Physics Lab. 2023 経済物理班　　著者：石川雅隆

土地バブルに関するモデル提案と解析

1　モデルについて

1.1　Fokker-Planck 方程式

Fokker-Planck 方程式は Langevin 方程式を確率分布の観点から捉えた式です。そのため、まず Langevin 方程式について説明します。以下一次元で考えます。座標を q とし質点の質量を M とします。質点の運動量を $p(t)$ としたとき、抵抗力 $\gamma p(t)/M$ を受け、ポテンシャル $U(q)$ の下で運動する質点の Newton 運動方程式にランダム力に関する項を追加したのが Langevin 方程式です。

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma}{M}p(t) - \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}q} + f(t) \quad (1)$$

今、興味のある系の時間スケールが十分長く、抵抗力によって緩和した ($\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \simeq 0$) 状況を考えればよいとします。この状況の Langevin 方程式

$$\frac{1}{M}p(t) = -\frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}q} + \frac{1}{\gamma}f(t) \quad (2)$$

を特に overdamped Langevin 方程式と呼びます。ここでランダム力として $G(q)\xi(t)$ の形を仮定します。$G(q)$ は q の解析的な関数で $\xi(t)$ は各時刻で平均 0、他の時刻と独立なランダム力です。式 (2) の左辺は速度、右辺第 1 項は保存力 $F(q)$ と置き直すと

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = F(q) + G(q)\xi(t) \quad (3)$$

この式を時刻 t で位置 q にいる確率 $p(q,t)$ で表したのが Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q}(Fp) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2}(G^2 p) \quad (4)$$

です。

1.2　モデル提案

土地の面積 S で価格 p の対数を調整した価格 $q = \log p - aS$ がバブル時は冪分布に従い、平常時は正規分布に従うことが知られています [1]。つまり、調整価格 q は $q = 0$ に平衡点を持っているとみなせます。そこで、$F(q) = -kq$ としてバネ定数 k の復元力を持ち $G(q)$ に依存した $q = 0$ からの揺らぎを受けていると考えます。私たちが解析する分布は定常状態であると仮定すると、$G(q) = \sigma_0 > 0$ で定数の時の確率分布は正規分布に、$G(q) = \mu q$ の時の確率分布は冪分布になります。バブル時と平常時の関係を見たいので

$$G(q)^2 = \sigma_0^2 + \mu^2 q^2 \quad (5)$$

を仮定し実際の公示地価でパラメタ k, σ_0, μ を推定しました。

2　解析方法と結果

式 (5) の $G(q)$ を仮定した時、確率分布は規格化条件込みで解析的に解け、q 依存性だけ示すと

$$p(q) \propto \left(\sigma_0^2 + \mu^2 q^2\right)^{-\left(1+\frac{k}{\mu^2}\right)} \quad (6)$$

となります。$p(q)$ を scipy の curve_fit 関数でパラメタ推定した結果が図 1, 2, 3 です。各グラフを見ると 1995 年前後で数値が跳んでいることがわかります。

図 1: μ の経年変化

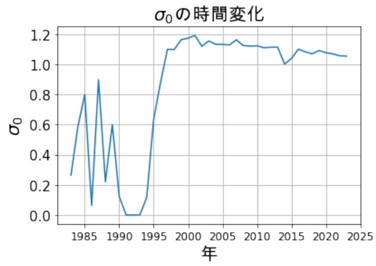

図 2: σ_0 の経年変化

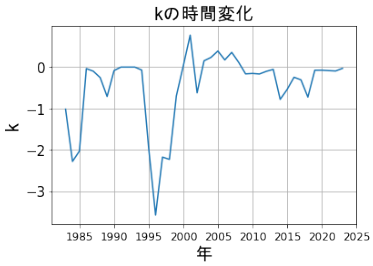

図 3: k の経年変化

また、冪指数が -1 になるとバブルが崩壊する [2] ので冪指数 $-2\left(1 + \frac{k}{\mu^2}\right)$ について経年変化を見ると図 4 のようになりました。

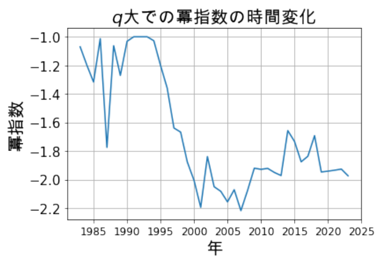

図 4: q が大きい範囲での冪指数の経年変化

参考文献

[1] 大西立顕, 渡辺努.“経済バブルの数理モデリング” 数理科学 **6 月号**. (2019)：15–21.

[2] M. K. Taisei Kaizoji. “A mechanism leading from bubbles to crashes: the case of japan’s land market” Physica A **344**. (2004) : 138–141.