Physics Lab. 2023 量子班

著者：渡邉開人

Majorization と量子情報

1 エンタングル状態

量子力学の枠組みの中で、**エンタングル状態**は重要な役割を果たします。具体的には、エンタングルした 2 量子を 2 者間 (以下ではアリスとボブと呼ぶ) で共有するとき、古典的な相関では説明のつかないような相関がみられます。例えば、

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

で表される状態はその一例です。このエンタングル状態を用いると、例えば別の任意の量子純粋状態を、局所的な操作と古典通信 (**LOCC**) によって遠くに送信する**量子テレポーテーション**や 1 qubit で 2 bit 分の古典情報を通信できる**超密度符号化**など、古典を超えた操作が可能になります。しかしながら、単に無相関な 2 量子に対して LOCC をかけても (1) のような状態は得られないことが知られています。本ポスターでは、これをより数理的な視点で説明します。

2 Majorization

Majorization は、経済の分野で有名な**ローレンツ曲線**と密接な関わりがあります。これは、社会の貧富の格差を可視化したものです。2 つの確率分布に対する、この格差に対応するものが Majorization です。

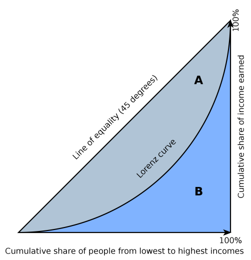

図 1: ローレンツ曲線 (wikipedia より引用)

2 種類の d 成分離散確率分布 p, q を降順に並び替えたものを $p^{\downarrow}, q^{\downarrow}$ とします。(つまり、$p_1^{\downarrow} \geq p_2^{\downarrow} \geq \cdots \geq p_d^{\downarrow}$、$q$ についても同様。) ここで、$q \prec p$ を、

$$\forall k \in \{1, \cdots, d\} \quad \sum_{i=1}^{k} q_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} p_i^{\downarrow} \tag{2}$$

と定義し、p は q を **majorize する**といいます [1]。

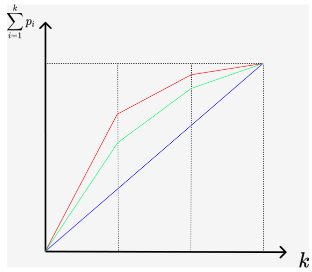

図 2: 横は k、縦軸は $\sum_i^k p_i^{\downarrow}$。任意の k に対してローレンツ曲線が上回るとき、Majorize するという。一様分布は任意の確率分布に Majorize される。

3 エンタングルと Majorization

任意の $|\phi^{AB}\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$ に対して、

$$|\phi\rangle = \sum_i \lambda_i^{\phi} |e_i^A\rangle |e_i^B\rangle \tag{3}$$

という風に展開することが出来ます。これをシュミット分解とよび、$\{\lambda_i\}$ をシュミット係数といいます。

このとき、実は以下の定理が知られています。

Nielsen の定理 [2]

$|\phi\rangle, |\psi\rangle$ を、アリスとボブの間で共有される 2 量子状態とする。$|\phi\rangle \xrightarrow{\text{LOCC}} |\psi\rangle$ が可能であるための必要十分条件は、それぞれのシュミット係数の列を λ_ϕ, λ_ψ として、$\lambda_\phi^2 \prec \lambda_\psi^2$ をみたすことである。

ここから、式 (1) の状態は特別な状態であることがわかります。この状態に対応するシュミット係数の 2 乗の列は、$u = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ となることがわかります。この確率分布は任意の確率分布に Majorize されるので、**この状態から任意の状態を得る LOCC が存在すること**がわかります。

4 Majorization と束

Majorization を、確率分布のうち降順に並んでいるものを集めた集合上の二項関係と考えると、これは (1) 反射律、(2) 推移律、(3) 反対称律を満たし、Majorization は半順序とわかります。また、任意の $p^{\downarrow}, q^{\downarrow}$ に対して、上限 $p \wedge q$、下限 $p \vee q$ が存在することが知られています。これにより、この確率分布の部分集合は束の構造を持ちます。これにより、LOCC で遷移可能でない状態に対する最適近似を与える状態と、この束構造の関係も研究されています [3]。

参考文献

[1] T. Sagawa. “Entropy, Divergence, and Majorization in Classical and Quantum Thermodynamics” Springer.

[2] M. A. Nielsen. “Conditions for a class of entanglement transformations” arXiv:quant-ph/9811053.

[3] H. F. F. H. G. B. G.M. Bosyk, G. Sergioli. “Approximate transformations of bipartite pure-state entanglement from the majorization lattice” arXiv:1608.04818.