Physics Lab. 2023 数理物理班

著者：梅川舜

Lorentz 群の表現としての特殊相対論

1 群と表現

1.1 群

集合 G に以下の規則

(1)結合則

$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

(2)単位元 e の存在

$a \circ e = e \circ a = a$

(3)逆元 a^{-1} の存在

$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

を満たす演算 $\circ$ が定義されたものを**群**といいます。例えば整数 $\mathbb{Z}$ と足し算、n 次元実正則行列の集合 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ と行列の掛け算などは群になります。

1.2 表現

群の構造は $\circ$ によって元がどう移り変わるかによって決まります。群 $G, \circ$ から別の群 $K, *$ への写像 f で、演算の構造を保つ、つまり

$$f(a) * f(b) = f(a \circ b)$$

を満たすものを群準同型と言います。調べたい群とある次元の正則行列が成す群の間の群準同型を考え、群の元を行列として表すことでわかりやすくすることがよくあります。これを**群の表現**と言います。

1.3 Lie 群と Lie 代数

滑らかなパラメータ $\boldsymbol{\alpha}$ によって指定される無限個の元を持つ群を Lie 群といいます。簡単のためその表現を考えると、単位元 $G(0)$ 近傍の元は

$$G(\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}) = G(0) + i \sum_k X_k \mathrm{d}\alpha_k \quad (1)$$

と書かれます。これらの掛け算がどうなるかは交換関係

$$[X_k, X_j] := X_k X_j - X_j X_k \quad (2)$$

によって決まります。X_k が生成するベクトル空間の上に演算 $[,]$ が定められたものを Lie 代数といい、Lie 群 G の掛け算の構造は局所的には対応する Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の交換関係によって決まります。

1.4 SU(2)

行列式が 1 の 2 次元ユニタリー行列がなす群を $SU(2)$ といいます。対応する Lie 代数 $\mathfrak{su}(2)$ は跡が 0 のエルミート行列となり、

$$[J_m, J_n] = i\epsilon_{lmn} J_l \quad (3)$$

を満たす基底によって張られます。$\mathfrak{su}(2)$ は量子論においてスピンや角運動量を表すのに使われ、その既約表現は（半）整数パラメータ j によって与えられ、$\boldsymbol{J}^2 = j(j+1)I$ となります。

2 Lorentz 群

2.1 慣性系

特殊相対論や古典力学では、**慣性系**と呼ばれるある特別なクラスの観測者が存在するとされています。慣性系とは、（１）力が働かない物体が等速度運動して見える系で、（２）ある慣性系 K からみて速度 $\boldsymbol{v}$ で等速度運動しているような観測者 K' はまた慣性系である、ようなものとして定められます。

慣性系間の変換 L は速度 $\boldsymbol{v}$ によって特徴付けられます。ここで、K' から見た K の速度は $-\boldsymbol{v}$ となると仮定すると、慣性系間の変換は、その演算を変換を続けて行うこととして群を成すことが分かります。なぜなら、

（１）変換を続けて行うこととしたので結合則は当然成り立つ

（２）単位元は観測者を変えない変換 $L(0)$

（３）逆元 $L(\boldsymbol{v})^{-1}$ は $L(-\boldsymbol{v})$

だからです。つまり、**慣性系間の変換は変換則の詳細によらずに群を成します。**

2.2 特殊相対論

ここで、変換則として

$$L(\boldsymbol{w}) \circ L(\boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}) \quad (4)$$

としたものが古典力学でこの変換を **Galilei 変換**と言います。一方、変換則として**光速度不変の原理**を採用したものが特殊相対論で、その変換を **Lorentz 変換**と言います。Lorentz 変換は、１次元の範囲では

$$L(w) \circ L(v) = L\left(\frac{w+v}{1+wv/c^2}\right) \quad (5)$$

となります。

2.3 Lorentz 群の表現と物理

Lorentz 変換が成す群は $SU(2) \oplus SU(2)$ になります。[1] そのため、その既約表現は 2 つのパラメータ (j, k) によって指定されます。物理量は和やスカラー倍ができるようなものであって欲しいことと、全ての慣性系が対等に扱われるべきという相対性原理を信じると、物理量は Lorentz 群の表現として変換すべきことが分かります。どの表現によって変換するかによって物理量のタイプが変わります。は $(0, 1/2) \oplus (1/2, 0)$ 表現で表される場が電子などの物質となり、$(1/2, 1/2)$ 表現が光子など力を表す場となります。

参考文献

[1] J. Schwichtenberg. “Physics from Symmetry” Springer (2015).