Physics Lab. 2023 量子班

著者：岩崎哲也

組み紐群と量子計算

1　量子計算とは

1.1　状態

量子計算では 2 つの状態 $|0\rangle$ と $|1\rangle$ がある **2 準位系**とよばれる系を使います。系の状態は 2 つの状態の重ね合わせで表され、$|\Phi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$ のように表します。

また、2 準位系をいくつか並べることでより大きな系を作ることができます。たとえば、2 つの 2 準位系を並べると $|00\rangle$、$|01\rangle$、$|10\rangle$、$|11\rangle$ の 4 つの状態を持つ系になります。

1.2　ゲート

多くの量子計算は、**ゲート**とよばれる操作によって状態を変化させることで行われます。

2　組み紐群

2.1　組み紐群の定義

i を $1, 2, \dots, n-1$ として、単位元と以下の関係を満たす s_i たちから生成される群を組み紐群 B_n と言います。

1. $s_i s_j = s_j s_i$ for $|i-j| > 1$
2. $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$

2 番目の式は Yang-Baxter 方程式とよばれ、統計力学など物理や数学の様々な場面で出てくる式です [1]。

2.2　組み紐群の図示

組み紐群は n 本の紐を使って図示することができます。図 1 のように、s_i は i 番目の紐と $i+1$ 番目の紐をクロスさせることによって表現することができます。

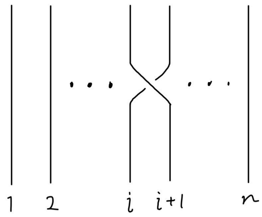

図 1: s_i の図示

例えば、組み紐群の定義で出てきた関係式はそれぞれ図 2、3 のように表されます。

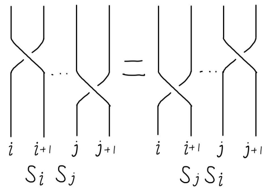

図 2: 定義式 1

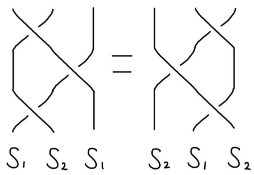

図 3: Yang-Baxter 方程式

s_i の逆要素 s_i^{-1} は図 4 のように逆のクロスで表せます。

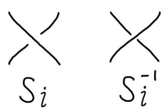

図 4: s_i^{-1}

3　組み紐群と量子計算

組み紐群の紐の一本一本に 2 準位系を対応させることによって組み紐群を量子計算を使って表すことができます。2 準位系をベクトルを使って表すと、組み紐群は行列と考えることができます。クロスのない部分は単位行列 I_2 が対応します。一方、クロスのある部分には行列 R を対応させます。これによって、s_i は

$$I_2 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes R \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_2$$

に対応させることができます (図 5)。

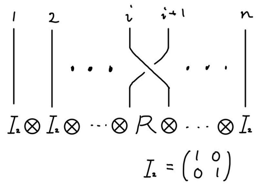

図 5: s_i の 2 準位系による表現

行列 R は 4×4 の行列で、組み紐群の定義から Yang-Baxter 方程式

$$(R \otimes I)(I \otimes R)(R \otimes I) = (I \otimes R)(R \otimes I)(I \otimes R)$$

を満たします。これを満たす R はいくつかありますが、この内ユニタリーという条件を満たすものは量子ゲートと見做せます。例えば

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のようなものです。

この R は、一つの紐だけに作用する量子ゲートと合わせることで任意の量子ゲートを再現することができることが知られています [2]。

参考文献

[1] 大槻知忠. “量子不変量—3 次元トポロジーと数理物理の遭遇” 日本評論社 (1999).

[2] L. Kauffman and S. L. Jr. “Braiding operators are universal quantum gates” New J. Phys. **6**. (2004)：134.