

# 統計力学と Ising モデルと経済物理

## 1 イントロダクション

今回の土地バブルの分析・考察に使う物理は主に「統計力学」と呼ばれる分野に属します。この学問はたくさん集まったときの性質を考えると役に立ちます。例えば理想気体の状態方程式  $pV = nRT$  などが適切な仮定をおくことで導けると言ったらその威力がわかるのではないのでしょうか？もちろんこれはほんの一例で、他にも磁性（磁石の性質）のメカニズムを説明できたりします。ここで注意したいのは、物性（ものの性質）を説明する方法は一通りではないということです。大体现実の系は複雑で難しいので、興味とは関係ない部分は落としたりして問題を単純化していきます。これが「モデルをつくる」ということなのです。本質のみを取り出して説明する、という理念はみな共有していますが、何を切り落として何を残すのか、というところに科学者の個性が出るわけです。

### 1.1 Ising モデル

ここではおそらく最も有名な磁性体モデルである Ising モデルを解説します。次の式がこのモデルを表す式になります：

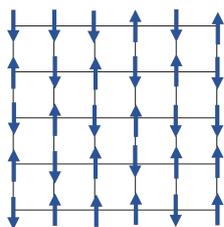


図 1: Ising モデルの模式図。電子のスピンを上と下の矢印で表しています

$$H_{\text{Ising}} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

$$\sigma_i = \pm 1$$

この  $H$  というのがエネルギーを表していて、これが小さくなるような数列  $\{\sigma_i\}$  は実現確率が高くなります。あくまでも確率的な予言しかできないというのがポイントです。ですが実はこれで十分なのです。確率が分かれば期待値が分かってこの期待値を実験データなどと比較すればよいからです。このモデルが有名な理由の一つが、「高温にすると磁性が消える」という現象（消磁）が説明できるというのがあります。いろいろな計算を進めると磁石の性質を持つ、というのは方程式

$$x = \tanh\left(\frac{2J}{k_B T} x\right) \quad (1)$$

が  $x = 0$  以外の解を持つという条件に言い換えができます。

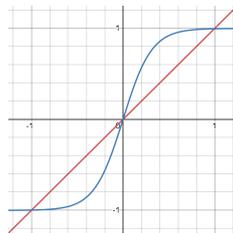


図 2: 式 (1) の図解。低温状態に相当して、2つのグラフが交わる部分が解です。

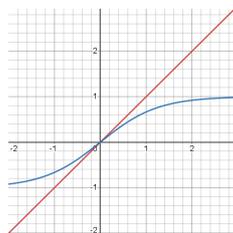


図 3: 式 (1) の図解。高温状態に相当して、今度は原点でしか交わっていません。

このように温度が変わることで2つの直線・曲線が交わったり（磁性を

持ったり) 交わらなくなったり（磁性が消えたり）することが説明できるため Ising モデルはこの意味で本質をついていると言えます。途中いろいろな単純化をしたので磁性をギリギリ持つ温度（転移温度）は正確では無いですが。

## 2 Ising モデルの応用

私たちのアプローチとは異なりますが、この Ising モデルの格子点を土地や物件に見立てて矢印を価格上昇率の符号とみなすのはある意味自然かもしれません（実際 [1] など Ising モデルを経済に応用しようという試みはあります）。

しかし自戒を込めて注意しておきたいのは「物理は必ずしも経済現象を説明する有効手段では無い」ということです。経済物理班を標榜していると物理で経済を論じることが目的化してしまうことがあります。例えば僕は以前、為替レートの変動幅を理論的に予想するモデルとして、Ising モデルの相互作用を少し変えた IS モデルというものを考えました。しかしこのモデルでは「市場参加者がある場所に固定されている」という不自然さを埋め合わせるために参加者を仮想的に並べ替えるといったさらなる不自然さを上塗りしていました。その結果「温度」が満たして欲しい性質がいくつか犠牲になったり、パラメータの数が多くなったりと不都合が生じてしまったのです。

## 参考文献

- [1] S. D. Zhou, WX.. “Self-organizing ising model of financial markets” Eur. Phys. J. B 55. (2007) : 175–181.