langle i | A^T B | i \rangle = \frac{1}{d} \text{tr}(A^T B)
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

また,  $\forall A \in M_d, A = \sum_{i,j=1}^d A_{ij} |i\rangle \langle j|$  とかけることを用いれば,

$$(A \otimes I) |\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i,j=1}^d A_{ij} |ij\rangle \tag{2.30}$$

$$(I \otimes A^T) |\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i,j=1}^d A_{ij}^T |ji\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i,j=1}^d A_{ji} |ji\rangle \tag{2.31}$$

■

この命題 2.4 によって,

系 2.3:

$$(U \otimes U^*) |\Omega\rangle = |\Omega\rangle \tag{2.32}$$

系 2.4:

任意の縮約状態  $\rho_A$  を与える純粋状態  $|\psi\rangle \langle \psi|$  は, 最大纏れ状態を用いることで

$$|\psi\rangle = (I \otimes R) |\Omega\rangle \tag{2.33}$$

とかける. ここで,  $R = \sqrt{d} \sqrt{\rho_A} V$  で与えられ,  $V$  は等長写像である.

## 2.5 時間発展

この量子情報理論の枠組みの中では, 他の物理量と異なり時間は古典的に, すなわち単なる変数として扱う. 量子系の時間発展を扱う場合には, 基本的に閉鎖系 (closed system) を対象としていて, この時間発展は物理的に可逆なものである.

量子系の物理実験においては状態生成と測定の二つの過程に分かれるわけだが, 時間発展は状態生成に分類されるわけだが, この描像には二種類ある. それが一般に Schrödinger 描像, Heisenberg 描像あるいは相互作用描像と呼ばれるものである\*11.

\*11 それらを組み合わせた Pauli 描像と呼ばれるものも存在する.

### 2.5.1 閉鎖系と可逆発展

各描像に関して、ある時刻と時刻の間について、物理量の時間発展は線型変換として  $A \in \mathcal{A} \mapsto u(A)$  で与えられ、状態に関する時間発展  $\rho \mapsto u^*(\rho)$  で与えられるとする。この時、次のような関係式が成立する：

$$\text{tr}(\rho u(A)) = \text{tr}(u^*(\rho)A) \quad (2.34)$$

であり、 $u, u^*$  は双対、あるいは随伴写像の関係となっている。このような時間発展の連結に対して自然に認められるべき性質は結合律  $(uv)w = u(vw)$  を満たすはずである。この性質と、単元、逆元の存在を考えればこれは線型変換の群として描像できることを述べておく。さらに、時間発展後の物理量、あるいは状態もまた物理量（状態）として存在するはずなので、変換後の代数の構造は不変のはずである。すなわち、 $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, u^*: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$  であり、 $\forall A, B \in \mathcal{A}: u(AB) = u(A)u(B), u(A^\dagger) = u(A)^\dagger, \|u(A)\| = \|A\|$  である。従って、可逆発展の集合は線型自己同型写像の群  $\text{aut}(\mathcal{A})$  で記述できる。

以上の考察から、閉鎖系の時間発展は次の形で与えられることを認める：

#### 公理 2.10: 時間発展

物理量の時間発展は、内部自己同型写像の群として与えられ、ユニタリ演算子  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  を用いて

$$u(A) = U^\dagger A U \quad (2.35)$$

$$u^*(\rho) = U \rho U^\dagger \quad (2.36)$$

として与えられる。

今回の場合は、 $\mathcal{A} = M_d$  を考察しているため、全ての自己同型は内部自己同型に限る<sup>\*12</sup>。ここで、ユニタリ変換に付随する時刻  $t \in \mathbb{R}$  に関して、次のような性質を満たすはずであり、そのような性質を持つ変換について定義を与える：

#### 定義 2.7: ユニタリ変換に付随する時刻の性質

$t \in \mathbb{R}$  をパラメータとする  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  の族  $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  に対して、次の性質を満たすとする：

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, U_t U_s = U_{t+s} \quad (2.37)$$

$$U_0 = I \quad (2.38)$$

$$\forall U_0 \in \mathbb{R}, \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \lim_{h \rightarrow 0} \|(U_{t_0+h} - U_{t_0})|\psi\rangle\| = 0 \quad (2.39)$$

このような性質を満たすものを、 $\mathcal{H}$  上のユニタリ群という。

このような、ユニタリ群に対しては次のような定理が成立する [8]：

#### 定理 2.5: Stone の定理

$\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  が  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  上の族である時、これがユニタリ群となる必要十分条件は  $\mathcal{H}$  上の Hermite 演算子  $H$  が存在して、

$$U_t = e^{iHt} \quad (2.40)$$

<sup>\*12</sup> 一般に無限次元系を考える場合は、内部自己同型とは限らない。



とかけることである。ここで  $H$  をハミルトニアンと呼ぶ。

これにより、閉鎖系の時間発展に関する基礎方程式 Schrödinger 方程式, Heisenberg 方程式を導く事ができる。

## 2.5.2 開放系と不可逆変化

不可逆変化は大抵、初めに大きな量子系の時間発展を考え、その部分系にのみ着目した結果として与えられる。この場合、一般の量子系の変化、すなわち量子操作が満たすべき性質がどのような性質を満たすかを考えてみる。

ここでは、Schrödinger 描像による量子系の変化から考察する。ここで考えている量子系としては、初めの大きな量子系を  $\mathcal{H}$  として、変化後の部分系などに着目した系を  $\mathcal{H}'$  とおく。初めに、意味のある変化を表す写像として  $T: \mathcal{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}')$  が満たすべき性質を考えたときに次の性質を満たすと考えられる：

### 公理 2.11: 量子操作に対する Affine 性

一般的な量子操作  $T: \mathcal{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}')$  は、状態の確率混合に対して準同型、すなわち Affine 写像になっている。

$$\forall p \in [0, 1], \forall \rho, \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H}), T(p\rho + (1-p)\sigma) = pT(\rho) + (1-p)T(\sigma) \quad (2.41)$$

これに関して、次の命題が成立する：

### 命題 2.11: 量子状態の混合性

$T: \mathcal{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}')$  が Affine 性を持つならば、トレースを保存する正線型写像  $\Phi: \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}')$  が一意に存在する：

**証明** 文献 [2,9]などを参照。 ■

以下、状態に対する量子操作  $T$  はトレース保存正写像  $\Phi$  としてかく。しかし、このようなトレース保存の正写像では、次のような状況を考えてときに物理的に不整合が生じる。初めに  $\mathcal{H}$  をある量子系  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E$  の部分系として考え、その系に対する量子操作  $\Phi$  を考えたときに  $\Phi$  が生じている間の  $\mathcal{H}_E$  の変化がほとんど無視できるならば、全体系の量子操作は  $\Phi \otimes I_E$  とかけるはずである。これは再び正写像となっている必要があるはずである<sup>\*13</sup>。以上の考察から、次の公理を加える：

### 公理 2.12:

拡大された量子系の操作  $\Phi \otimes I$  は、状態空間を状態空間に移す。

この公理より、量子操作は次で定義される CPTP 写像で与えられる：

<sup>\*13</sup> そうでなければ、全体系の確率の正値性が破れる。

**定義 2.8:  $n$ -正写像, 完全正写像**

Hilbert 空間  $\mathcal{H}, \mathcal{K}$  に対して, 線型写像  $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{K})$  に対して, 自然数  $n \in \mathbb{N}$  について  $\Phi \otimes I_n : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{K}) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  が正写像であるとき,  $n$ -正写像 ( $n$ -positive map) と呼ぶ. ここで,  $\forall n \in \mathbb{N}$  に関して  $n$ -正写像であるとき, これを完全正写像 (completely positive map) と呼ぶ.

**定義 2.9: 量子操作**

線型写像  $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{K})$  がトレース保存 (trace preserving) かつ完全正 (completely positive) なら, 量子操作, 量子通信路, あるいは CPTP 写像 (Completely Positive Trace Preserving) 写像という.

ここで Schrödinger 描像と Heisenberg 描像の関係と同様に, 双対写像  $\Phi^*$  が物理量の量子操作を与える:  $\text{tr}[\Phi(\rho)A] = \text{tr}(\rho\Phi^*(A))$ . ここで,  $\Phi^*$  の性質として

**命題 2.12:**

CPTP 写像  $\Phi$  の双対写像  $\Phi^*$  は CP 単位的写像となり, その逆も成立する. ここで線型写像  $T$  が単位的 (unital) とは,

$$T(I) := I \tag{2.42}$$

で定義される.

**証明** 線型性は明らか. まず CP 性について, 任意の自然数  $n$  について,  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  を正定値としたとき, CP 写像の  $\Phi$  の双対写像に関して

$$\begin{aligned} \forall |\psi\rangle \otimes |e\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n, \quad \langle \psi| \otimes \langle e| \Phi^* \otimes I_n(A) |\psi\rangle \otimes |e\rangle &= \text{tr} \left[ \Phi^* \otimes I_n(A) |\psi\rangle \otimes |e\rangle \langle \psi| \otimes \langle e| \right] \\ &= \text{tr} \left[ B \Phi \otimes I_n(|\psi\rangle \otimes |e\rangle \langle \psi| \otimes \langle e|) \right] \end{aligned} \tag{2.43}$$

ここで  $|\psi\rangle \otimes |e\rangle \langle \psi| \otimes \langle e|$  は明らか正定値写像であるから,

$$\geq 0 \tag{2.44}$$

従って,  $\Phi^*$  は CP 写像.

トレース保存性から単位性の導出について [9] は,  $\forall \rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  に関して,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho\Phi^*(I)) &= \text{tr}(\Phi(\rho)) \\ &= \text{tr}(\rho) \end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\therefore \forall \rho, \text{tr} \left[ (\Phi^*(I) - I)\rho \right] = 0 \tag{2.46}$$

従って,  $\Phi^*(I) = I$  であり, 逆も示せる. ■

正写像性とは異なり, 線型写像の完全正写像性は有限次元においては簡単に示すことができる.

最後に線型写像  $\Phi$  の完全正写像性と のちに重要となる  $(\Phi \otimes I_d) |\Omega\rangle \langle \Omega|$  の関係について次の命題を述べる:

**命題 2.13:**

線型写像  $\Phi: \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}')$  が完全正写像ならば、 $(\Phi \otimes I_d)(|\Omega\rangle\langle\Omega|) \geq 0$  が成立し、その逆も成立する。ここで、 $d = \dim \mathcal{H}$  とする。

**証明** 十分性は自明。必要性を示す。まず、ある  $n$  に関して任意の密度演算子  $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n)$  を考える。ここで  $\rho = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$  と分解した時の生じる純粋状態  $|\psi_i\rangle$  は、系 2.4 で表されたように最大纏れ状態を用いて、 $(I_d \otimes V)|\Omega\rangle$  で与えられ、 $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C}^n)$  でかけることを考える。

$$\Phi \otimes I_n(\rho) = \sum_i \lambda_i (\Phi \otimes I_n)[(I_d \otimes V_i)|\Omega\rangle\langle\Omega|(I_d \otimes V_i)^\dagger]$$

ここで  $\Phi \otimes I_d$  と  $I_d \otimes V_i$  による等長変換は作用する空間が交わらず可換であるから、

$$= \sum_i \lambda_i (I_d \otimes V_i)[\Phi \otimes I_d(|\Omega\rangle\langle\Omega|)](I_d \otimes V_i)^\dagger \quad (2.47)$$

について、等長写像  $A$  に関して正定値写像  $B$  の正定値性は不変、すなわち  $B \geq 0 \Rightarrow ABA^\dagger \geq 0$  である。仮定より  $(\Phi \otimes I_d)(|\Omega\rangle\langle\Omega|) \geq 0$  であり、式 (2.47) の各要素はいずれも正定値である。従って、 $\Phi \otimes I_n(\rho) \geq 0$  が示せ、ここで任意の正定値行列  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n)$  に関して  $A/\text{tr}(A)$  は密度演算子となるため、 $\Phi \otimes I_n(A) \geq 0$  となる。ここで  $n$  は勝手にとった自然数であったため、任意の  $n$  に関して  $\Phi \otimes I_n$  は正写像となるから、完全正写像。 ■

この  $(\Phi \otimes I_d)(|\Omega\rangle\langle\Omega|)$  は後に高階量子計算を考える上で非常に重要な表現となっており、Jamiołkowski 状態、あるいは Choi 行列と呼ばれる。

### 3 高階量子演算 [6]

古典計算機科学は完全制御の概念をもとに確立されている。この分野における、状態というものは 0, 1 の二値で表現されるビット列で与えられ、状態を生成し、複製し、そして出力をしている。入力ビット列の生成は、この場合関数表現  $h$  で表される操作で実行される。そして、この  $h$  に対する変換に対しても同様に考えることで、例えば  $h$  よりも大きな操作  $f$  の中の部分過程として  $h$  を考える、すなわち関数表現として  $f(h)$  を考える事ができる。このような計算の枠組みを一般に関数型プログラムという。

このような枠組みの中で、数値あるいは状態の生成、代入、演算、受け渡しに使用できるデータ対象を第一級オブジェクトといい、第一級オブジェクトとしての関数を第一級関数と呼ぶ。この第一級関数をサポートしているプログラミング言語において、関数を引数に取るあるいは出力として返す関数を高階関数と呼ぶ。上の場合、 $h$  が第一級関数であり、 $f$  が高階関数となりうる。

現在の量子情報分野で非常に使われているフレームワークとして Destuch が提案した量子通信路モデルが存在する。これは、任意の量子状態  $\rho$  に対して、CPTP 写像および測定を含む過程  $f$  を与え  $f(\rho)$  を考える。これにより、量子力学によって拡張された状態、演算を用いて計算を行うことができる。古典計算機の能力を超える計算ができるのではないかと注目を浴びている。

関数型計算のアナロジーにより、このような枠組みを超えた計算理論も考えることができる。この場合、入力  $\rho$  に対して出力  $f(\rho)$  を返す量子写像  $f$  は、量子計算における関数と見なすことができる。ここで、 $f$  を入力に取り何らかの過程  $F(f)$  を返すような汎関数  $F$  を考えることができる。これは、関数型プログラムにお

ける高階函数と見なすことができる。このような  $F$  に関する性質について考察を行うのが、高階量子演算である。

### 3.1 Choi 行列と量子超通信路

この節においては、量子操作  $\Phi$  の変換を与える写像の数学的なフレームワークを与えることを目的とする。初めに、Choi matrix の定義について再度与える：

#### 定義 3.1: Choi 行列

線型写像  $\Phi$  に対して、Choi 演算子  $C_\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{in}}) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{out}})$  を次のように定義する：

$$C_\Phi := \sum_{i,j} |i\rangle\langle j| \otimes \Phi(|i\rangle\langle j|) = d^2(I_d \otimes \Phi)(|\Omega\rangle\langle\Omega|) \quad (3.1)$$

また、線型演算子  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{out}})$  に対して Choi ベクトル  $|U\rangle\rangle$  を次のように定める：

$$|U\rangle\rangle := \sum_i |i\rangle \otimes (U|i\rangle) = d(I_d \otimes U)|\Omega\rangle \quad (3.2)$$

ここで重要な性質として、命題 2.13 で示した通り

- (1)  $C_\Phi \geq 0 \iff \Phi$  は完全正
- (2)  $\text{tr}_{\text{out}}(C_\Phi) = dI_{\text{in}} \iff \Phi$  はトレース保存

が示せる。以下、量子操作  $\Phi$  を量子通信路、量子演算とも表現することにする。また、Choi 行列  $C_\Phi$  について表現している量子通信路  $\Phi$  を指して、 $C_\Phi$  を量子通信路であるとしばし表現する。

このような Choi 演算子に対して、この演算子の合成というものは、次のような接続演算子 (link operator)\* により定義することができる [10]：

#### 定義 3.2: 接続演算子

線型写像  $\Phi: \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_2), \Psi \in: \mathcal{L}(\mathcal{H}_2) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_3)$  に対し、この合成写像  $\Upsilon := \Psi \circ \Phi$  に対する Choi 演算子  $C_\Upsilon$  は接続演算子  $*$ <sup>a</sup> を用いて次のように与えられる：

$$C_\Upsilon = C_\Phi * C_\Psi := \text{tr}_2 \left[ (C_\Phi^{T_2} \otimes I_3)(I_1 \otimes C_\Psi) \right] \quad (3.3)$$

ただし、 $T_2$  は  $\mathcal{H}_2$  に関する部分転置を表すものとする。

<sup>a</sup> 接続演算子の定義域と値域の関係について、元々の線型演算子の定義域と値域の関係と混同しないように注意せよ。ここでの定義は  $*$ :  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_2) \times \mathcal{L}(\mathcal{H}_2) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_3) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_3)$  である。さらに、テンソル積は空間の順序を入れ替えても問題ないことを留意せよ。すなわち、後で見るように  $*$ :  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_3) \times \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_2) = \mathcal{L}(\mathcal{H}_3) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_2) \times \mathcal{L}(\mathcal{H}_2) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_3) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_3)$  とすることができる。これを留意しなければ、接続演算子の可換性について、混乱が生じるものだと思う。

これについて、確認してみるとまず

$$C_\Phi = \sum_{i,j} |i\rangle\langle j| \otimes \Phi(|i\rangle\langle j|) \quad (3.4)$$

$$C_\Psi = \sum_{j,k} |j\rangle\langle k| \otimes \Psi(|j\rangle\langle k|) \quad (3.5)$$

$$C_\Upsilon = \sum_{i,k} |i\rangle\langle j| \otimes \Psi \circ \Phi(|i\rangle\langle j|) \quad (3.6)$$

であるが、

$$\begin{aligned} C_\Phi * C_\Psi &= \text{tr}_2 \left[ \left( \sum_{i,j} |i\rangle\langle j| \otimes (|j\rangle\langle i| \Phi^T \otimes I) \right) \left( \sum_{j',k} I \otimes |j'\rangle\langle k| \otimes \Psi(|j'\rangle\langle k|) \right) \right] \\ &= \text{tr}_2 \left[ \left( \sum_{i,j} (|i\rangle\langle j|) \otimes (|j\rangle\langle i| \Phi^T) \otimes I \right) \left( \sum_{j',k} I \otimes |j'\rangle\langle k| \otimes \Psi(|j'\rangle\langle k|) \right) \right] \\ &= \sum_{i,j,j',k} (|i\rangle\langle j|) \otimes \text{tr}(|j\rangle\langle i| \Phi^T |j'\rangle\langle k|) \otimes \Psi(|j'\rangle\langle k|) \\ &= \sum_{i,j,j',k} \delta_{kj} \langle i| \Phi^T |j'\rangle (|i\rangle\langle j|) \otimes \Psi(|j'\rangle\langle k|) \\ &= \sum_{i,j',k} \langle i| \Phi^T |j'\rangle (|i\rangle\langle k|) \otimes \Psi |j'\rangle\langle k| \\ &= \sum_{i,j',k} |i\rangle\langle k| \otimes \Psi |j'\rangle\langle j'| \Phi |i\rangle\langle k| \\ &= \sum_{i,k} |i\rangle\langle k| \otimes \Psi \Phi |i\rangle\langle k| = C_\Upsilon \end{aligned} \quad (3.7)$$

より確かに正しいことがわかる。

これを一般化して、接続演算子の定義として次を与える：

### 定義 3.3: 接続演算子

対象となる各量子系を記述する Hilbert 空間のラベル付をする引数の集合として  $M, N$  を考える。この時、記法として  $M, N$  の差集合を  $M/N, N/M$ 、またその共通集合を  $M \cap N$  と表すことにする。この時、Choi 演算子  $C_M \in \mathcal{L}(\otimes_{m \in M} \mathcal{H}_m)$ ,  $C_N \in \mathcal{L}(\otimes_{n \in N} \mathcal{H}_n)$  に関して、その接続は

$$C_M * C_N := \text{tr}_{M \cap N} [(I_{N/M} \otimes C_M^{T_{M \cap N}})(C_N \otimes I_{M/N})] \quad (3.8)$$

で与えられる。ここで  $T_{M \cap N}$  は  $\otimes_{n \in N} \mathcal{H}_n, \otimes_{m \in M} \mathcal{H}_m$  の共通部分の Hilbert 空間に関して部分転置をとる操作である。また、差集合  $M/N := \{i \in M, i \notin N\}$  としている。

また、このような Choi 行列の素晴らしい性質として次の命題も示せる：

### 命題 3.1:

Choi 演算子  $C_\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_2) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_3) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_4)$ 、と他の Choi 演算子  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ ,  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_4)$  に対して次が成立する。

$$C_\Phi(A \otimes B) = (C_\Phi * B^T)A \quad (3.9)$$

ここで重要な性質として次の性質が挙げられる：

**命題 3.2:**

接続演算子は交換則，結合則を満たす。

**証明** 愚直に行えば次のようにかけるため，

$$\begin{aligned}
 C_\Psi * C_\Phi &= \text{tr}_2 \left[ \left( \sum_{i,j} |i\rangle\langle j| \otimes \Phi(|i\rangle\langle j|) \otimes I \right) \left( \sum_{j',k} I \otimes |j'\rangle\langle k| \otimes \Psi(|k\rangle\langle j'|) \right) \right] \\
 &= \sum_{i,j,j',k} (|i\rangle\langle j|) \otimes \text{tr}(\Phi |i\rangle\langle j|j'\rangle\langle k|) \otimes \Psi(|k\rangle\langle j'|) \\
 &= \sum_{i,j,j',k} \delta_{j'j} \langle k| \Phi |i\rangle\langle j| \otimes \Psi(|k\rangle\langle j'|) \\
 &= \sum_{i,j,k} \langle k| \Phi |i\rangle\langle j| \otimes \Psi |k\rangle\langle j| \\
 &= \sum_{i,j} |i\rangle\langle j| \otimes \Psi \Phi |i\rangle\langle j| \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

確かに可換である。もしくは，部分トレースおよび部分転置をとる空間は  $\mathcal{H}_2$  に限られており，トレースの可換性，転置によってトレースの値が変わらないことを考えれば自明。

結合則の証明については，線型演算子の結合則より証明できる。 ■

ここで，個人的な意見として Choi 行列や接続演算子の利点を述べる。CPTP 写像による量子写像の表現では，入力系と出力系は等価なものではなかった（考えれば，当たり前ではあるが。）しかしながら，Choi 行列というのは作用する空間の次元を元の入力系と出力系の次元よりも大きく取ることによって，入力系と出力系を等価な空間として与えているわけである。そのように考えることによって，Choi 行列が属する空間には，入力系と出力系の情報が同時に入っていることになる。そのため，接続演算子を考えても量子写像では成立することはなかった交換則が成立するようになっている。当たり前であるが，量子写像の扱いにくさの一因は非可換性にあるわけだが，この接続演算子は見慣れない定義域と値域の取り方をすることによって（この部分を犠牲にすることによって），可換性を達成している。これによって，有用な計算が簡単にできるようになっているのだと思われる。次の節で見ると，これらの性質は”不完全”な量子通信路および量子超通信路を表現する際に非常に有用な性質となっている。

また，以下の文章では式の視認性から量子通信路とその表現方法である Choi 行列を区別するために基本，量子通信路そのものはチルダをつけた文字  $\tilde{A}, \tilde{B}, \dots$  と表し，Choi 行列はチルダを外した文字  $A, B, \dots$  で表現することとする。  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  とする。ただし一部例外として，ユニタリ演算子は単に  $U$  と表し，恒等演算子に関する Choi 行列は基本  $C_I$  で表現することにする。

### 3.2 1-slot 量子超通信路

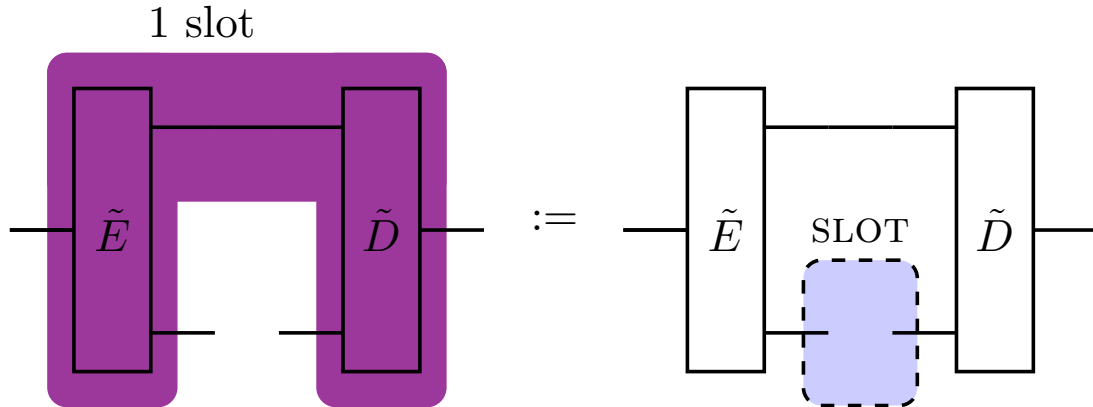


図 1: 1-slot 量子超通信路の概念図 slot と呼ばれるところに  $\tilde{C}$  の量子通信路を挿入することができる. このような slot に何も挿入していない状態の場合, 左図に示したように櫛のような形をしていることから, Quantum comb と呼ばれることもある.

この節においては, 量子通信路を量子通信路へと変換を行う 1-slot 量子超通信路の概念を導入する. 定義づけを行う際に, 量子超通信路の概念を図 1 に示したように三つの量子通信路の連結によって与えられる通信路の図示によりイメージづけを行う.

また, 補足となるがこのような Choi 演算子の表現を考えている時, 適当な量子状態  $\rho$  に対し通信路  $\Phi$  を作用させた時の Choi 演算子の表現は次のようにかける:

**命題 3.3: 状態への作用と接続演算子**

通信路  $\Phi: \mathcal{H}_I \rightarrow \mathcal{H}_O$ , 任意の状態  $\rho \in \mathcal{H}_I$  に関して  $\Phi(\rho)$  に関する Choi 演算子の関係式として, 次のように接続演算子を持って書くことができる:

$$\Phi(\rho) = \rho * C_\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_O) \tag{3.11}$$

**証明**

$$\begin{aligned} \rho * C_\Phi &= \text{tr}_I[(\rho^T \otimes I_O)C_\Phi] \\ &= \text{tr}_I \left[ (\rho^T \otimes I_O) \sum_{i,j} |i\rangle \langle j| \otimes \Phi(|i\rangle \langle j|) \right] \\ &= \sum_{i,j} \text{tr}(\rho^T |i\rangle \langle j|) \otimes \Phi(|i\rangle \langle j|) \\ &= \sum_{i,j} \langle i|\rho|j\rangle \Phi(|i\rangle \langle j|) \end{aligned}$$

$\Phi$  の線型性より

$$= \Phi\left(\sum_{i,j} \langle i|\rho|j\rangle |i\rangle \langle j|\right) = \Phi(\rho) \tag{3.12}$$

■

同時に測定についても, 接続演算子を用いて次のようにかける.



### 命題 3.4: 測定と接続演算子

公理 2.3 から, POVM 測定  $\{M_i\}$  に関して  $\rho$  について測定結果が  $i$  となる確率は  $p(i) = \text{tr}(M_i \rho)$  とかけた. この時, 接続演算子を用いて, 次の関係式が成立する:

$$p(i) = \rho * M_i^T \quad (3.13)$$

**証明** 量子系に付随する Hilbert 空間を  $\mathcal{H}$  とおいて,  $\rho, M_i$  もいずれも  $\mathcal{L}(H)$  の元であることを考えれば, ほとんど定義より自明で

$$\rho * M_i^T = \text{tr}(\rho(M_i^T)^T) = \text{tr}(\rho M_i) \quad (3.14)$$

■

- (1) 初めに  $\tilde{E}$  で示したエンコーダと呼ばれる量子通信路について考えられる. エンコーダ通信路は初め”過去の”系  $\mathcal{H}_p$  に属する量子状態を, 入力系空間  $\mathcal{H}_I$  および補助系空間  $\mathcal{H}_{\text{aux}}$  の合成系  $\mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_{\text{aux}}$  へ写す通信路である. この時点での通信路は  $\tilde{E}$  と表される.
- (2) 第二に, 入力系空間  $\mathcal{H}_I$  から出力系空間  $\mathcal{H}_O$  へ写す任意の量子通信路  $\tilde{C}$  を導入する. 当然だが,  $\mathcal{H}_{\text{aux}}$  はこの量子通信路に関与しないことになっている. これにより, 現時点での通信路全体は  $(I_{\text{aux}} \otimes \tilde{C}) \circ \tilde{E}$  とかける.
- (3) 最後に, デコーダ通信路  $\tilde{D}$  を作用させる. これは出力系, 補助系の合成空間  $\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_{\text{aux}}$  から”未来の”系空間  $\mathcal{H}_F$  へと写す通信路となっている. 結果, 通信路の表現は  $\tilde{D} \circ (I_{\text{aux}} \otimes \tilde{C}) \circ \tilde{E}$  となる.

これにより, 写像としての通信路の表現と, Choi 行列を用いた表現の関係は次のように表される.

$$\text{写像} : \tilde{D} \circ (I_{\text{aux}} \otimes \tilde{C}) \circ \tilde{E}, \quad \text{Choi 行列} : D * C * E \quad (3.15)$$

ここで注意として, 恒等行列  $I$  の Choi 行列  $C_I$  に関して, 接続演算子においてこの恒等演算子の作用を無視することができることを述べておく. 従って,

$$D * (C_I \otimes C) \circ E = D * C * E \quad (3.16)$$

と略記しても, 通信路の作用を考える上では問題ないため, 上のように表現する.

ここで  $\tilde{C}$  が超通信路上に差し込まれていない状況を考えよう. この際, 我々はこのエンコーダおよびデコーダ通信路および, 入力系および出力系と通信路をつなぐための各結線だけがある”不完全通信路”を有しているわけである. このような不完全通信路  $S$  を接続演算子を用いて  $S := D * E = E * D$  と表される. すると, この不完全通信路に量子通信路  $\tilde{C}$  を挿入することは, 次のように表される:

$$\begin{aligned} S * C &= E * D * C \\ &= D * C * D \end{aligned} \quad (3.17)$$

式変形においては, 接続演算子の結合, 交換則を用いた. 以上より, 量子超通信路の定義を次のように行う:

### 定義 3.4: 1-slot 量子超通信路

線型演算子 (Choi 行列)  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_O \otimes \mathcal{H}_F)$  が 1-slot 量子超通信路であるとは, 線型空間  $\mathcal{H}_{\text{aux}}$  および量子通信路  $\tilde{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_p) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{aux}} \otimes \mathcal{H}_I), \tilde{D} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{aux}} \otimes \mathcal{H}_I) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_F)$  が存在して,

$S = E * D$  と表されることである。

物理的に考えれば、 $S$  というのは、任意の通信路  $\tilde{C}$  を 1 入力<sup>\*14</sup>とする量子通信路盤<sup>\*15</sup>というものである。挿入した通信路  $\tilde{C}$  にたいし、基盤  $S$  は常に同じ作用を行う： $\tilde{E}$  によってエンコードされた入力系が、通信路  $\tilde{C}$  によって作用を受け、出力系が  $\tilde{D}$  によってデコードされる。最初に述べたように、もっと抽象的な考えをするならば  $S$  というのは、量子演算を別の量子演算に写す超関数であるというように考えることもできる。

また、量子超通信路は線型性および正定値性に関して次のような制約を受ける：

#### 命題 3.5:

線型演算子  $S$  が 1-slot 超通信路となるのは次の性質：

$$S \geq 0 \quad (3.18)$$

$$\text{tr}_F(S) = \text{tr}_{OF} S \otimes \frac{I_O}{d_O} \quad (3.19)$$

$$\text{tr}_{IOF}(S) = \text{tr}_{PIOF}(S) \otimes \frac{I_P}{d_P} \quad (3.20)$$

$$\text{tr}(S) = d_p d_o \quad (3.21)$$

を満たすとき、かつその時に限る。

**証明** 省略（文献 [10] を参照せよ。）

### 3.3 multi-slot 超通信路

この節において、超通信路の入力を単一の入力通信路  $\tilde{C} : \mathcal{L}_I \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_O)$  から、 $k$  個の通信路の集合  $\{\tilde{C}_i\}_{i=1}^k, \tilde{C}_i : \mathcal{L}(\mathcal{H}_{I_i}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{O_i})$  へと拡張することを考える。このような複 slot を考える場合、入力系と出力系の線型空間は  $i$  番目の部分空間のテンソル積と紐づいている。本稿においては、テンソル積部分空間の構造を表す際に、太文字を用いることにする： $\mathcal{H}_I := \otimes_{i=1}^k \mathcal{H}_{I_i}, \mathcal{H}_O := \otimes_{i=1}^k \mathcal{H}_{O_i}$ 。単一 slot の場合と異なり、 $k$  入力通信路を配置する際には、挿入の仕方には後に見ていくが、並列状、直列状、一般の形状といった具合に任意性が現れる。

#### 3.3.1 並列量子超通信路

並列超通信路は、単一のエンコーダと単一のデコーダで特徴付けられる。単一 slot のアナロジーを考えて、入力通信路  $C$  について、 $\tilde{C}$  を  $k$  個の通信路  $\{\tilde{C}_i\}_{i=1}^k$  に置き換える： $\tilde{C} := \otimes_{i=1}^k \tilde{C}_i$ 。これを図示すれば次の図 2 のようになる：

<sup>\*14</sup> もちろんであるが、 $\mathcal{H}_I$  や  $\mathcal{H}_O$  の意味での入力とは異なることに留意せよ。ここでの意味は、あくまでの超通信路への入出力という意味である

<sup>\*15</sup> ここで通信路盤と表現したのは、通信路盤は一度設計した後は、その通信路の中身が変わることはないという意味で、盤と付けている。通信路版への入力通信路は可変である。

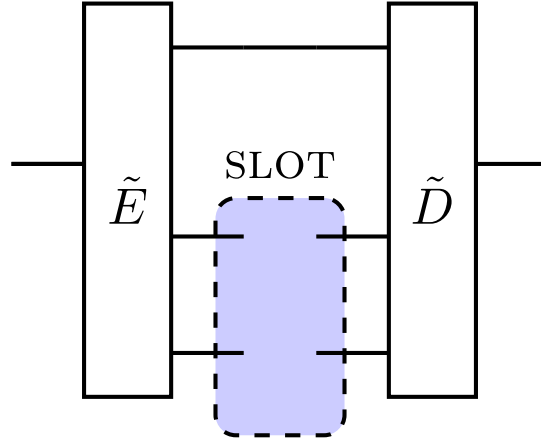


図 2: 並列量子超通信路の図示 ここでは slot の数を  $k = 2$  としている.

これより, 次のように平行量子超通信路の定義を行う:

### 定義 3.5: 並列量子超通信路

線型演算子  $S: \mathcal{L}(\mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_O \otimes \mathcal{H}_F)$  が  $k$ -slot 並列量子超通信路であるとは, 線型空間  $\mathcal{H}_{\text{aux}}$  が存在し, 量子通信路  $\tilde{E}: \mathcal{L}(\mathcal{H}_P) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{aux}} \otimes \mathcal{H}_I), \tilde{D}: \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{aux}} \otimes \mathcal{H}_O) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_F)$  を用いて,  $S = E * D$  と表される時である.

命題 (3.5) より, 次の系が得られる:

#### 系 3.1:

線型演算子  $S$  が  $k$ -slot 並列量子超通信路であるのは, 次の性質:

$$S \geq 0 \quad (3.22)$$

$$\text{tr}_F(S) = \text{tr}_{OF}(S) \otimes \frac{I_O}{d_O} \quad (3.23)$$

$$\text{tr}_{IOF}(S) = \text{tr}_{PIOF}(S) \otimes \frac{I_P}{d_P} \quad (3.24)$$

$$\text{tr}(S) = d_P d_O \quad (3.25)$$

を満たすとき, かつその時に限る.

量子演算の変形を考える時, 単一のエンコーダ, デコーダで構成できるという単純な構造からこのような並列実装が望ましい場合が多い. また, 並列超通信路は浅い深さの量子通信路で実現できるという特徴もある. これは, 後に定義する直列超通信路の深さが深くなりやすく, 変換全体の時間が結果として長くなるのとは対照的な性質である.

### 3.3.2 直列超通信路

直列超通信路とは, 各入力通信路  $\tilde{C}_i$  の間に異なるエンコーダが挿入されている一般の量子通信路を表現する. 例として  $k = 2$  の場合を考えれば, エンコーダ通信路  $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2$ , デコーダ  $\tilde{D}$  が与えられた時に, 入力とし

て  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$  を考えると，出力結果の通信路は  $D * C_2 * E_2 * C_1 * E_1$  と表現できる．このような超通信路を図示すれば次の図 3 のようになる：

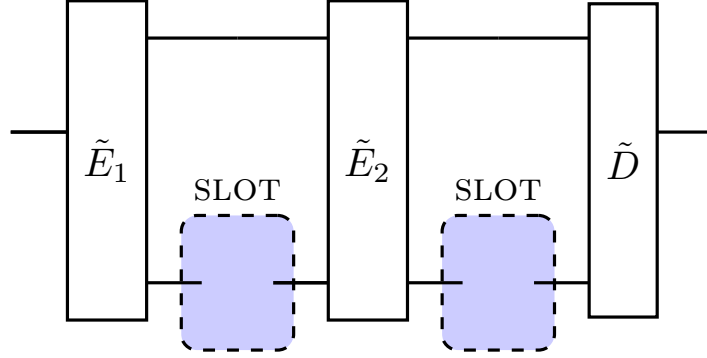


図 3: 直列超通信路の図示 ここでは slot の数を  $k=2$  としている．

正確には，次のような定義づけを与えることができる：

#### 定義 3.6: 直列超通信路

線型演算子  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_O \otimes \mathcal{H}_F)$  が  $k$ -slot 直列超通信路とは，エンコーダ通信路の組み  $\tilde{E}_1: \mathcal{L}(\mathcal{H}_P) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{aux}} \otimes \mathcal{H}_{I_1})$ ,  $2 \leq i \leq k, \tilde{E}_i: \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{aux}} \otimes \mathcal{H}_{O_{i-1}}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{aux}} \otimes \mathcal{H}_{I_{i-1}})$  およびデコーダ通信路  $\tilde{D}: \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{aux}} \otimes \mathcal{H}_{O_k}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_F)$  を用いて，

$$S = E_1 * E_2 * \dots * E_k * D \quad (3.26)$$

と表される時である．

直列通信路についても同様に

#### 命題 3.6:

線型演算子  $S$  が直列超通信路となるのは次の性質：

$$S \geq 0 \quad (3.27)$$

$$\text{tr}_F(S) = \text{tr}_{O_k F} S \otimes \frac{I_{O_k}}{d_{O_k}} \quad (3.28)$$

$$\text{tr}_{I_k O_k F}(S) = \text{tr}_{O_{k-1} I_k O_k F}(S) \otimes \frac{I_{O_{k-1}}}{d_{O_{k-1}}} \quad (3.29)$$

⋮

$$\text{tr}_{I_1 O_1 \dots I_k O_k F}(S) = \text{tr}_{P I_1 O_1 \dots I_k O_k F}(S) \otimes \frac{I_P}{d_P} \quad (3.30)$$

$$\text{tr}(S) = d_P d_O \quad (3.31)$$

を満たすとき，かつその時に限る．

ここで注意として，補助空間  $\mathcal{H}_{\text{aux}}$  の次元を制限してはいないため，並列超通信路は直列超通信路に含まれ

ることが挙げられる。これは、任意の並列通信路  $S' = E * D_{\text{par}}$  は、直列超通信路  $S_{\text{seq}} = E_1 * \dots * E_k * D$  で与えられる。ここで、 $\tilde{E}_1 := \tilde{E}, \tilde{D} := \tilde{D}_{\text{par}}$  であり、ここで  $2 \leq i \leq k, \tilde{E}_i$  は全て SWAP 操作とする。この実装を図 4 に示した。

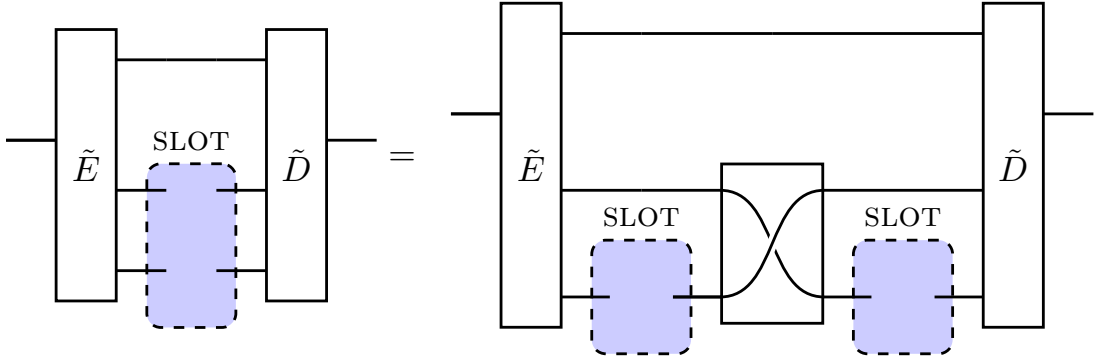


図 4: SWAP 操作を利用した、並列通信路から直列通信路への帰着方法 ここでは簡単のため、slot が 2 つの場合を考えているが、複数の slot の場合でも帰着方法は同じである。

### 3.3.3 並列測定-準備超通信路

これまでは、あくまでも量子超通信路としては測定を含まないものを導入してきたが、この説では状態の測定を行い、その測定結果  $i$  に対応する通信路  $\tilde{R}_i$  を系  $\mathcal{H}_P$  に作用させるような超通信路を考える。その図として、図 5 を参照せよ。

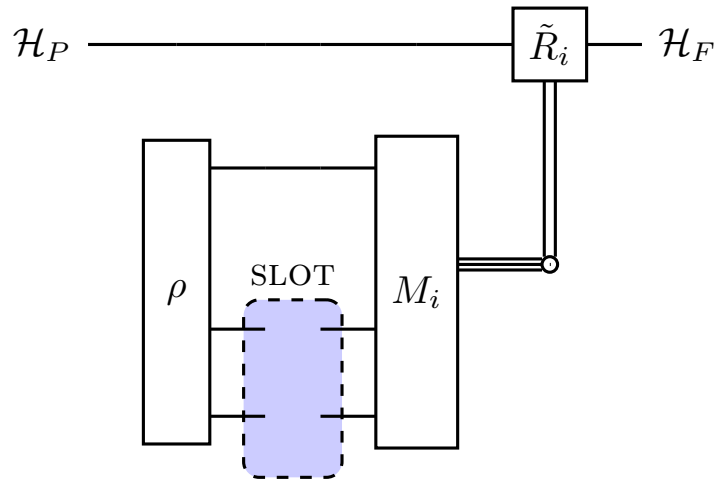


図 5: 並列測定-準備超通信路の図 ここでも簡単のため、slot が 2 つの場合を考えている。

この並列測定-準備超通信路は後で見ると、量子通信路の推定と深い繋がりがある。というのも、この超通信路が入力の操作の推定を含み（すなわち入力操作  $U$  が作用した後の量子状態の測定）、その推定に基づく出力操作  $\tilde{R}_i$  を作用させるという構造を持っているからである。

このような超通信路の構成は次の通りである。この時命題 3.3.3.4 を参照しつつ見るとわかりやすい：

- (1) 初めにプローブ状態を用意する： $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{I \otimes \mathcal{H}_{\text{aux}}})$ .

- (2) 入力通信路  $\tilde{C}: \mathcal{L}(\mathcal{H}_I) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_O)$  をプローブ系に作用させる:  $(\tilde{C} \otimes I)(\rho) = C * \rho$ .
- (3) 測定  $\{M_i\}, \forall M_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_O \otimes \mathcal{H}_{\text{aux}})$  を状態  $C * \rho$  に対して行う. これにより,  $i$  という結果は確率  $C * \rho * M_i^T$  で得られる. ここで,  $i$  を添字とする通信路の族  $\{\tilde{R}_i\}_i$  が与えられているとすれば, 平均してみれば出力通信路はその確率を考慮して  $\sum_i C * \rho * M_i^T * R_i$  と書くことができる.

ここで注意として, 測定演算子の族  $\{M_i^T\}$  が POVM となるのは,  $\{M_i\}$  もまた POVM となる時かつその時に限るため, 一般性を失わずに, 並列測定-準備超通信路は  $M_i^T$  の転置を無視して定式化することができる. 以上から, 並列測定-準備超通信路の定義を次のように与える:

### 定義 3.7: 並列測定-準備超通信路

線型演算子  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_O \otimes \mathcal{H}_F)$  が  $k$ -slot 並列測定-準備超通信路となるのは, 補助系  $\mathcal{H}_{\text{aux}}$ , 量子状態  $\rho \in \mathcal{S}((\mathcal{H}_I) \otimes \mathcal{H}_{\text{aux}}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_{\text{aux}})$ , POVM 測定  $\{M_i\}, M_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_{\text{aux}})$ , そして測定結果  $i$  に依存する通信路の族  $\{\tilde{R}_i\}$  が存在して,  $S = \sum_i \rho * M_i * R_i$  とかける時である.

## 4 ユニタリ操作に対する高階変換

以上より, 高階量子計算の推定を行うにあたって必要な道具は揃ったので, 本節より実際に高階量子演算における推定問題を与える. ここで  $f: \text{SU}(d) \rightarrow \text{SU}(d')$  をいわゆる  $d$  次元の  $\text{SU}$  群に関する高階関数として与えることにする. ここで  $U \in \text{SU}(d)$  は  $\mathbb{C}^d$  に作用するユニタリ演算子に一致し, 節 2.5 で与えた時間発展演算子であるため, 入力量子系が閉鎖系であれば,  $U$  に対応する量子演算が存在することになる. 従って,  $U$  は Slot に挿入することができる量子通信路として条件を満たし, さらに Slot の量子系の空間を拡大しない. つまり,  $\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_O$  である.

このような条件を与えた上で我々の考える題材は, 目的とする高階関数  $f$  の働きを有し, かつ挿入できる入力通信路  $U$  が最大  $k$  個の量子通信路を設計することである. 別の言い方をすれば, 任意の  $U$  にたいし  $U^{\otimes k} \mapsto f(U)$  を与える量子通信路が作れるかという問題である. これを Choi 行列, 接続演算子, 量子超通信路の概念を用いれば次のようにかける:

main problem

$f: \text{SU}(d) \rightarrow \text{SU}(d')$  が与えられた時に, 次の作用:

$$S * |U\rangle\langle U| \simeq |f(U)\rangle\langle f(U)| \quad (4.1)$$

を持つ最適な通信路 (並列, 直列) を設計せよ:

ここで, あくまでも  $\simeq$  の記号を用いたのは, 必ずしも一致させなくともある程度高階関数  $f$  と同じ作用を持つ通信路を設計することができれば良いからである. そのため, この  $f$  と同じ作用を持つことの指標として次節で Fidelity というものを導入する.

### 4.1 高階変換のパフォーマンスの指標

初めに高階変換  $f(U)$  が量子超通信路  $\tilde{S}$  がどれだけ似ているかを評価するためには、それを指し示す定量的な指標が必要となる。この指標を定義するにあたって、最初に量子状態  $\rho, \sigma$  がどれだけ似ているかを示す指標について定義し、その定義と整合的な量となるように定義されているという文脈を最低限理解しておくことが重要である。

文献 [11] において、Jozsa は次のような **Fidelity (忠実度)** と呼ばれる量を定義した：

#### 定義 4.1: 状態に対する Fidelity

量子状態  $\rho, \sigma$  に対して fidelity  $f$  は次のように定義される：

$$f(\rho, \sigma) = \sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}} \quad (4.2)$$

この fidelity に関して次の性質が成立することが示せる：

#### 命題 4.1:

量子状態に対する fidelity は次の性質を示す。

- (1)  $0 \leq f(\rho, \sigma) \leq 1$  で  $f(\rho, \sigma) = 1$  となるのは  $\rho = \sigma$  となる時に限る。
- (2)  $f(\rho, \sigma) = f(\sigma, \rho)$
- (3) 合成系  $\rho_1 \otimes \rho_2, \sigma_1 \otimes \sigma_2$  に対して  $f(\rho_1 \otimes \rho_2, \sigma_1 \otimes \sigma_2) = f(\rho_1, \sigma_1)f(\rho_2, \sigma_2)$ 。
- (4)  $f(\rho, \sigma)$  はユニタリ不変。

**証明** 省略。文献 [11,12] などを参照せよ。 ■

この fidelity と呼ばれる量は、他にも良い性質を持っており量子情報分野においてよく使われる指標となっている。

このような状態に関する fidelity を考えると、Choi 行列  $C_\Phi$  は量子状態として  $(I_d \otimes \Phi)|\Omega\rangle\langle\Omega|$  で表現されたことから、量子通信路  $\Phi$  はこのような状態と 1 対 1 対応をとっている。そのため、与えたように、二つの量子操作がどれだけ似ているかを与える指標を次のように定義する [13]。

#### 定義 4.2: 通信路 Fidelity

量子回路  $\tilde{A}, \tilde{B}: \mathcal{H}_{\text{in}} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{out}}$  に対して通信路 Fidelity は、その Choi 行列表現  $A, B$  を用いて

$$F(\tilde{A}, \tilde{B}) := f(A, B) \quad (4.3)$$

で与えられる。以下、 $F(\tilde{A}, \tilde{B}) = F(A, B)$  と表記することにする。

このような定義から、Choi 行列  $|U\rangle\langle U| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_F)$  と、任意の量子通信路  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_F)$  の Fidelity は

$$\begin{aligned} F(C, |U\rangle\langle U|) &= \frac{1}{d_P^2} \langle\langle U|C|U\rangle\rangle \\ &= \frac{1}{d_P^2} \text{tr}(C|U\rangle\langle\langle U|) \end{aligned} \quad (4.4)$$



ここで、 $C$  が  $\tilde{C}$  の Choi 行列であった場合、この通信路 Fidelity  $F$  と量子状態の Fidelity  $f$  に関しては次の恒等式が成立している [14] :

$$\int_{\text{Haar}} f(\tilde{C}(|\psi\rangle\langle\psi|), U|\psi\rangle\langle\psi|U^\dagger) d|\psi\rangle = \frac{d}{d+1} F(C, |U\rangle\langle U|) + \frac{1}{d+1} \quad (4.5)$$

このように Fidelity が与えられるため、量子超通信路  $S$  が高階関数  $f$  とどれだけ似ているかを評価するための自然な方法として、考える全てのユニタリ演算  $U$  に関して Fidelity を取り、その平均を取ることであろう。それを可能とするのが、 $SU(d)$  上の Haar 積分<sup>\*16</sup>であり、次のように平均 Fidelity なるものを定義する :

#### 定義 4.3: 平均 Fidelity

量子通信路  $|U\rangle\langle U|^{\otimes k}$  に作用する量子超通信路  $S$  と、目的とする高階関数  $f$  の平均 Fidelity (average fidelity) とは次のように定義する :

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &:= \int_{\text{Haar}} F[(S * |U\rangle\langle U|^{\otimes k}, |f(U)\rangle\langle f(U)|)] dU \\ &= \int_{\text{Haar}} \frac{1}{d^2} \text{tr}[(S * |U\rangle\langle U|^{\otimes k}, |f(U)\rangle\langle f(U)|)] dU \end{aligned} \quad (4.6)$$

ここで簡単にコンパクト群  $SU(d)$  に関する Haar 測度  $dU$  に関する性質を述べておくと、(1) Haar 不変すなわち  $dU = d(VU) = d(UV)$ , for  $\forall V \in SU(d)$  である。また、(2) 規格化されており  $\int_{SU(d)} dU = 1$  を満たす。

## 4.2 性能演算子と半正定値計画

文献 [15] でも示されているように、目的とする高階変換への平均 Fidelity に対する量子超通信路の最適化を行うにあたって、次で定義する性能演算子が非常に有用である :

#### 定義 4.4: 性能演算子

性能演算子  $\Pi$  とは

$$\Pi := \frac{1}{d^2} \int_{\text{Haar}} |f(U)\rangle\langle f(U)|_{PF} \otimes |U^*\rangle\langle U^*|^k dU \quad (4.7)$$

で定義される演算子である。ただし、 $U^*$  は  $U$  の計算基底における複素共軛とする。

これに関して、次の命題が成立する :

#### 命題 4.2:

任意の  $k$ -slot 量子超通信路  $S$  に対して

$$\text{tr}(S\Pi) = \langle F \rangle \quad (4.8)$$

<sup>\*16</sup> Haar 積分や測度に関して、数理物理班の解説記事に膨大であるが詳しい説明が載せているはずである。ぜひ、参照してほしい。

証明 性能演算子の定義により

$$\text{tr}(S\Pi) = \frac{1}{d^2} \int_{\text{Haar}} \text{tr} [S(|f(U)\rangle\rangle\langle\langle f(U)|_{PF} \otimes |U^*\rangle\rangle\langle\langle U^*|_{IO}^k)] dU$$

系 3.1 および,  $|U^*\rangle\rangle\langle\langle U^*| = |U\rangle\rangle\langle\langle U|^T$  の性質を用いれば

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{d^2} \int_{\text{Haar}} \text{tr} [(S * |U\rangle\rangle\langle\langle U|^{\otimes k})|f(U)\rangle\rangle\langle\langle f(U)|] dU \\ &= \langle F \rangle \end{aligned} \tag{4.9}$$

■

$S$  という量子超通信路の性能を演算できるということが,  $\Pi$  が性能演算子と呼ばれる所以である.

これより, 以下量子超通信路の集合を  $S$  として,  $\alpha \in \{\text{parallel, sequential}\}$  という形状を指定する添字を与えた時に, この節の最初で考えた問題は次のような最大問題に帰着することができる:

$$\max_{S \in S_\alpha} \text{tr}(S\Pi) \tag{4.10}$$

ここで, 3 章で見たように各量子超通信路には線型性および正定値性に関する制約がついていることから, この最大問題はいわゆる半正定値計画 (semidefinite programming SDP) 問題へと帰着することができる.

### 4.3 双対問題

SDP 問題を考える上で, その問題そのもの (主問題, primal problem) を考えるよりもその双対問題<sup>\*17</sup> を考える方が扱いやすい場合がある. 本稿における問題は, 制約条件として  $S_\alpha$  を満たす”変数”  $S$  において, 与えられた性能演算子により定まる目的関数  $\text{tr}\{S\Pi\}$  を最大化せよという問題であった. これに関する双対問題がどのように与えられるか結果のみ示す.

Dual SDP problem

$\bar{S}_\alpha$  を  $S_\alpha$  に関する双対空間とする. ここでは単に  $\bar{S} \in \bar{S}_\alpha$  ならば  $\text{tr}(\bar{S}S) = 1$  を満たすと考えればよい. この時, 双対問題は

$$\min_{\bar{S} \in \bar{S}_\alpha} \lambda \quad \text{s.t.} \quad \Pi \leq \lambda \bar{S} \tag{4.11}$$

と与えられ, 最小となる  $\lambda$  が  $\langle F \rangle$  となる.

ここで双対空間に対する最低限の定義を与える:

#### 定義 4.5: 量子超通信路に対する双対空間

$S_\alpha$  の双対空間とは次のように与えられる:

$$\bar{S}_\alpha := \{\bar{S} \in \bar{\mathcal{L}}(\mathcal{H}_P) \otimes \bar{\mathcal{L}}(\mathcal{H}_I) \otimes \bar{\mathcal{L}}(\mathcal{H}_O) \otimes \bar{\mathcal{L}}(\mathcal{H}_F) \mid \forall S \in S_\alpha, \text{tr}(S\bar{S}) = 1\} \tag{4.12}$$

<sup>\*17</sup> 双対問題の一例としては,  $m$  個の制約条件が与えられた時の  $n$  変数関数の最小値問題に対し,  $n$  個の双対制約条件を考え, 制約条件 (上限値など) から決まる  $m$  変数目的関数の最大値問題を考えることなど. 具体的な問題として機械学習の最適化問題の一例などが挙げられる [16].

直列通信路に関する双対空間は次の様に与えられる：

**命題 4.3:**

$S_{\text{pararell}}$  の任意の元  $\bar{S}$  は、任意の状態  $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_P) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{aux}1})$  と  $\forall \rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{O_k}) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{aux},k})$  に対して  $\text{tr}(\rho P^t) = 1$  を返す測定演算子  $P$ 、および双対量子通信路  $\tilde{C}_i^* : \mathcal{L}(\mathcal{H}_{I_i}) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{aux},i}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{O_i}) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{aux},i+1})$  の Choi 演算子を用いて表すことができる。

**証明** ここでは図示による証明の概略を示す（そのため、補助系を一部省略して書いている．詳細は文献 [15] をみよ．）初めにこれまでと同様に直列超通信路を考えた時に、例えば  $k=2$  の場合、これの図示として次のように書くことができる：

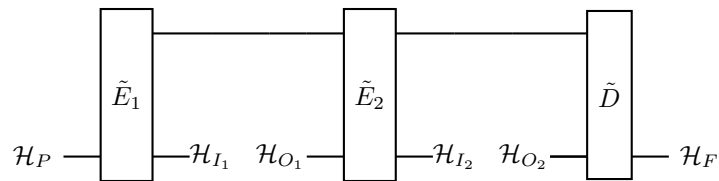


図 6: 直列超通信路の図示

任意の直列通信路  $S$  に対して、ちょうど命題において与えられた、次の図 7 のような双対量子超通信路を考える：

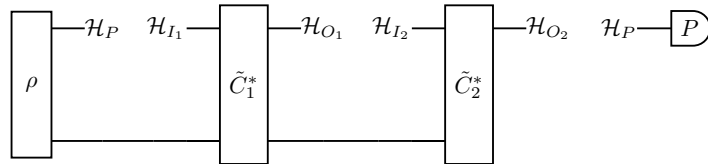


図 7: 与えられた超通信路に対する双対回路

定義より、図に示したように  $S * \bar{S}$  は図 8 に示したような連結となり

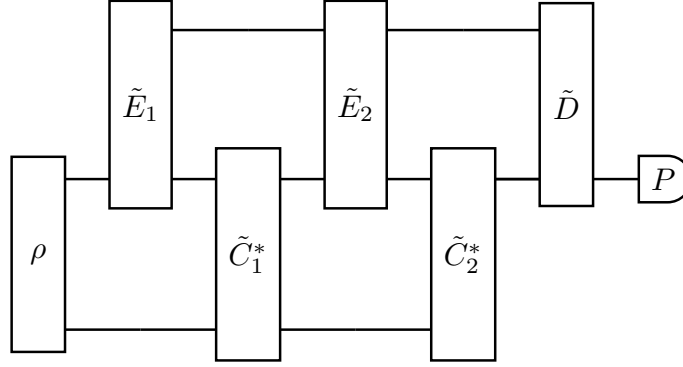


図 8: 原量子超回路とその双対の結合

これを式で書けば

$$S * \rho * C_1^* * \dots * C_{n-1}^* * P^t = \text{tr}_{PIOF}(S^T \bar{S}) = 1 \quad (4.13)$$

■

そのため、直列通信路の双対も同じ直列的な構造を持った通信路と表すことができる。

## 5 高階関数が準同型の場合： $f(UV) = f(U)f(V)$

本章においては、高階関数  $f$  が準同型の場合に関する解析結果を示す。ここで、我々が留意すべきことは  $f$  の出力する変換の次元  $d = d'$  が同じならば、非自明な準同型な高階関数というのは複素共軛を返す函数のみに限られることである： $f(U) = U^*$ 。

このような高階関数を考える時、Haar 測度の普遍性により性能演算子は次の関係性を満たす：

### 命題 5.1:

高階関数について  $f(V)^T = f(V^T)$  が成立すれば、

$$[\Pi, I_P \otimes I_I \otimes U_O^{*\otimes k} \otimes f(U)_F] = 0 \quad \forall U \in \text{SU}(d) \quad (5.1)$$

$$[\Pi, f(U)_P \otimes U_I^{*\otimes k} \otimes I_{O \otimes I_F}] = 0 \quad \forall U \in \text{SU}(d) \quad (5.2)$$

**証明** 任意の  $V \in \text{SU}(d)$  に対して、

$$\begin{aligned} & (I_P \otimes I_I \otimes V_O^{*\otimes k} \otimes f(V)_F) \Pi (I_P \otimes I_I \otimes V_O^{*\otimes k} \otimes f(V)_F)^\dagger \\ &= \frac{1}{d^2} \int_{\text{Haar}} (I_P \otimes f(V)_F \otimes I_I \otimes V_O^{*\otimes k}) |f(U)\rangle \langle f(U)|_{PF} \otimes |U^*\rangle \langle U^*|_{IO}^k (I_P \otimes f(V)_F \otimes I_I \otimes V_O^{*\otimes k})^\dagger dU \\ &= \frac{1}{d^2} \int_{\text{Haar}} |f(V)f(U)\rangle \langle f(V)f(U)| \otimes |V^*U^*\rangle \langle V^*U^*|^{\otimes k} dU \end{aligned}$$

ここで Haar 測度の普遍性より  $VU = W \in \text{SU}(d)$  とおけば

$$= \frac{1}{d^2} \int_{\text{Haar}} |f(W)\rangle\langle f(W)| \otimes |W^*\rangle\langle W^*| dW = \Pi \quad (5.3)$$

これより，第一式を証明することができた．第二式に関しては，任意の  $V \in \text{SU}(d)$  に関して，

$$\begin{aligned} & (f(V)_P \otimes V_I^{*\otimes k} \otimes I_O \otimes I_F) |f(U)\rangle\langle f(U)|_{PF} \otimes |U^*\rangle\langle U^*|_{IO}^k (f(V)_P \otimes V_I^{*\otimes k} \otimes I_O \otimes I_F)^\dagger \\ &= (I_P \otimes I_I \otimes (V^*)_{O}^{T\otimes k} \otimes f(V)_F^T) |f(U)\rangle\langle f(U)|_{PF} \otimes |U^*\rangle\langle U^*|_{IO}^k (I_P \otimes I_I \otimes (V^*)_{O}^{T\otimes k} \otimes f(V)_F^T)^\dagger \end{aligned} \quad (5.4)$$

$V = V^T$  と再定義して第一式と同じように証明することができる． ■

また，この交換関係式について次のように書くことができる：

#### 定理 5.1:

性能演算子について，線型空間  $\mathcal{L}(\mathbb{C}_d^{\otimes k} \otimes \mathbb{C}_d)$  をはる直交基底  $\{P_i\}$  であって，次の性質：

$$[P, U^{*\otimes k} \otimes f(U)] = 0 \quad \forall U \in \text{SU}(d), d_i = \text{tr}(P_i P_i^\dagger) \quad (5.5)$$

を満たすものが存在して，次の関係式で表される：

$$\Pi = \frac{1}{d^2} \sum_i \frac{(P_{IP}^i) \otimes P_{OF}^i}{d_i} \quad (5.6)$$

**証明** 証明略．文献 [6] の付録 A を参照せよ． ■

### 5.1 $f(U) = U^*$ に関して $k = 1$ の場合

入力通信路がユニタリで  $f$  が複素共軛を返す函数である場合に関する結果で  $k = 1$  について考える．すなわち，1-slot 量子超通信路に関する結果である．この場合式 (5.5) に関して，直交基底は任意の  $U$  について  $[P, U^{\otimes k} \otimes U] = [P, U^{\otimes k+1}] = 0$  を満たすわけだが，このような性質を満たす基底を求める方法としては， $U^{\otimes k+1}$  上の  $\text{SU}(d)$  の縮約表現を考えることである．

ここで， $P$  として考えられる直感的な演算子は， $\mathbb{C}_d^{\otimes k+1}$  の基底に関する置換操作に対応する演算子である．実際， $\pi \in \mathfrak{S}_{k+1}$  として，これに対応する置換操作を  $V_\pi$  とおけば，

$$V_\pi(|i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes \dots \otimes |i_{k+1}\rangle) = |i_{\pi^{-1}1}\rangle \otimes |i_{\pi^{-1}2}\rangle \otimes \dots \otimes |i_{\pi^{-1}k+1}\rangle \quad (5.7)$$

であるから，明らか  $U^{\otimes(k+1)\dagger} V_\pi U^{\otimes(k+1)} = V_\pi$  である．しかし， $\{V_\pi\}_{\pi \in \mathfrak{S}_{k+1}}$  は直交していないため，生成系でしかない．そのため，Gram-Schmidt の直交法などを用いることで直交基底を作り出すことができる．

$k = 1$  の場合については，いわゆる対称空間と非対称空間への射影をこの直交基底として選び出すことができる [17]：

$$P^{\text{sym}} := \frac{I + \Lambda}{2}, \quad P^{\text{asym}} := \frac{I - \Lambda}{2} \quad (5.8)$$

ここで  $\Lambda := \sum_{i,j} |ji\rangle\langle ij|$  として，Flip 演算子という．

ここでは，条件として  $f$  が複素共軛を返し，入力としてはユニタリ通信路を考察しているため， $d = d_P =$

$d_I = d_O = d_F$  とすることができ、上の直交基底を用いれば

$$\Pi = \frac{1}{d^2} \left( \frac{P_{IP}^{\text{sym}} \otimes P_{OF}^{\text{sym}}}{d_{\text{sym}}} + \frac{P_{IP}^{\text{asym}} \otimes P_{OF}^{\text{asym}}}{d_{\text{asym}}} \right) \quad (5.9)$$

で与えられる。ここで双対 SDP 問題を考えたいわけだが、 $S_\alpha$  の性質を知る必要がある。ここで前に与えた直列通信路の双対  $\Gamma$  について  $k=1$  の場合には、次の性質を満たす：

$$\Gamma = \frac{I_F}{d_F} \otimes T_{PIO} \quad (5.10)$$

$$T_{PIO} \geq 0 \quad (5.11)$$

$$\text{tr}_O(T_{PIO}) = \text{tr}_{IO}(T_{PIO}) \otimes \frac{I_I}{d_I} \quad (5.12)$$

$$\text{tr}(T_{PIO}) = 1 \quad (5.13)$$

これより、 $\lambda \Gamma \geq \Pi$  を考える。ここで  $[\Pi, U_F \otimes U_O \otimes I_{IP}] = 0$  であるから (?), 次の様にかける：

$$[T_{PIO}, U_O \otimes I_{PI}] = 0, \quad \forall U_2 \in SU(d_O) \quad (5.14)$$

これより、適当な演算子  $U_{IO}$  を用いて  $T_{PIO} = I_O \otimes U_{PI}$  とかける。この時、式 (5.12), (5.13) より  $U_{PI} = I_I \otimes \rho_P$  と表せるので、 $[\Pi, I_{FO} \otimes U_I \otimes U_P] = 0$  より、 $\rho_P = I_P/d_O$  と書いても  $\rho_P$  の一般性を欠くことなく、不等式が成立する。以上より、 $\Gamma = I_{PIOF}/d_F d_P = I/d^2$  とおいて SDP 問題を考えることができる。以上より

$$\lambda \geq \left( \frac{P_{IP}^{\text{sym}} \otimes P_{OF}^{\text{sym}}}{d_{\text{sym}}} + \frac{P_{IP}^{\text{asym}} \otimes P_{OF}^{\text{asym}}}{d_{\text{asym}}} \right) \quad (5.15)$$

を満たす最小の  $\lambda$  は、射影演算子の固有値が 1, 0 であることを考えれば、

$$\lambda = \frac{1}{d_{\text{asym}}} = \frac{2}{d(d-1)} \quad (5.16)$$

以上より、

$$\langle F \rangle = \frac{2}{d(d-1)} \quad (5.17)$$

と求められる。

## 5.2 $f(U) = U^*$ に関して、 $\langle F \rangle = 1$ になる場合

平均 Fidelity が 1 に一致する入力の個数について、結果だけ次の定理で示す：

### 定理 5.2:

入力の個数  $k = d - 1$  の量子超通信路  $S$  で  $\langle F \rangle = 1$  となるものが存在する。

証明 証明略。文献 [15] を参照せよ。 ■

## 6 $f$ が反準同型の場合： $f(UV) = f(V)f(U)$

この節においては、 $f$  が入力に対して反準同型の場合：

$$f(UV) = f(V)f(U), \quad \forall U, V \in \text{SU}(d)$$

あるいは

$$f(UV)^T = [f(V)f(U)]^T = f(U)^T f(V)^T, \quad \forall U, V \in \text{SU}(d) \quad (6.1)$$

この場合でも、出力の次元  $d'$  が入力系の次元  $d$  と等価の場合、非自明な高階関数はユニタリー転置  $f(U) = U^T$ 、ユニタリー随伴  $f(U) = U^\dagger$  に限られることに留意すべきである。このような高階関数を考える際に命題 5.1 で考えた時と同様にして、次の系が示せる：

### 系 6.1:

高階関数  $f$  が反準同型の場合、次の交換関係が成立する：

$$[\Pi, f(U)_P^T \otimes I_I \otimes U_O^{*\otimes k} \otimes I_F] = 0 \quad \forall U \in \text{SU}(d) \quad (6.2)$$

$$[\Pi, I_P \otimes U_I^{*\otimes k} \otimes I_O \otimes f(U)_F^T] = 0 \quad \forall U \in \text{SU}(d) \quad (6.3)$$

この性質を用いることによって次の命題を示すことができる：

### 定理 6.2:

$f$  が反準同型ならば、それに付随する性能演算子は直交基底  $P \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_d^{\otimes k} \times k)$  であって、次の性質：

$$[P, U^{*\otimes k} \otimes f(U)^T] = 0, \quad \forall U \in \text{SU}(d), d_i := \text{tr}(P^i P^{i\dagger}) \quad (6.4)$$

を満たすものが存在して、次の関係式で表される：

$$\Omega = \frac{1}{d^2} \sum_i \frac{(P_{OP}^i)^* \otimes P_{IF}^i}{d_i} \quad (6.5)$$

さらに  $\langle F \rangle$  を評価するために、次の命題を示す：

### 命題 6.1:

$S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_O \otimes \mathcal{H}_F)$  が並列/直列超通信路であって、 $k$  個の入力  $U$  を受け取って  $f(U)$  を返す、平均フィデリティが  $\langle F \rangle$  の通信路であるとする。もし、 $f(UV) = f(V)f(U)$  であるとすれば、ある並列/直列超通信路の  $S' \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_O \otimes \mathcal{H}_F)$  で、 $k$  個の入力  $U$  を受け取って  $f(U)$  を返す、平均フィデリティが  $\langle F \rangle$  を有する、次の交換関係：

$$[S', f(A)_P^T \otimes B_I^{*\otimes k} \otimes A_O^{*\otimes k} \otimes f(B)_F^T] = 0 \quad (6.6)$$

を満たす。ここで  $A, B$  は任意のユニタリ演算子である。

殊に、 $|U\rangle\langle U|^{\otimes k}$  に対する  $S'$  の作用は、 $I$  の Choi 演算子  $|I\rangle$  を用いて

$$S' * |U\rangle\langle U|^{\otimes k} = (I_P \otimes f(U^T)_F^T) (S' \otimes |I\rangle\langle I|_{IO}^{\otimes k}) (I_P \otimes f(U^T)_F^T)^\dagger \quad (6.7)$$



と表される [7].

**証明** 初めに任意の量子通信路  $S$  に対して、次の様に Haar-twirled 演算子を定義する：

$$S' := \int \int (f(U)_P^T \otimes V_I^{*\otimes k} \otimes U_O^{*\otimes k} \otimes f(V)_F^T) S (f(U)_P^T \otimes V_I^{*\otimes k} \otimes U_O^{*\otimes k} \otimes f(V)_F^T)^\dagger dU dV \quad (6.8)$$

ここで Haar 測度の普遍性より

$$[S', f(A)_P^T \otimes B_I^{*\otimes k} \otimes A_O^{*\otimes k} \otimes f(B)_F^T] = 0 \quad (6.9)$$

が得られる。以上より、 $\Pi$  に関する交換関係式を用いることで

$$\text{tr}(S\Pi) = \text{tr}(S'\Pi) \quad (6.10)$$

を満たす。

式 (6.8) より、不変関係式が得られる：

$$\begin{aligned} S' * |U\rangle\langle U| &= \left[ (f(A)_P^T \otimes B_I^{*\otimes k} \otimes A_O^{*\otimes k} \otimes f(B)_F^T) S' (f(A)_P^T \otimes B_I^{*\otimes k} \otimes A_O^{*\otimes k} \otimes f(B)_F^T)^\dagger \right] * |U\rangle\langle U| \\ &= (f(A)_P^T \otimes f(B)_F^T) \left[ S' * (B_I^{\dagger\otimes k} \otimes A_O^{\dagger\otimes k} |U\rangle\langle U| B_I^{\otimes k} \otimes A_O^{\otimes k}) \right] (f(A)_P^T \otimes f(B)_F^T)^\dagger \\ &= (f(A)_P^T \otimes f(B)_F^T) (S' * |A^\dagger U B^*\rangle\langle A^\dagger U B^*|^{\otimes k}) (f(A)_P^T \otimes f(B)_F^T)^\dagger \end{aligned} \quad (6.11)$$

ここで  $A = I, B = U^T$  とおけば、目的の式が得られる。ここで  $S$  は任意だったので、 $S$  の種類を限定すれば、 $S'$  の種類も限定される。(詳細は [6] の付録 B をみよ。) ■

## 6.1 ユニタリ転置を返す並列量子超通信路とユニタリ演算推定

ここではこれまで考えた問題とは異なり、次のような問題を考える。設定として、 $U$  の情報が何もない状況でかつ  $k$  個の  $U \in \text{SU}(d)$  が使用可能な状況を考える。この時、 $U$  がどのような演算子であるか量子通信路を用いて推定する問題がユニタリ演算子推定問題である。

この問題の戦略として、 $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_{\text{aux}}$  を用意して、次の様な関係式が成立するとする：

$$|\phi_U\rangle := (U_I^{\otimes k} \otimes I_{\text{aux}}) |\phi\rangle \in \mathcal{H}_O \otimes \mathcal{H}_{\text{aux}} \quad (6.12)$$

次に POVM 測定  $\{M_i\}_i, \forall M_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_O \otimes \mathcal{H}_{\text{aux}})$  を考え、 $i$  の結果が出た時には、入力ユニタリ通信路は先に決めていた  $U_i$  であると推定するという戦略を取る。この場合、平均 Fidelity という観点では、この戦略は次の様に評価できる：

$$\langle F \rangle_{\text{est}} := \int_{\text{SU}(d)} \sum_i \text{tr}(M_i |\phi_U\rangle\langle \phi_U|) F(|U_i\rangle\langle U_i|, |U\rangle\langle U|) dU \quad (6.13)$$

これを前の節で定めた測定-準備超通信路の記法を用いて表せば、 $S := \sum_i |\phi\rangle\langle \phi|_{I, \text{aux}} * (M_i^T)_{O, \text{aux}} * |U_i\rangle\langle U_i|_{PF}$  と定義すれば

$$\langle F \rangle_{\text{est}} = \int_{\text{SU}(d)} \sum_i \text{tr}(M_i |\phi_U\rangle\langle \phi_U|) F(|U_i\rangle\langle U_i|, |U\rangle\langle U|) dU$$

$$\begin{aligned} \text{tr}_{\mathbf{I}}(|U\rangle\langle U|_{\mathbf{IO}}|\phi\rangle\langle\phi|_{\mathbf{I}}^T) &= \sum_{i,j} U|j\rangle\langle i|U^\dagger\langle i|(|\phi\rangle\langle\phi|)^T|j\rangle = \sum_{i,j} U|j\rangle\langle i|U^\dagger\langle j|\phi\rangle\langle\phi|i\rangle = U|\phi\rangle\langle\phi|U^\dagger \text{ より,} \\ &= \frac{1}{d^2} \int \sum_i \text{tr}((M_i^T)_{\mathbf{O},\text{aux}}|U\rangle\langle U|_{\mathbf{IO}}^{\otimes k} * |\phi\rangle\langle\phi|_{\mathbf{I},\text{aux}}) \text{tr}(|U_i\rangle\langle U_i|_{\mathbf{PF}}|U\rangle\langle U|_{\mathbf{PF}}) dU \end{aligned}$$

さらに  $\text{tr}(A)\text{tr}(B) = \text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A * B)$  に注意して

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{d^2} \int \text{tr} \left[ \sum_i (M_i^T)_{\mathbf{O},\text{aux}} * |U\rangle\langle U|_{\mathbf{IO}}^{\otimes k} * |\phi\rangle\langle\phi|_{\mathbf{I},\text{aux}} * |U_i\rangle\langle U_i|_{\mathbf{PF}}|U\rangle\langle U|_{\mathbf{PF}} \right] dU \\ &= \frac{1}{d^2} \int \text{tr}(S * |U\rangle\langle U|_{\mathbf{IO}}^{\otimes k}|U\rangle\langle U|_{\mathbf{PF}}) dU \\ &= \int F(S * |U\rangle\langle U|_{\mathbf{IO}}^{\otimes k}, |U\rangle\langle U|_{\mathbf{PF}}) dU \end{aligned} \quad (6.14)$$

これは、つまりユニタリ演算子推定の問題は、測定-準備超通信路によって高階関数として恒等関数を作る問題へ帰着することができる。

そして、 $f$  がユニタリ転置を返す関数ならば、並列超通信路を測定-準備超通信路に帰着できることを次の定理によって示す：

### 定理 6.3:

並列超通信路によるユニタリ転置を返す通信路の平均 Fidelity の最適化は測定-準備超通信路によって達成される。それに加えて、平均 Fidelity の最適値は  $\text{SU}(d)$  に限定したユニタリ演算子の推定問題の平均 Fidelity の最適値と等価となる。

**証明**  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_O \otimes \mathcal{H}_F)$  を  $\langle F \rangle$  の並列超通信路とする。ここで並列超通信路の定義より

$$\text{tr}_F(S) = \text{tr}_{\mathbf{OF}}(S) \otimes \frac{I_{\mathbf{O}}}{d_{\mathbf{O}}} \quad (6.15)$$

ここで  $f(U) = U^T$  とすれば、命題 6.1 の内容が使えて、 $\forall A, B \in \text{SU}(d)$  に対して

$$[S, f(A)_P^T \otimes B_I^{*\otimes k} \otimes A_O^{*\otimes k} \otimes f(B)_F^T] = 0 \quad (6.16)$$

となる  $S$  を考えることができる。従って、

$$[f(A)_P^T \otimes B_I^{*\otimes k}, \text{tr}_{\mathbf{OF}}(S)] = 0 \quad (6.17)$$

も導くことができる。ここで  $f(A)^T = A$  であったから Schur の補題により、 $\text{tr}_{\mathbf{OF}}(S) = \frac{I_P}{d_P} \otimes \text{tr}_{\mathbf{POF}}(S)$  と表すことができる。

ここから、天下りの的に測定-準備超通信路を別の量子推定問題へと変換するために必要な状態および量子通信路を定義していく。補助量子系として  $H_{\text{aux}}$  として  $\mathcal{H}_I$  と等価な空間を考える。ここで  $\rho := \text{tr}_{\mathbf{POF}}(S)/\text{tr}(S)$  という量子状態を定義することで、補助量子系の次元が  $\mathcal{H}_I$  が等しいことから  $\rho$  の純粋化  $|\phi\rangle$  を考えることができ、次のように定義する：

$$|\phi\rangle := (\sqrt{\rho_I} \otimes I_{\text{aux}})|\Omega\rangle_{\mathbf{I},\text{aux}} \quad (6.18)$$

ここで  $|\Omega\rangle$  は最大纏れ状態であり、恒等写像の Choi 行列に対応している。さらに、量子通信路  $\tilde{R}$  の Choi 表現  $R$  として

$$R := (I_P \otimes \sqrt{\rho_{\text{aux}}}^{-1} \otimes I_{\mathbf{OF}}) S_{P,\text{aux},\mathbf{OF}} (I_P \otimes \sqrt{\rho_{\text{aux}}}^{-1} \otimes I_{\mathbf{OF}})^\dagger \quad (6.19)$$

ここで  $\sqrt{\rho}^{-1}$  は Moore-Penrose の逆行列で定義している。これに関して、 $S = |\phi\rangle\langle\phi| * R$  が成立することは、計算で確かめることができる。ここで  $S$  が超通信路としてどのようなものかを考えると、事前に  $|\phi\rangle$  という状態を用意し、入力量子状態  $U$  が作用した  $|\phi_U\rangle$  を測定し、その結果に依存して  $R$  という通信路が作用する構造となっている。発想としてはかなり飛躍を伴うが、これが確かに測定-準備超通信路に等しいことは文献 [18] で示されている量子超通信路と同等の構造を持っていることから確かめることができる。このように元々並列通信路であった  $S$  を別の Choi 行列による表現によって、測定-準備通信路に変換することができる。さらに、この測定-準備通信路に関する Fidelity は、ユニタリ演算子の推定問題の平均 Fidelity と等価となることが文献 [18] で示されており、ユニタリ演算子の推定問題の平均 Fidelity について、 $d=2$ 、入力ユニタリ通信路の数が  $k$  の場合その Fidelity は

$$\langle F \rangle_{\text{est}, d=2} = \cos^2\left(\frac{\pi}{k+3}\right) \quad (6.20)$$

であることが文献 [19] において示されている。 ■

## 6.2 直列量子超通信路の優越性

また、文献 [20] において次の結果が示されている：

### 定理 6.4:

任意の次元  $d$  で、 $k$  個の入力を受け取り、ユニタリ転置を返す直列量子超通信路の平均 Fidelity は

$$\langle F \rangle_{\text{seq}} \geq 1 - \left(1 - \frac{1}{d^2}\right)^{\lceil k/d \rceil} \quad (6.21)$$

で与えられる。

以上の結果から次の興味深い結果が得られる：

### 定理 6.5: 直列量子超通信路の優越性

任意の次元において、ユニタリ転置を返す量子超通信路について、その Fidelity は並列通信路であれば

$$\langle F \rangle_{\text{par}} \leq 1 - \frac{1}{(k+3)^2} \quad (6.22)$$

となり、定理 6.2 の結果と合わせれば、量子超通信路の構造の差によって最適化された平均 Fidelity には指数的なギャップが存在する。

**証明** この時、入力について  $d > 2$ ,  $SU(d)$  のユニタリ転置を返す量子超通信路の平均 Fidelity は明らか  $d=2$  での平均 Fidelity よりも悪くなるものだと考えられる。以上より、 $\cos$  関数の級数展開を考えることにより、

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\pi}{k+3}\right) &\leq 1 - \left(\frac{\pi}{k+3}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{k+3}\right)^4 \\ &\leq 1 - \left(\frac{1}{k+3}\right)^2 \end{aligned} \quad (6.23)$$

であるから、任意の次元において  $\langle F \rangle_{\text{par}} \leq 1 - (1/(k+3))^2$  を満たす。 ■

## 7 まとめ

以上が、高階量子演算によって得られる結果の一部である。現状および近い将来の量子計算機においてはそのノイズの多さなどに起因する低い計算能力から、リソース最適化が常に要求され、このように超通信路の構造の違いによって、平均 Fidelity が異なることは、変換を最も効率的に行うことを考えると重要な結果である。また、構造の差異から最適化限界にも差が生じるという事実は量子計算の限界を探究するという立場に置かれた時、非常に興味深い結果である。函数型計算の量子版は、No cloning 定理などに代表される禁則定理によって古典計算と同等に実装できないことは容易に想像できる<sup>\*18</sup>。しかしながら、このような Choi 行列を利用した解析により、入力通信路を多くは要求するものの、Fidelity の高い高階函数を実装することが可能であるという事実を示すことができ、量子版函数型プログラムの実装を考える上で、重要な結果を得ることができる [?].

## 参考文献

- [1] Michael M Wolf. Quantum channels and operations—guided tour, 2012. [リンク](#).
- [2] 石坂智, 小川朋宏, 河内亮周, 木村元, 林正人. 量子情報科学入門. 共立出版, 2012.
- [3] 佐々木寿彦. 量子情報 前半, 2020. [講義ノートリンク](#).
- [4] Masanao Ozawa. Quantum measurements, instruments, and uncertainty principle. *Interdisciplinary Information Sciences*, Vol. 10, No. 1, pp. 69–81, 2004. [https://www.jstage.jst.go.jp/article/iis/10/1/10\\_1\\_69/\\_article/-char/ja/](https://www.jstage.jst.go.jp/article/iis/10/1/10_1_69/_article/-char/ja/).
- [5] 小澤正直. 量子測定理論入門 (講義, 第 56 回物性若手夏の学校 (2011 年度) 研究と人生の指針-beyond the compass of your field.-, 講義ノート), 2012. <https://doi.org/10.1007/s12045-012-0007-x>.
- [6] Marco T’ulio Quintino and Daniel Ebler. Deterministic transformations between unitary operations: Exponential advantage with adaptive quantum circuits and the power of indefinite causality. *Quantum*, Vol. 6, p. 679, 2022. <https://quantum-journal.org/papers/q-2022-03-31-679/pdf/>.
- [7] KS Mallesh, S Chaturvedi, R Simon, and N Mukunda. States of physical systems in classical and quantum mechanics. *Resonance*, Vol. 17, No. 1, pp. 53–75, 2012. <https://doi.org/10.1007/s12045-012-0007-x>.
- [8] あーるえぬ 大学数学のあれこれ 線形シュレディンガー方程式の基本解とユニタリ群. <https://math-note.xyz/analysis/differential-equation/schrodinger-equation/>.
- [9] 小川朋宏. 量子情報数理特論, 2022. <http://www.quest.lab.uec.ac.jp/ogawa/qmath2021/>.
- [10] Giulio Chiribella, G Mauro D’Ariano, and Paolo Perinotti. Quantum circuit architecture. *Physical review letters*, Vol. 101, No. 6, p. 060401, 2008. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.060401>.
- [11] Richard Jozsa. Fidelity for mixed quantum states. *Journal of modern optics*, Vol. 41, No. 12, pp. 2315–2323, 1994. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09500349414552171>.

<sup>\*18</sup> 事実として多くの高階函数が実装不可能であることが知られている。

- [12] Michael A Nielsen and Isaac L Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2002.
- [13] Maxim Raginsky. A fidelity measure for quantum channels. *Physics Letters A*, Vol. 290, No. 1-2, pp. 11–18, 2001. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960101006405>.
- [14] MichaÅ Horodecki, PaweÅ Horodecki, and Ryszard Horodecki. General teleportation channel, singlet fraction, and quasidistillation. *Physical Review A*, Vol. 60, No. 3, p. 1888, 1999. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.60.1888>.
- [15] Giulio Chiribella and Daniel Ebler. Optimal quantum networks and one-shot entropies. *New Journal of Physics*, Vol. 18, No. 9, p. 093053, 2016. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/18/9/093053>.
- [16] 小泉勇樹. 量子サポートベクトルマシン, 2022. <https://event.phys.s.u-tokyo.ac.jp/phys-lab2022/pdf/qph-article02.pdf>.
- [17] Judith Alcock-Zeilinger and Heribert Weigert. Transition operators. *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 58, No. 5, p. 051703, 2017. <https://pubs.aip.org/aip/jmp/article/58/5/051703/233490/Transition-operators>.
- [18] Alessandro Bisio, Giulio Chiribella, Giacomo Mauro D’Ariano, Stefano Facchini, and Paolo Perinotti. Optimal quantum learning of a unitary transformation. *Physical Review A*, Vol. 81, No. 3, p. 032324, 2010. <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.81.032324>.
- [19] E Bagan, M Baig, and R Muñoz-Tapia. Entanglement-assisted alignment of reference frames using a dense covariant coding. *Physical Review A*, Vol. 69, No. 5, p. 050303, 2004. <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.69.050303>.
- [20] Marco Túlio Quintino, Qingxiuxiong Dong, Atsushi Shimbo, Akihito Soeda, and Mio Mura0. Probabilistic exact universal quantum circuits for transforming unitary operations. *Physical Review A*, Vol. 100, No. 6, p. 062339, 2019. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.100.062339>.