

# $S^1$ バンドルから始めるゲージ場の作り方

## 1 はじめに

物理をやっていると、しばしば時空間の各点に自由度がズラッと並んでいる状況に遭遇します。例えば、今ここに風が吹いているとしましょう。簡単のためある時刻を固定し、時空を  $\mathbb{R}^3$  と見做すと、風というものは任意の点  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  において、運動量の矢印  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  があると言うような状況だと考えることができます。これを幾何学の言葉に翻訳すると、「底空間  $\mathbb{R}^3$  に  $\mathbb{R}^3$  がファイバーしている」ということとなります。今回はこのファイバー束という幾何学的概念のうち、比較的簡単な  $S^1$  バンドル<sup>\*1</sup> というものについて考えていきたいと思います。

## 2 Bloch 球のトポロジー

### 2.1 Bloch 球

qubit 系の状態は、2 つの複素数  $z^1, z^2$  と 2 つのベクトル  $|0\rangle, |1\rangle$  を使って<sup>\*2</sup>

$$|\psi\rangle = z^1 |0\rangle + z^2 |1\rangle$$

と書かれる複素ベクトルとして表現することができました。ただし、量子力学の約束で  $z^1, z^2$  は

$$|z^1|^2 + |z^2|^2 = 1 \quad (1)$$

という条件を満たしていなくてはならず、その上、位相  $e^{i\theta}$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) だけの違いは同一視されてしまいます。結果と

して、異なる物理状態を表現するには

$$x^1 := 2 \operatorname{Re}(z^1 \bar{z}^2), \quad (2)$$

$$x^2 := 2 \operatorname{Im}(z^1 \bar{z}^2), \quad (3)$$

$$x^3 := |z^1|^2 - |z^2|^2 \quad (4)$$

のような 3 つの実数  $x^1, x^2, x^3$  があれば十分ということになります<sup>\*3</sup>。面白いことに、この 3 つの実数の組は

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$$

を満たすので、球面  $S^2$  の上の点と 1 対 1 対応するのです。このようにして、qubit 系の物理的に異なる状態を  $S^2$  上に図示する方法を **Bloch 球** と呼びます [1]。

### 2.2 Hopf fibration

Bloch 球では位相を表現することができません。それでは、位相も込みで状態を図示するにはどうすれば良いのでしょうか？  $z^1 := y^1 + iy^2, z^2 = y^3 + iy^4$  などと 4 つの実数  $y^1, y^2, y^3, y^4$  を使って式 (1) を書き直してみると

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 + (y^4)^2 = 1$$

となり、位相を込めた状態  $|\psi\rangle$  を表す 2 つの複素数の組  $(z^1, z^2)$  は  $S^3$  の点と 1 対 1 に対応することがわかります。これらと Bloch 球の対応は、式 (2), (3), (4) を使って定義される写像

$$p: S^3 \longrightarrow S^2, \\ (z^1, z^2) \longmapsto (x^1, x^2, x^3)$$

です。逆に、Bloch 球上の 1 点  $(x^1, x^2, x^3) \in S^2$  は  $S^3$  上の

$$\left\{ \left( \frac{(1+x^3)e^{i\theta}}{\sqrt{2(1+x^3)}}, \frac{(x^1+ix^2)e^{i\theta}}{\sqrt{2(1+x^3)}} \right) \right\}_{\theta \in \mathbb{R}}$$

と書かれる<sup>\*4</sup>単位円  $S^1$  を表しているということです。この対応を立体射影を使って図示すると次のようになります：

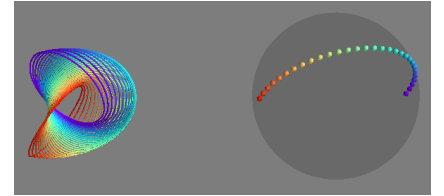


図 1: 左に示す  $S^3$  上の  $S^1$  (を  $\mathbb{R}^3$  上に立体射影したものは、写像  $p$  によって右に示す  $S^2$  上の同色の点の上にファイバーしている。

写像  $p$  のことを、 $p$  による  $S^2$  の 1 点の逆像が  $S^1$  になることを含意して **Hopf fibration** と呼び、記号として

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{p} S^2$$

などと書きます。

ここで注意しておきたいことは、 $S^3 \not\cong S^2 \times S^1$ 、つまり、Bloch 球と各状態の位相  $S^1$  をただ単に並べてみても、元の状態空間である  $S^3$  を再現することはできないということです。

## 3 主束の接続とゲージ場

qubit 系という単純な量子系ですら、位相  $S^1$  まで含めて状態を指定しようとすると  $S^1$  同士が「絡み合った」 $S^3$  が必要になりました。 $S^3$  に  $S^1$  が絡まっている程度は、ファイバー束の一般論では**接続**という概念で定式化されます。特に、主束に話を限ることで **Ehresmann 接続**は**ゲージポテンシャル**と 1 対 1 対応します。

<sup>\*1</sup> なお、本記事では  $S^n$  と言ったら、原点からの距離が 1 であるような  $\mathbb{R}^{n+1}$  の図形を表すことにします。

<sup>\*2</sup>  $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1, \langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$  が成り立つとします。  $|0\rangle, |1\rangle$  として 2 次元複素ベクトル空間に作用する Hermite 演算子の長さ 1 の固有ベクトルを選べばこの条件が満たされるので、物理ではよくある状況設定と言えるでしょう。

<sup>\*3</sup> 実は、 $|0\rangle, |1\rangle$  をスピン  $\frac{1}{2}$  系のスピン演算子  $\hat{\sigma}_z$  の固有ベクトルだと考えると、 $x^1 = \langle \hat{\sigma}_x \rangle, x^2 = \langle \hat{\sigma}_y \rangle, x^3 = \langle \hat{\sigma}_z \rangle$  が成り立ちます。

<sup>\*4</sup> 厳密には、この式が表すのは  $(0, 0, -1) \in S^2$  以外の点の  $p$  による逆像です。点  $(0, 0, -1) \in S^2$  の  $p$  による逆像は円  $(0, e^{i\theta}) \in S^3$  を表します。

### 3.1 多様体と接空間

- 各点  $p$  の近傍  $U \subset M$  を  $\mathbb{R}^d$  と同一視できる位相空間  $M$  のことを  $d$  次元の**位相多様体**と呼びます。この同一視を同相写像  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^d$  として書き、 $U$  上の各点  $q$  を

$$\varphi(q) = (x^1(q), x^2(q), \dots, x^d(q))$$

のように座標表示します。組  $(U, \varphi)$  のことを**チャート**と呼びます。

- 位相多様体  $M$  の2つのチャート  $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$  の重なりの上で定義される  $\mathbb{R}^d$  の同相写像  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  のことを**座標変換**と呼びます。

- 全ての座標変換が何回でも微分できるような位相多様体を**滑らかな多様体**と呼びます。

- 滑らかな多様体  $M$  の点  $p \in M$  における**接空間**  $T_p M$  とは、 $p$  を通る全ての滑らかな曲線  $\gamma: (-1, 1) \rightarrow M$  について、点  $p = \gamma(0)$  における  $\gamma$  の速度ベクトルを集めた集合のことです。点  $p$  のチャート  $(U, x^\mu)$  を使って座標表示すると、 $T_p M$  の任意の元は

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_p = \dot{x}^\mu(\gamma(0)) \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p$$

と書けます。 $T_p M$  は  $\left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p$  を基底とする  $d$  次元ベクトル空間になります。 $T_p M$  を全ての  $p \in M$  について集めたものを**接バンドル**と呼んで  $TM$  と書きます。

- $T_p M$  から  $\mathbb{R}$  への線形写像全体がなす  $d$  次元ベクトル空間を**余接空間**と呼んで  $T_p^* M$  と書きます。 $T_p^* M$  の基底は、チャート  $(U, x^\mu)$  で表示したときに  $dx^\mu|_p \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right|_p \right) = \delta_\nu^\mu$  を充たす線型写像  $dx^\mu|_p$  たちです。 $T_p^* M$  を全ての  $p \in M$  について集めて滑らかに繋いだものを**余接バンドル**と呼んで  $T^* M$  と書きます。 $T^* M$  は  $M$  上の

1-形式\*5全体のなすベクトル空間  $\Omega^1(M)$  と等しいです。

### 3.2 主束

滑らかな  $d$  次元多様体  $M$  の上に Lie 群  $G$  がファイバーしている (棲んでいる) とします:

$$\underbrace{G}_{\text{ファイバー}} \hookrightarrow \underbrace{P}_{\text{全空間}} \xrightarrow{\pi} \underbrace{M}_{\text{底空間}} \quad (5)$$

各点  $p \in M$  の近傍  $U$  上で見ると  $\pi^{-1}(U) \subset P$  が  $U \times G$  と同一視できるような構造を**局所自明束**と呼びます:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & U \times G \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{proj}_1 \\ & U & \end{array}$$

図 2: 局所自明束。  $\phi_U$  を局所自明化と呼ぶ。

点  $p$  の2つの開近傍  $U_i, U_j$  の重なりの上には2つの局所自明化  $\phi_i, \phi_j$  があります。図式2を使って  $(u, g) \in (U_i \cap U_j) \times G$  の行き先を追跡すると、ファイバーに作用する滑らかな写像  $t_{ij}(u): G \rightarrow G$  があって

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(u, g) = (u, t_{ij}(u)(g))$$

と書けるはずですが、特に各点  $u \in M$  において  $t_{ij}(u) \in G$  で、Lie 群  $G$  の乗法  $\cdot$  を用いて  $t_{ij}(u)(g) = t_{ij}(u) \cdot g$  と書けるとき、局所自明束(5)のことを**主  $G$  束**と呼びます。

### 3.3 接続

底空間の点  $x \in M$  の上に載っているファイバーを  $P_x := \pi^{-1}(\{x\})$  と書きます。**ファイバー**  $P_x$  の1点  $u_x \in P_x$  をとってきて

- 接空間  $V_{u_x} := T_{u_x} P_x$
- 接空間  $T_{u_x} P$

を考えます:

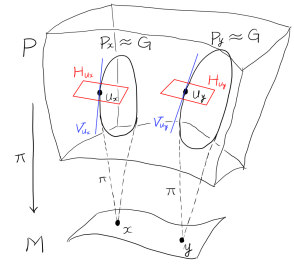


図 3: 水平部分空間  $H_{u_x}$  と垂直部分空間。

$V_{u_x}$  に「直交」する接ベクトルたちがちょうど  $d$  次元ベクトル空間  $H_{u_x}$  を成して、

$$T_{u_x} P = H_{u_x} \oplus V_{u_x} \quad (6)$$

が成り立つということです。 $H_{u_x}$  は**水平部分空間**と呼ばれ、ファイバー同士の振れの構造を反映しています。 $TP$  の部分バンドル  $H := \coprod_{u \in P} H_u$  のことを**ファイバー束**(5)の**Ehresmann 接続**と呼びます [2]。

特に主  $G$  束の場合、接続  $\coprod_{u \in P} H_u$  に、構造群  $G$  の全空間  $P$  への右作用  $R_g: P \rightarrow P$  を考慮した付加条件

$$(R_g)_*(H_u) = H_{R_g(u)} \quad (7)$$

を課すことで、底空間  $M$  上の曲線の**水平持ち上げ**と呼ばれる全空間  $P$  上の曲線が始点に応じて一意に定まり、水平持ち上げによって底空間の異なる点の上のファイバー間の**平行移動**が定義されます:

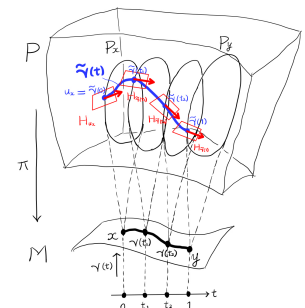


図 4: 曲線  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  の水平持ち上げ

\*5  $M$  上の  $n$ -形式とは、 $\forall p \in M$  に対して、多重線型写像  $\prod_{i=1}^n T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  であって引数の入れ替えに関して反対称なものを滑らかに対応づける写像のことです。 $n$ -形式全体の集合を  $\Omega^n(M)$  と書きます。

### 3.4 接続形式

Lie 群  $G$  の単位元  $1_G$  における接空間  $T_{1_G}G$  のことを **Lie 代数** と呼び、 $\mathfrak{g}$  と書きます。実は  $V_{u_x} \cong \mathfrak{g}$  なので、直和分解 (6) から定まる射影

$$T_{u_x}P \rightarrow V_{u_x}$$

は、ある **Lie 代数に値をとる 1-形式**  $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$  と 1 対 1 対応します。Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の基底を  $\lambda_a/(2i)$  と書いたとき、 $\dim \mathfrak{g}$  個の通常の 1-形式たち  $\omega_a \in \Omega^1(P)$  を使って

$$\omega = \omega_a \frac{\lambda_a}{2i}$$

のように展開できるということです。条件 (7) を充たす  $\omega$  は、

- 交換関係

$$\left[ \frac{\lambda_a}{2i}, \frac{\lambda_b}{2i} \right] = f_{abc} \frac{\lambda_c}{2i} \quad (8)$$

を充たす\*6  $\mathfrak{g}$  の基底

- $G$  のチャート  $(V, g_{ij})$
- $M$  のチャート  $(U, x^\mu)$

と  $d \times \dim \mathfrak{g}$  個の滑らかな関数  $A_\mu^a: M \rightarrow \mathbb{R}$  を使って書かれる  $M$  上の  $\mathfrak{g}$  値 1-形式 (**ゲージポテンシャル**)

$$A := A_\mu^a(x) dx^\mu \frac{\lambda_a}{2i}$$

を使うと、 $P$  のチャート  $U \times V$  上で

$$\omega = g^{-1} dg + g^{-1} Ag \quad (9)$$

の形に表示できることが知られています [3]。この  $\omega$  は **接続形式** と呼ばれます。水平部分空間  $H_{u_x}$  の基底 (**共変微分** と呼びます) はゲージポテンシャルを使って

$$D_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A_\mu^a(x) \frac{[\lambda_a]_{ik}}{2i} g_{kj} \frac{\partial}{\partial g_{ij}}$$

と書けます。

### 3.5 曲率形式

(9) の第 1 項は **Maurer-Cartan 形式** と呼ばれる特別な  $\mathfrak{g}$  値 1-形式で、方程式\*7  $d(g^{-1} dg) + g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg = 0$  を充します。第 2 項からよくわからない寄与を全部まとめて

$$\Omega := d\omega + \omega \wedge \omega$$

のように  $\mathfrak{g}$  値 2-形式  $\Omega$  を定義します。この  $\Omega$  は **曲率 2-形式** と呼ばれます。そして

$$F := g\Omega g^{-1} = dA + A \wedge A \quad (10)$$

のことを **ゲージ場の強さ** と呼びます。

## 4 U(1) ゲージ理論

主  $S^1 = U(1)$  バンドル

$$U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M \quad (11)$$

のゲージ場の強さ (10) が電磁場を表すことを確認しましょう。U(1) の Lie 代数は  $\mathfrak{u}(1) = \mathbb{R}$  であり、可換なので式 (8) において  $f_{abc} = 0$  として良いです。

- $\mathfrak{u}(1)$  の基底: 1
- $g = e^{i\Lambda} \in U(1)$  の局所座標:  $\Lambda$
- $M$  のチャート:  $(U, x^\mu)$

と選ぶと、接続形式は滑らかな関数  $A_\mu: M \rightarrow \mathbb{R}$  を使って\*8

$$\omega = d\Lambda + A_\mu(x) dx^\mu$$

と書けます。U(1) が可換なので  $A \wedge A = 0$  となり、**ゲージ場の強さ** (10) は

$$F = dA$$

となります。成分で書くと

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

です。外微分の性質から、恒等式

$$dF = d^2 A = \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0 \quad (12)$$

が成り立ちます。

### 4.1 $\mathbb{R}^4$ 上の U(1) ゲージ理論

Minkowski 時空  $M = \mathbb{R}^4$  のチャートは自分自身の 1 枚です。(12) において  $E_i := F_{i0}$ ,  $B_i := \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}$  と定めることで

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

が従います。これは Maxwell 方程式です! 残りの 2 式は適当な作用の変分によって導出できます。

### 4.2 $S^2$ 上の U(1) ゲージ理論

底空間  $M = S^2$  の場合、 $M$  のチャートは  $(U_\pm, (\theta_\pm, \phi_\pm))$  の 2 枚が必要で:

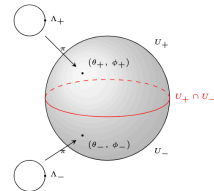


図 5:  $S^2$  のチャート。1 枚では覆えない。

このとき、接続形式は次のようになります:

$$\omega = \begin{cases} d\Lambda_+ + A_+(x), & x \in U_+ \\ d\Lambda_- + A_-(x), & x \in U_- \end{cases}$$

赤道の点  $(\cos \phi, \sin \phi, 0) \in U_+ \cap U_-$  におけるファイバーの元は局所自明化によって

$$e^{i\Lambda_-} = e^{in\phi} e^{i\Lambda_+} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

の変換を受けるので、 $\omega$  の不変性から

$$A_+ = A_- + n d\phi$$

でなくてはなりません。よって Stokes の定理を使って磁束を計算すると

$$\begin{aligned} \int_{S^2} F &= \int_{U_+} dA_+ + \int_{U_-} dA_- \\ &= \int_{U_+ \cap U_-} A_+ - \int_{U_+ \cap U_-} A_- \\ &= 4\pi n \end{aligned}$$

となります。幾何学的観点からすると、この整数  $n$  は **Chern 数** と呼ばれ、U(1) バンドル (11) の全空間  $P$  の構造を反映します。特に  $n = 1$  のとき  $P = S^3$  で、**Hopf fibration** です。

### 参考文献

[1] R. Mosseri and R. Dandoloff. "Geometry of entangled states, Bloch spheres and Hopf fibrations" *Journal of physics. A, Mathematical and general* **34**.47 (2001): 10243-10252.  
 [2] 森田茂之. "微分形式の幾何学" 岩波書店 (2005).  
 [3] T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson. "Gravitation, gauge theories and differential geometry" *Physics reports* **66.6** (1980): 213-393.

\*6  $f_{abc}$  は Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の **構造定数** と呼ばれる実数/複素数です。

\*7 2 つの 1 形式  $\omega, \eta$  の **外積**  $\omega \wedge \eta \in \Omega^2(P)$  を、 $\forall X_1, X_2 \in TP$  に対して  $\omega \wedge \eta(X_1, X_2) := \omega(X_1)\eta(X_2) - \omega(X_2)\eta(X_1)$  として定義します。1 形式  $\omega$  の **外微分**  $d: \Omega^1(P) \rightarrow \Omega^2(P)$  は、チャート  $(U, x^\mu)$  による成分表示で  $d\omega := \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu$  と定義されます。

\*8 接続形式の第 1 項は  $g^{-1} dg = e^{-i\theta} de^{i\theta} = i d\theta$  ですが、U(1) の場合に限った慣習で  $i$  を落とします。